

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ

М. Н. Калимолдаев, Б. К. Синчев, Г. С. Тажибахыт

Институт проблем информатики и управления Министерства образования и науки
Республики Казахстан, 050010, Алма-Ата, Казахстан

УДК 519.712.1

Разработаны критерии устойчивости динамических моделей компьютерных систем. Предлагаемый подход позволяет снизить порядок матрицы Гурвица, тем самым снимается так называемое проклятие размерности, возникающее при машинной обработке различных программных пакетов.

Ключевые слова: компьютерные системы, критерий устойчивости, ганкелева матрица, система линейных дифференциальных уравнений, характеристический полином.

In this work criteria of stability of dynamic models of computer systems are developed. The suggested approach allows to lower the order of the Gurvits matrix and so-called "the damnation of dimension" is removed by that at machining of various software packages.

Key words: computer systems, criterion of stability, Hankel matrix, system of the linear differential equations, characteristic polynom.

Аппаратная основа современных электротехнических комплексов включает генераторы сигналов, цепи усилительных устройств, нелинейные преобразователи сигналов и прочие устройства, от устойчивого (стабильного) функционирования которых зависит эффективность работы компьютерных систем. В процессе эксплуатации указанные устройства подвержены воздействию ряда факторов, влияющих на их устойчивость (скачки напряжения, короткое замыкание, резкие перепады температуры и др.). Таким образом, для обеспечения надежности компьютерных систем необходимо исследовать устойчивость систем дифференциальных уравнений, описывающих функционирование аппаратных средств компьютерной техники [1].

Высокая размерность динамических моделей современных информационных систем усложняет компьютерную проверку известных критериев Рауса – Гурвица и Лъенара – Шипара.

Предлагаемый критерий позволяет снизить порядок матрицы Гурвица с $n \times n$ до $m \times m$ ($m = [n/2]$ – целая часть) и тем самым снять “проклятие размерности”, имеющее место при машинной обработке на основе известных программных пакетов (MatLab, MathCAD и др.).

Постановка задачи. Устойчивость линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

рассматривалась во многих работах, в которых были получены алгебраические критерии устойчивости Рауса – Гурвица, Лъенара – Шипара и частотные критерии устойчивости Михайлова, Найквиста и др. Здесь A – известная матрица размерности $n \times n$ с постоянными элементами.

Преимуществом критерия Лъенара – Шипара [2] по сравнению с критерием Рауса – Гурвица [3, 4] является уменьшенное в два раза число детерминантных неравенств. Критерии Михайлова и Найквиста [5] основаны на частотных характеристиках системы (1).

П. Л. Чебышев и А. А. Марков доказали теоремы, непосредственно связанные с построением области устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы (1), но в силу сложности не получившие широкого применения [6].

Указанные критерии требуют в первую очередь проверки положительной определенности матрицы Гурвица размерности $n \times n$ на основе критерия Сильвестра [6]. В общем случае критерий Лъенара – Шипара позволяет уменьшить размерность матрицы на единицу за счет выбора четных либо нечетных миноров матрицы Гурвица.

Ставится следующая задача. Необходимо построить новый критерий устойчивости системы (1), более эффективный и менее трудоемкий по сравнению с критериями Рауса – Гурвица и Лъенара – Шипара, на основе бесконечных ганкелевых матриц.

Решение задачи. Определив из системы (1) характеристический полином

$$|A - pE| = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = f(p), \quad (2)$$

представим $f(p)$ в виде

$$f(p) = h(p^2) + pg(p^2). \quad (3)$$

Рассмотрим два случая: 1) $n = 2m$; 2) $n = 2m + 1$. В первом случае при $u = p^2$ имеем

$$\begin{aligned} h(u) &= a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + \dots + a_{m-1} u + a_m, \\ g(u) &= b_1 u^{m-1} + b_2 u^{m-2} + \dots + b_{m-1} u + b_m, \end{aligned} \quad (4)$$

во втором случае функция $h(u)$ остается без изменений, а функция $g(u)$ имеет вид

$$g(u) = b_0 u^m + b_1 u^{m-1} + \dots + b_{m-1} u + b_m. \quad (5)$$

Для решения данной задачи введем ганкелеву (бесконечную симметричную) матрицу

$$S = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (S_{i+k})_0^\infty. \quad (6)$$

Полагая, что полиномы $h(u)$ и $g(u)$ взаимно просты, несократимую рациональную дробь $g(u)/h(u)$ разложим в ряд по убывающим степеням $u = p^2$:

$$\frac{g(u)}{h(u)} = S_1 + \frac{S_0}{u} - \frac{S_1}{u^2} + \frac{S_2}{u^3} - \frac{S_3}{u^4} + \dots \quad (7)$$

В случае если n нечетно, для получения разложения (7) необходимо также предположить, что $a_1 \neq 0$, если n четно, то $S_{-1} \equiv 0$.

Соотношение (7) позволяет определить коэффициенты S_0, S_1, S_2, \dots дроби в (7) и элементы матрицы (6). Однако при поиске решений сложно учесть знаки коэффициентов в системе уравнений, полученной в работе [6] из равенства (7) для произвольного n . Поэтому введем рациональную функцию $R(\vartheta)$:

$$R(\vartheta) = -\frac{g(-\vartheta)}{h(-\vartheta)}, \quad u = -\vartheta. \quad (8)$$

Тогда

$$R(\vartheta) = -S_{-1} + \frac{S_0}{\vartheta} + \frac{S_1}{\vartheta^2} + \frac{S_2}{\vartheta^3} + \dots \quad (9)$$

и, следовательно, $R(\vartheta) \sim S$. Последнее означает, что матрица S ранга m однозначно определяет характеристический полином (2) либо (3).

Выражения (4), (5) записываются в виде

$$\begin{aligned} h(-\vartheta) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i \vartheta^{m-i}; \\ g(-\vartheta) &= \sum_{i=1}^m (-1)^i b_i \vartheta^{m-i}, \end{aligned} \quad (10)$$

и в случае $n = 2m + 1$ имеем

$$g(-\vartheta) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b_i \vartheta^{m-i}. \quad (11)$$

Далее, умножая соотношения (10) и (11) на -1 , получаем

$$h(\vartheta) = \sum_{i=0}^m e_i \vartheta^{m-i}, \quad -g(\vartheta) = \sum_{i=1}^m c_i \vartheta^{m-i-1}, \quad (12)$$

в случае нечетного n –

$$-g(\vartheta) = \sum_{i=0}^m c_i \vartheta^{m-i}. \quad (13)$$

Введем следующие обозначения: $\delta_{-1} = -s_{-1}$, $\delta_0 = s_0$, $\delta_i = s_1, \dots$. Приравнявая правые части соотношений (8) и (9) с учетом (12), (13) и проводя несложные преобразования с учетом равенства коэффициентов при одинаковых степенях переменной ϑ , получаем

$$\sum_{i=0}^{k-1} e_i \delta_{k-i-1} = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=0}^m e_i \delta_{l-i} = 0, \quad l = m, m+1, \dots, \quad (14)$$

в случае четного n –

$$\sum_{i=0}^{k-1} e_i \delta_{k-i-1} = c_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad \sum_{i=0}^m e_i \delta_{l-i} = 0, \quad l = m, m+1, \dots \quad (15)$$

Найдем решения систем (14) при $k = 0$:

$$\delta_{-1} = \frac{c_0}{l_0} \quad (16)$$

и $k = 1, 2, \dots, m$:

$$\delta_{k-1} = (c_k - \sum_{i=1}^{k-1} e_i \delta_{k-i-1})/l_0, \quad (17)$$

а также

$$\delta_e = -\frac{1}{e_0} \sum_{i=1}^m e_i \delta_{l-i}, \quad l = m, m+1, \dots \quad (18)$$

Аналогично находим решения системы (14) в случае $n = 2m$ при $k = 1$:

$$\delta_0 = \frac{c_1}{l_0}$$

и $k = 2, 3, \dots, m$:

$$\delta_k = (c_k - \sum_{i=2}^{k-1} e_i \delta_{k-i-1})/l_0, \quad \delta_l = -\frac{1}{l_0} \sum_{i=1}^m e_i \delta_{l-i}, \quad l = m, m+1, \dots \quad (19)$$

Формулы (16), (17), (19) справедливы при циклической подстановке предыдущих найденных переменных в последующие.

С учетом условий в критерии Льенара – Шипара полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Для того чтобы линейная система дифференциальных уравнений (1) с постоянными коэффициентами являлась устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_i полинома (2) были больше нуля, матрица, элементы которой определяются по формулам (16)-(19), была положительно-определенной:*

$$\begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \dots & \delta_{m-1} \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{m-1} & \delta_{m-2} & \dots & \delta_{2m-2} \end{pmatrix} = (\delta_{i+k})_0^{m-1} > 0 \quad (20)$$

и в случае нечетного $n = 2m + 1$ выполнялось неравенство

$$\delta_{-1} < 0.$$

Следует отметить, что порядок m исследуемой матрицы (20) в два раза меньше порядка n матрицы Гурвица и в случаях четного и нечетного n переменные m определяются по формулам $m = n/2$, $m = (n-1)/2$ соответственно. Элементы матрицы (20) легко вычисляются в соответствии с нечетностью k и четностью n по формулам (17), (18) либо (19).

Пример 1. Рассмотрим характеристический полином

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{0, 3}.$$

Для определения гурвицевости данного полинома проверим положительную определенность матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix},$$

используя критерий Сильвестра:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad a_1 > 0.$$

Из критерия Лъенара – Шипара следует, что условие $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ является достаточным.

Приведенная выше теорема дает условия гурвицевости данного полинома

$$\delta_{-1} = \frac{-a_1}{a_0} < 0, \quad \delta_0 = (a_1 a_2 - a_0 a_3) / a_0 > 0.$$

Второе неравенство совпадает с первым, а искомая матрица имеет размерность 1×1 , в то время как матрица Гурвица имеет размерность 3×3 .

Пример 2. Рассмотрим характеристическое уравнение вида (2):

$$p^4 + 8p^3 + 18p^2 + 16p + 5 = 0.$$

С учетом представления (3) имеем полиномы $h(u) = u^2 + 18u + 5$, $g(u) = 8u + 16$, $u = p^2$ и, используя разложение (7), получаем дробно-рациональную функцию

$$\frac{g(u)}{h(u)} = \frac{8u + 16}{u^2 + 18u + 5}.$$

Выполним замену аргумента $u = -v$, $h(-v) = v^2 - 18v + 5$, $g(-v) = -8v + 16$ и используем соотношение (9) и систему уравнений (15) для нахождения коэффициентов. В результате получим $S_0 = 8$, $S_1 = 128$, $S_2 = 2264$. При этих значениях матрица (6) или (20) размером 2×2 является положительно-определенной, а данный полином – гурвицевым.

Таким образом, полученный новый критерий устойчивости имеет преимущества по сравнению с известными критериями Рауса – Гурвица и Лъенара – Шипара.

Алгоритм определения устойчивости линейных систем. Разработан следующий алгоритм определения устойчивости линейных систем.

Шаг 1. Ввод матрицы A .

Шаг 2. Определение характеристического полинома $f(p)$ матрицы A .

Шаг 3. Формирование полиномов $h(-v)$, $g(-v)$, где $-v = p^2$, на основе $f(p)$.

Шаг 4. Построение системы уравнений для определения элементов ганкелевой матрицы Γ на основе $h(-v)$ и $g(-v)$.

Шаг 5. Формирование матрицы Γ .

Шаг 6. Проверка положительной определенности матрицы Γ на основе критерия Сильвестра.

Шаг 7. Выводы об устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений.

Таким образом, из предлагаемого алгоритма решения задачи устойчивости динамических моделей компьютерных систем и приведенных примеров следует, что полученный критерий (20) является более эффективным и менее трудоемким по сравнению с известными критериями. Полученный результат может быть использован при решении задачи повышения надежности коммуникационных систем.

Список литературы

1. ТАРНАВСКИЙ Г. А., ЧЕСНОКОВ С. С., ЖИБИНОВ С. Б. Современное состояние компьютерного моделирования в Интернете // Пробл. информатики. 2009. № 2. С. 52-58.
2. LIENARD, CHIPART. Sur la signe de la partie reelle des racines d'une equation algebrique // J. Math. Pures Appl. (6). 1914. V. 10. P. 291-346.
3. ROUTH E. J. Stability of given state of motion. L.: CityPlace, 1877. 300 p.
4. HURWITZ A. Hedew die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt // Math. Ann. 1895. Bd 46. S. 273-284.
5. ФЕЛЬДБАУМ А. А. Методы теории автоматического управления / А. А. Фельдбаум, А. Г. Бутковский. М.: Наука, 1971. 744 с.
6. ГАНТМАХЕР Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1998. 552 с.

*Калимолдаев Максат Нурадилович – д-р физ.-мат. наук, проф.,
директор Института проблем информатики и управления
Министерства образования и науки Республики Казахстан;
e-mail: mpk@ipc.kz, тел. 8-727-272-37-11*

*Синчев Бахтгерей Куспанович – д-р техн. наук, проф.,
гл. науч. сотр. Института проблем информатики и управления
Министерства образования и науки Республики Казахстан*

*Тажихахыт Галым Сабитович – асп. Института проблем информатики
и управления Министерства образования и науки Республики Казахстан*

Дата поступления – 23.10.09