

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ ЯВНЫМ МЕТОДОМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ СРЕДЕ ИСМА

А. Е. Новиков, Е. А. Новиков*, Ю. В. Шорников**, Д. Н. Достовалов**

Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, Россия

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск, Россия

**Новосибирский государственный технический университет, 630092, Новосибирск, Россия

УДК 519.622

На основе трехстадийной схемы типа схемы Рунге – Кутты третьего порядка точности разработан алгоритм переменного шага. Построены неравенства для контроля точности вычислений и устойчивости численной схемы. Для гибридных систем разработан алгоритм выбора шага интегрирования с учетом событийной функции.

Ключевые слова: метод Рунге – Кутты, контроль точности и устойчивости, переменный шаг, гибридные задачи.

The algorithm on the basis of the three-phasic scheme Runge-Kutta of the third order of accuracy and variable step is developed. Inequalities for the control of accuracy and stability of the numerical scheme are constructed. The algorithm of choice a step of integration is developed for hybrid systems with the guard condition.

Key words: method of Runge-Kutta, the accuracy and stability control, variable step, hybrid problems.

Введение. Для большого количества технических задач характерно наличие событий, которые означают наличие точек разрыва в первых производных от фазовых переменных. Такие комбинированные дискретно-непрерывные системы называются гибридными, или системами с переключением [1–3]. В них события происходят в моменты времени, соответствующие нулям некоторой алгебраической функции. Во многих случаях проблема усугубляется большой размерностью и жесткостью рассматриваемой задачи. При решении жестких задач большой размерности основные вычислительные затраты приходится на декомпозицию матрицы Якоби [4–6], поэтому эффективность алгоритма интегрирования обычно повышается за счет замораживания матрицы Якоби [7]. В случае умеренно жестких задач можно применять алгоритмы интегрирования на основе явных методов с контролем точности вычислений и устойчивости численной схемы [8].

В данной работе создан алгоритм интегрирования переменного шага на основе трехстадийной схемы типа схемы Рунге – Кутты третьего порядка точности. Построены неравенства для контроля точности вычислений и устойчивости численной схемы. Алгоритм интегрирования может быть использован при решении гибридных задач, в том числе умеренно жестких. Разработан также алгоритм обнаружения событий гибридной системы. Рассмотренные

Работа выполнена в рамках АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 гг.)” (код проекта РНП 2.1.2/4751), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2011 гг. (государственный контракт № П-297), а также при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00621) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3431.2008.9).

методы реализованы в среде моделирования гибридных систем ИСМА (инструментальные средства машинного анализа) [9].

1. Трехстадийный метод типа метода Рунге – Кутты. При численном решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k \quad (1)$$

рассмотрим явный трехстадийный метод типа метода Рунге – Кутты вида

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \\ k_1 &= hf(y_n), \quad k_2 = hf(y_n + \beta_{21} k_1), \\ k_3 &= hf(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где y и f — вещественные N -мерные вектор-функции; t — независимая переменная; h — шаг интегрирования; k_1 , k_2 и k_3 — стадии метода; p_1 , p_2 , p_3 , β_{21} , β_{31} и β_{32} — числовые коэффициенты, определяющие точность и устойчивость (2). В случае неавтономной системы

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k,$$

схема (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \\ k_1 &= hf(t_n, y_n), \quad k_2 = hf(t_n + \beta_{21} h, y_n + \beta_{21} k_1), \\ k_3 &= hf(t_n + [\beta_{31} + \beta_{32}]h, y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2). \end{aligned}$$

Ниже для упрощения выкладок будем рассматривать задачу (1). Однако разработанные методы можно применять для решения неавтономных задач.

Получим соотношения, определяющие коэффициенты метода (2) третьего порядка точности. Для этого разложим стадии k_1 , k_2 и k_3 в ряды Тейлора по степеням h до членов с h^4 включительно и подставим в первую формулу (2). В результате получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (p_1 + p_2 + p_3)hf_n + [\beta_{21}p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})p_3]h^2 f'_n f_n + \\ &+ h^3 [\beta_{21}\beta_{32}p_3 f''_n f_n + 0,5(\beta_{21}^2 p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})^2 p_3) f''_n f_n^2] + \\ &+ h^4 [0,5\beta_{21}^2 \beta_{32} p_3 f'_n f''_n f_n^2 + \beta_{21}(\beta_{31} + \beta_{32})\beta_{32} p_3 f''_n f'_n f_n^2 + \\ &+ \{[\beta_{21}^3 p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})^3 p_3]/6\} f'''_n f_n^3] + O(h^5), \end{aligned}$$

где элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении y_n .

Точное решение $y(t_{n+1})$ в окрестности точки t_n можно представить в виде

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hf + 0,5h^2 f'f + (h^3/6)[f'^2 f + f''f^2] + \\ &+ (h^4/24)[f'^3 f + 3f''f'f^2 + f'f''f^2 + f'''f^3] + O(h^5), \end{aligned}$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении $y(t_n)$. Сравнивая ряды для приближенного y_{n+1} и точного $y(t_{n+1})$ решений до членов с h^3 включительно при условии $y_n = y(t_n)$, запишем условия третьего порядка точности схемы (2):

$$1) \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1;$$

- 2) $\beta_{21}p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})p_3 = 1/2$;
- 3) $\beta_{21}^2p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})^2p_3 = 1/3$;
- 4) $\beta_{21}\beta_{32}p_3 = 1/6$.

В предположении $y_n = y(t_n)$ локальную ошибку δ_n схемы (2) можно вычислить по формуле $\delta_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$. Учитывая представления $y(t_{n+1})$ и y_{n+1} в виде рядов Тейлора, получаем

$$\delta_n = h^4 \left[\frac{1}{24} f'^3 f + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2} \beta_{21}^2 \beta_{32} p_3 \right) f' f'' f^2 + \left(\frac{1}{8} - \beta_{21} \beta_{32} (\beta_{31} + \beta_{32}) p_3 \right) f'' f' f^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6} \beta_{21}^3 p_2 - \frac{1}{6} (\beta_{31} + \beta_{32})^3 p_3 \right) f''' f^3 \right] + O(h^5).$$

В нелинейной системе условий третьего порядка точности численной схемы имеется два свободных коэффициента. Положим $\beta_{21} = 0,5$ и $\beta_{31} + \beta_{32} = 1$. Тогда на каждом шаге k_1 , k_2 и k_3 вычисляются в точках t_n , $t_n + 0,5h$ и $t_n + h$ соответственно. Условия третьего порядка запишем в следующем виде:

- 1) $p_1 + p_2 + p_3 = 1$;
- 2) $0,5p_2 + p_3 = 1/2$;
- 3) $0,25p_2 + p_3 = 1/3$;
- 4) $\beta_{32}p_3 = 1/3$.

Из второго и третьего уравнений данной системы находим $p_2 = 2/3$ и $p_3 = 1/6$. Из первого и последнего уравнений получаем $p_1 = 1/6$ и $\beta_{32} = 2$. Из равенства $\beta_{31} + \beta_{32} = 1$ следует $\beta_{31} = -1$. В результате коэффициенты метода (2) имеют вид

$$p_1 = p_3 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{2}{3}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = -1, \beta_{32} = 2. \quad (3)$$

При данных соотношениях локальную ошибку δ_n схемы (2) можно записать следующим образом:

$$\delta_n = \frac{1}{24} h^4 \left(f'^3 f - f'' f' f^2 - \frac{1}{3} f''' f^3 \right) = O(h^5).$$

Построим неравенство для контроля точности вычислений метода третьего порядка. Для этого рассмотрим вспомогательную схему

$$y_{n+1,1} = y_n + r_1 k_1 + r_2 k_2,$$

где k_1 и k_2 определены в (2). Потребуем, чтобы данный метод имел второй порядок точности. Сравнение рядов для $y(t_{n+1})$ и $y_{n+1,1}$ показывает, что требование второго порядка будет выполнено, если $r_1 + r_2 = 1$ и $\beta_{21}r_2 = 0,5$. Отсюда и из (3) получаем $r_1 = 0$ и $r_2 = 1$. С использованием идеи вложенных методов ошибку $\varepsilon_{n,3}$ метода третьего порядка можно оценить по формуле

$$\varepsilon_{n,3} = y_{n+1} - y_{n+1,1} = (p_1 - r_1)k_1 + (p_2 - r_2)k_2 + p_3 k_3.$$

Тогда неравенство для контроля точности вычислений имеет вид

$$\|k_1 - 2k_2 + k_3\| \leq 6\varepsilon,$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N ; ε — требуемая точность расчетов.

Построим неравенство для контроля устойчивости (2) предложенным в [8] способом. Запишем стадии k_1 , k_2 и k_3 применительно к задаче $y' = Ay$, где A — матрица с постоянными коэффициентами. Используя соотношения (3), в результате получим

$$k_1 = Xy_n, \quad k_2 = (X + 0,5X^2)y_n, \quad k_3 = [X + X^2 + X^3]y_n,$$

где $X = hA$. Найдем коэффициенты d_1 , d_2 и d_3 из условия выполнения равенства

$$d_1k_1 + d_2k_2 + d_3k_3 = X^3y_n.$$

Данное требование будет выполнено, если $d_1 = d_3 = 1$ и $d_2 = -2$. Нетрудно заметить также, что $k_2 - k_1 = X^2y_n$. Тогда согласно [8] оценку максимального собственного числа $v_{n,3} = h\lambda_{\max}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле

$$v_{n,3} = 0,5 \max_{1 \leq i \leq N} (|k_1^i - 2k_2^i + k_3^i| / |k_2^i - k_1^i|). \quad (4)$$

Функция устойчивости $Q(x)$ метода (2) с коэффициентами (3) имеет вид $Q(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$. Область устойчивости схемы (2), построенная в среде ИСМА [9, 10], приведена на рис. 1. Построены линии уровня $|Q(x)| = q$ при $q = 0,05; 0,30; 0,70; 1,00$. Интервал устойчивости численной формулы (2) приблизительно равен 2,5, поэтому для контроля ее устойчивости можно использовать неравенство $v_{n,3} \leq 2,5$.

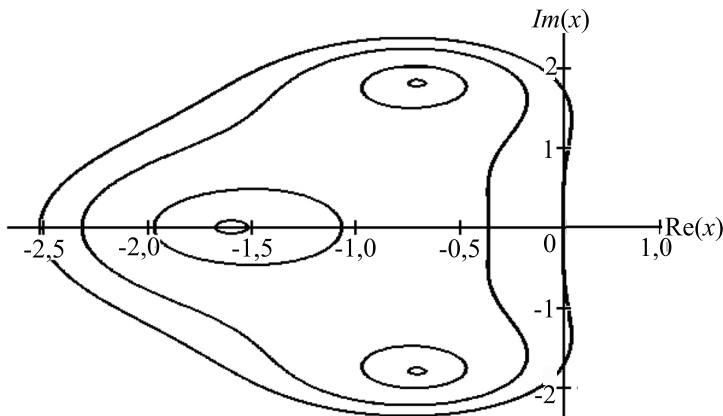


Рис. 1. Область устойчивости трехстадийного метода (2) третьего порядка точности

Полученная оценка (4) является грубой, поскольку максимальное собственное число не обязательно значительно отделено от остальных, в степенном методе применяется небольшое количество итераций, дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому в данном случае контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется следующим образом.

Новый шаг по точности h^{ac} определим по формуле $h^{ac} = q_1 h_n$, где h_n — последний успешный шаг интегрирования; q_1 задается уравнением $q_1^3 \|\varepsilon_{n,3}\| = \varepsilon$ с учетом соотношения $\varepsilon_{n,3} = O(h_n^3)$. Шаг по устойчивости h^{st} зададим формулой $h^{st} = q_2 h_n$, где q_2 определяется из уравнения $q_2 v_{n,3} = 2,5$ с учетом равенства $v_{n,3} = O(h_n)$. В результате прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max[h_n, \min(h^{ac}, h^{st})].$$

Данная формула позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Именно наличие данного участка существенно ограничивает применение явных методов при решении жестких задач.

2. Гибридная система. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad g(y, t) \leq 0, \quad (5)$$

где $g(y, t)$ — событийная функция или нелинейный предохранитель. Поскольку многие модели, представляющие интерес, линейны, будем рассматривать их как наиболее важный класс событийных функций. Заметим, что любой нелинейный предохранитель можно привести к линейному виду добавлением дополнительной фазовой переменной $x = g(y, t)$. В результате задачу (5) можно записать в виде

$$y' = f(y), \quad x' = \frac{\partial g}{\partial y} f(y) + \frac{\partial g}{\partial t}, \quad x \leq 0.$$

Здесь принимается, что событийная функция линейна. Также для упрощения рассуждений будем предполагать, что исходная задача скалярная. Однако все приведенные ниже выводы будут распространяться и на системы уравнений. Особое внимание следует уделить выбору метода интегрирования. Полностью неявный метод использовать нельзя, поскольку он требует вычисления $f(y)$ в потенциально опасной области, где модель не определена. В то же время известно, что явные методы слабоустойчивы. Поэтому будем использовать построенный выше метод (2) с контролем точности вычислений и устойчивости численной схемы. В этом случае событийная динамика описывается соотношением

$$g_{n+1} = g(y_{n+1}, t_n + h_{n+1}^p),$$

где y_{n+1} вычисляется по формуле (2). Отметим, что стадии k_2 и k_3 в формуле (2) вычисляются в потенциально опасных точках $t_n + 0,5h$ и $t_n + h$. Поэтому рассмотрим событийную функцию вида

$$g_{n+1} = g(y_n + h_{n+1}^p f_n, t_n + h_{n+1}^p),$$

т. е. на решении, полученном с использованием явного метода Эйлера. Разлагая g_{n+1} в ряд Тейлора и учитывая линейность функции $g(y, t)$, имеем

$$g_{n+1} = g_n + h_{n+1}^p \left(\frac{\partial g_n}{\partial y} f_n + \frac{\partial g_n}{\partial t} \right), \quad (6)$$

где

$$g_n = g(y_n, t_n), \quad \frac{\partial g_n}{\partial y} = \frac{\partial g(y_n, t_n)}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_n}{\partial t} = \frac{\partial g(y_n, t_n)}{\partial t}.$$

В результате получаем зависимость g_{n+1} от прогнозируемого шага h_{n+1}^p .

Теорема [5]. Выбор шага по формуле

$$h_{n+1}^p = (\gamma - 1)g_n / \left(\frac{\partial g_n}{\partial y} f_n + \frac{\partial g_n}{\partial t} \right), \quad (7)$$

где $\gamma \in [0, 1)$, обеспечивает поведение событийной динамики как устойчивой линейной системы, которая приближается к поверхности $g(y, t) = 0$. Кроме того, если $g(y_0, t_0) < 0$, то $g(y_n, t_n) \leq 0$ для всех n .

Доказательство. Подставляя (7) в (6), имеем

$$g_{n+1} = \gamma g_n.$$

Преобразовав рекуррентно данное соотношение, получим $g_{n+1} = \gamma^{n+1} g_0$. Так как $\gamma < 1$, то $g_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, из соотношения $\gamma \geq 0$ следует, что функция g_n не меняет знак. Следовательно, при $g_0 < 0$ будет выполняться неравенство $g_n \leq 0$ для всех n . Тогда событийная функция никогда не пересечет потенциально опасную область $g(y_n, t_n) = 0$. Теорема доказана.

Сформулируем алгоритм интегрирования с учетом прогноза шага через событийную функцию. Пусть решение y_n в точке t_n вычислено с шагом h_n . Кроме того, известны значения стадий k_1 , k_2 и k_3 метода (2). Тогда можно выполнить следующий шаг:

Шаг 1. Вычисляется $f_n = f(y_n, t_n)$.

Шаг 2. Вычисляются

$$g_n = g(y_n, t_n), \quad \partial g_n / \partial y = \partial g(y_n, t_n) / \partial y, \quad \partial g_n / \partial t = \partial g(y_n, t_n) / \partial t.$$

Шаг 3. Вычисляется шаг h_{n+1}^p по формуле (7).

Шаг 4. Вычисляется новый шаг h_{n+1} по формуле

$$h_{n+1} = \min(h_{n+1}^p, h_{n+1}^{pro}),$$

где h_{n+1}^{pro} задается соотношением

$$h_{n+1}^{pro} = \max[h_n, \min(h^{ac}, h^{st})].$$

Шаг 5. Выполняется следующий шаг интегрирования.

3. Результаты расчетов. С целью тестирования работы алгоритма рассмотрена типичная гибридная система двух осциллирующих масс на пружинах [11]. Система может находиться в одном из двух локальных состояний: “Раздельно” или “Вместе”. Поведение системы в каждом из состояний описывается системой дифференциально-алгебраических уравнений.

При $s < |k_1 n_1 - k_2 n_2 - x_1(k_1 - k_2)|$ имеем

$$\begin{aligned} x'_1 &= v_1, & v'_1 &= k_1(n_1 - x_1)/m_1, & a_1 &= k_1(n_1 - x_1)/m_1, \\ x'_2 &= v_2, & v'_2 &= k_2(n_2 - x_2)/m_2, & a_2 &= k_2(n_2 - x_2)/m_2, \end{aligned} \quad (8)$$

при $x_1 = x_2$ и $v_1 > v_2$

$$\begin{aligned} a_1 &= [k_1 n_1 + k_2 n_2 - x_1(k_1 + k_2)] / (m_1 + m_2), \\ v'_1 &= [k_1 n_1 + k_2 n_2 - x_1(k_1 + k_2)] / (m_1 + m_2), \\ x'_1 &= v_1, \\ a_2 &= [k_1 n_1 + k_2 n_2 - x_1(k_1 + k_2)] / (m_1 + m_2), \\ v'_2 &= [k_1 n_1 + k_2 n_2 - x_1(k_1 + k_2)] / (m_1 + m_2), \\ x'_2 &= v_2, \\ s' &= -s, \end{aligned} \quad (9)$$

где m_1 и m_2 — массы грузов; k_1 и k_2 — жесткости пружин; n_1 и n_2 — нейтральные координаты грузов; x_1 и x_2 — координаты грузов; v_1 и v_2 — скорости грузов; a_1 и a_2 — ускорения грузов; s — общая жесткость пружин в состоянии “Вместе”.

Ниже приведен текст компьютерной модели гибридной системы двух осциллирующих масс на языке LISMA [12].

```

k1=1; k2=2;
n1=1; n2=2;
m1=1; m2=1;
x1=0;
x2=3;
separate [s<abs(k1*n1-k2*n2-x1*(k1-k2))] is
s~=10;
x1'=v1;
v1'=k1*(n1-x1)/m1;
a1~=k1*(n1-x1)/m1;
x2'=v2;
v2'=k2*(n2-x2)/m2;
a2~=k2*(n2-x2)/m2;
from;
together [(x1>=x2) and (v1>=v2)] is
s=10;
v1=(m1*v1+m2*v2)/(m1+m2);
v2=v1;
v1'=(k1*n1+k2*n2-x1*(k1+k2))/(m1+m2);
a1~=(k1*n1+k2*n2-x1*(k1+k2))/(m1+m2);
x1'=v1;
v2'=(k1*n1+k2*n2-x2*(k1+k2))/(m1+m2);
a2~=(k1*n1+k2*n2-x2*(k1+k2))/(m1+m2);
x2'=v2;
s'=-s;
from separate;
    
```

Результаты анализа (8) и (9) в инструментальной среде ИСМА [9] с разработанным алгоритмом обнаружения (рис. 2,а) совпадают с результатами расчета эталонной модели в системе NuVisual [13]. Традиционный анализ системы без алгоритма обнаружения приводит к некачественным результатам (рис. 2,б).

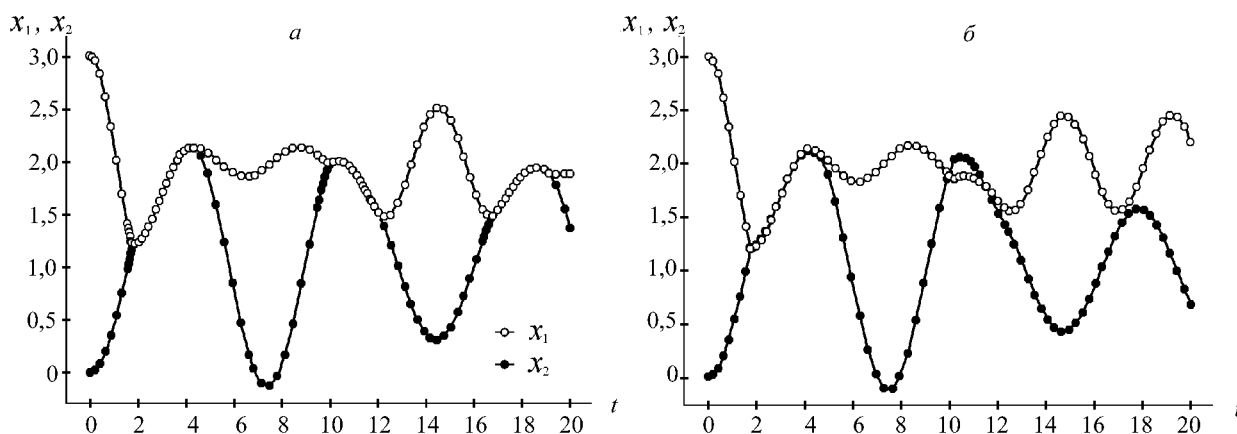


Рис. 2. Результаты компьютерного анализа гибридной системы двух масс, полученные с использованием алгоритма обнаружения (а) и без него (б)

Заключение. Использование неравенства для контроля устойчивости фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат, поскольку оценка максимального собственного числа матрицы Якоби системы (1) осуществляется через ранее вычисленные стадии и не приводит к росту числа вычислений функции f . Такая оценка получается грубой, однако применение контроля устойчивости в качестве ограничителя на рост шага позволяет избежать негативных последствий.

Предложенный способ прогноза шага через событийную функцию распространяется на все явные методы типа метода Рунге – Кутты, поскольку при выборе шага используется только явный метод Эйлера.

Список литературы

1. ESPOSITO J., KUMAR V., PAPPAS G. J. Accurate event detection for simulating hybrid systems // Proc. of the 4th Intern. workshop “Hybrid systems: computation and control (HSCC 2001)”, Rome (Italy), March 2001. Berlin: Springer-Verlag, 2001. V. 2034 P. 204–217.
2. Новиков Е. А., Шорников Ю. В. Численное моделирование гибридных систем методом Рунге – Кутты второго порядка точности // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 2. С. 98–104.
3. Новиков А. Е., Новиков Е. А., Шорников Ю. В. Моделирование гибридных систем явными методами // Вестн. КрасГАУ. Ресурсосберегающие технологии механизации сел. хоз-ва. 2009. № 5 С. 88–92.
4. ХАЙРЕР Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. М.: Мир, 1999. 685 с.
5. Новиков Е. А., Шитов Ю. А., Шокин Ю. И. Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем // Докл. СССР. 1988. Т. 301, № 6. С. 1310–1314.
6. Новиков Е. А., Шитов Ю. А., Шокин Ю. И. О классе (m, k) -методов решения жестких систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 2. С. 194–201.
7. Новиков Е. А., Шитов Ю. А. Алгоритм интегрирования жестких систем на основе (m, k) -метода второго порядка точности с численным вычислением матрицы Якоби. Красноярск, 1988. (Препр. ВЦ СО АН СССР; № 20).
8. Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. 197 с.
9. СВИДЕТЕЛЬСТВО об офиц. регистрации программы для ЭВМ № 2005610126. Инструментальные средства машинного анализа / Ю. В. Шорников, В. С. Дружинин, Н. А. Макаров, К. В. Омельченко, И. Н. Томилов. М.: Роспатент, 2005.
10. Шорников Ю. В., Новиков Е. А., Достовалов Д. Н. Анализ устойчивости явных методов Рунге – Кутты в инструментальной среде ИСМА // Пробл. информатики. 2009. № 3. С. 42–51.
11. Шорников Ю. В. Моделирование сложных динамических и гибридных систем в ИСМА // Науч. вестн. НГТУ. 2007. № 1. С. 79–88.
12. СВИДЕТЕЛЬСТВО об офиц. регистрации программы для ЭВМ № 2007611024. Программа языкового процессора с языка LISMA (Language of ISMA) / Ю. В. Шорников, И. Н. Томилов. М.: Роспатент, 2007.
13. LEE E. A., ZHENG H. Operational semantics of hybrid systems // Proc. of the 8th Intern. workshop “Hybrid systems: computation and control (HSCC 2005)”, Zurich (Switzerland), March 2005. Berlin: Springer-Verlag, 2005. V. 3414. P. 25–53.

*Новиков Антон Евгеньевич — ассист. Института фундаментальной подготовки
Сибирского федерального университета; e-mail: jibuti88@mail.ru;*

*Новиков Евгений Александрович — д-р физ.-мат. наук,
гл. науч. сотр. Института*

вычислительного моделирования СО РАН; e-mail: novikov@ict.krasn.ru;

*Шорников Юрий Владимирович — д-р техн. наук,
проф. Новосибирского государственного технического университета;
тел. (383) 346-11-00, e-mail: shornikov@asu.sc.nstu.ru, shornikov@inbox.ru;*

*Достовалов Дмитрий Николаевич — магистр техники и технологий,
e-mail: dostovalov.dmitr@mail.ru.*

Дата поступления — 24.05.10