

О ПРОЦЕДУРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗАДАННОГО ОБЪЕКТА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Г. Н. Пащенко

Институт проблем информатики и управления Министерства образования и науки
Республики Казахстан, 050010, Алма-Ата, Казахстан

УДК 681.5

Предложена процедура исследования асимптотической устойчивости интервально-заданного объекта с запаздыванием на основе интервального аналога прямого метода Ляпунова с использованием скалярно-оптимизационной функции, подхода Разумихина, аналога соотношения Басса и QR-алгоритма.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, интервально-заданный объект с запаздыванием, прямой метод Ляпунова, интервальная скалярно-оптимизационная функция.

The procedure of research of asymptotic stability of the interval-given object with delay on the basis of interval analogue of the Lyapunov's direct method with use of the scalar-optimizing function, the Razumikhin's approach, the analogue of Bass's ratio and QR-algorithm is offered.

Key words: asymptotic stability, interval-given object with delay, Lyapunov's direct method, interval scalar-optimizing function.

Введение. Огромному количеству объектов механики, медицины, биологии, иммунологии, экономики, различных технологических процессов присущи такие характерные особенности и свойства, как наличие запаздывания и параметрическая неопределенность интервального типа, создающие определенные трудности при исследовании динамических свойств. Параметрическая неопределенность характеризуется принадлежностью истинных параметров объекта некоторым интервалам с известными границами.

В настоящее время обобщения теорем о расположении корней полинома на квазиполиномы известны для всех существующих аналитических и частотных критериев: критерия Рауса — Гурвица, частотных критериев Попова, Михайлова, Найквиста.

Критерии устойчивости для систем с запаздыванием, аналогичные критерию Рауса — Гурвица [1], основаны на результатах работ [2–4].

Среди частотных методов можно выделить два основных: метод амплитудно-фазовых характеристик и метод D -разбиения. Для систем с запаздыванием частотные методы были развиты в работах [5–7]. Применительно к системам с запаздыванием метод амплитудно-фазовых характеристик наиболее полно развит в работах [6, 7]. Еще одним методом определения условий, при которых все корни характеристического квазиполинома лежат в левой полуплоскости, является метод D -разбиений [8].

Наиболее общими методами анализа рассматриваемых систем являются метод Попова [9], метод описывающей функции [10], первый метод Ляпунова, прямой метод Ляпунова, развитый в работах [11–13]. В указанных выше работах анализировались стационарные и нестационарные объекты с запаздыванием. Наиболее близкими к тематике данной работы являются работы, связанные с теорией робастной устойчивости.

Теория робастной устойчивости и робастных систем управления, созданная в работах [14–17], применяется в методах идентификации объектов в условиях неопределенности, методах адаптивного управления, а также при исследовании робастной устойчивости непрерывных систем. В работе [17] приведены достаточные условия робастной устойчивости, т. е. устойчивости семейства систем.

Известный результат решения задачи робастной устойчивости получен В. Л. Харитоновым: необходимым и достаточным условием робастной устойчивости является гурвицевость лишь четырех определенных краевых полиномов.

В работах [14–17] анализируются полиномы и квазиполиномы с неопределенными коэффициентами. Изучению интервально-заданных систем посвящены работы [18, 19], в которых рассматривается проблема анализа и синтеза робастных систем управления на основе прямого метода Ляпунова.

В данной работе исследуется асимптотическая устойчивость интервально-заданного объекта с запаздыванием на основе интервального аналога прямого метода Ляпунова с использованием скалярно-оптимизационной функции, подхода Разумихина, аналога соотношения Басса и QR-алгоритма. QR-алгоритм обладает свойством сохранять форму Хессенберга исходной матрицы, что существенно уменьшает стоимость каждой итерации. Данный алгоритм является наиболее эффективным и широко применяется для решения задач среднего размера [20, 21].

1. Постановка задачи. Рассмотрим интервально-заданный объект с запаздыванием, математическая модель которого описывается системой интервальных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t - \tau), \quad \mathbf{x}(t + \nu) = \varphi(\nu), \quad -\tau \leq \nu \leq 0, \quad (1)$$

где $t \in [t_0, \infty) \equiv J(t_0)$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояний объекта; $\mathbf{x}(t - \tau) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояний объекта, запаздывающий на время $\tau > 0$; $\tau = \text{const} < \infty$ — время запаздывания; $\varphi(\nu) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ — непрерывная ограниченная начальная векторная функция; $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $\varphi(\nu)$ на отрезке $[-\tau, 0]$ с нормой $\|\varphi(\nu)\|_\tau = \max_{-\tau \leq \nu \leq 0} \|\varphi(\nu)\|$; $\|\varphi(\nu)\| < \nu(t_0)$ ($\nu \in [t - \tau, t]$) — евклидова норма вектора $\varphi(\nu)$; $\nu(t_0)$ — некоторое число; $\mathbf{A} \in I\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}_1 \in I\mathbb{R}^{n \times n}$ — постоянные интервальные матрицы: $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ ($\mathbf{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$), $\mathbf{A}_1 = (\mathbf{a}_{(1)ij})$ ($\mathbf{a}_{(1)ij} = [\underline{a}_{(1)ij}, \bar{a}_{(1)ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$); $I\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}\}$ — множество всех вещественных интервалов; \underline{a}_{ij} , \bar{a}_{ij} — нижние и верхние границы значений элементов матрицы \mathbf{A} ; $\underline{a}_{(1)ij}$, $\bar{a}_{(1)ij}$ — нижние и верхние границы значений элементов матрицы \mathbf{A}_1 .

Далее под математической моделью вида (1) понимается семейство математических моделей стационарных объектов управления с запаздыванием:

$$\{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t - \tau) \mid (\exists \mathbf{A} \in \mathbf{A})(\exists \mathbf{A}_1 \in \mathbf{A}_1)\}.$$

Пусть существует интервальная положительно-определенная функция V , причем для всех $V \in \mathbf{V}$ выполняются условия

$$V = V(t, \mathbf{x}), \quad V : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad V(t, 0) = 0 \quad \forall t \in J, \quad V \in C(J \times \mathbb{R}^n).$$

Кроме того, $V \in C(J \times \mathbb{R}^n)$ — некоторая функция, $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, $W \in C(\mathbb{R}^+)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $W(0) = 0$. Если W

является строго монотонно возрастающей функцией, то она принадлежит классу K , выделяемому Г. Ханом [22]. Пусть существуют функции $W_1 \in K$, $W_2 \in K$, такие что для любых t, \mathbf{x} выполнены следующие условия:

- 1) $V(t, \mathbf{x}) \leq W_1(\|\mathbf{x}\|)$;
- 2) $V(t, \mathbf{x}) \geq W_2(\|\mathbf{x}\|)$, причем $W_2(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

В качестве претендента на функцию Ляпунова выберем интервальнозначную функцию

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}, \quad (2)$$

являющуюся естественным расширением квадратичной формы

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = [\underline{V}, \overline{V}],$$

где $\underline{V} = \mathbf{x}^T \underline{H} \mathbf{x}$; $\overline{V} = \mathbf{x}^T \overline{H} \mathbf{x}$; $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — вещественная симметрическая положительно-определенная интервальная матрица, т.е. $\forall H \in \mathbf{H}$ выполняется условие $H = H^T > 0$.

Аналогом производной функции Ляпунова (2) является интервальная скалярно-оптимизационная функция $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ [23]:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \sup\{\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{V}(\mathbf{x}(v)) \leq \mathbf{V}(\mathbf{x}), \quad t - \tau \leq v \leq t, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\}.$$

Таким образом, скалярно-оптимизационная функция $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ определяется наибольшим значением интервального функционала $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ на ограниченном множестве интегральных кривых, вдоль которых интервальная функция $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ убывает.

В правой части выражения для $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ присутствует фундаментальное условие $\mathbf{V}(x(v)) \leq \mathbf{V}(\mathbf{x})$, $t - \tau \leq v \leq t$ (принцип Разумихина), существенно упрощающее нахождение производной функции Ляпунова для дифференциальных матричных уравнений и играющее определяющую роль при исследовании устойчивости систем с запаздыванием.

При выбранной функции Ляпунова (2) интервально-заданный объект с запаздыванием (1) является асимптотически устойчивым, если выполняется условие

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x}(\varphi(v)) \neq 0.$$

Вычислим полную производную от интервальной функции Ляпунова (2). Тогда выражение для интервальной скалярно-оптимизационной функции принимает вид

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \sup\{\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t - \tau) \mid |x(t - \tau)| \leq |\mathbf{x}(t)|\}$$

или

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_1 S^x \mathbf{x}(t), \quad (3)$$

где S^x — знаковая диагональная матрица размерности $n \times n$; $S^x = \text{diag}(\text{sgn } x_i(t), i = \overline{1, n})$.

Оценим второе слагаемое в выражении (3) согласно [24]:

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_1 S^x \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{H} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T S^x S^x \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{H} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T E \mathbf{x}(t)$$

(E — единичная матрица). Тогда

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{A} + \mathbf{H} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{H} + E) \mathbf{x}(t).$$

Исследование свойств асимптотической устойчивости интервально-заданного объекта с запаздыванием (1) сводится к решению интервального матричного уравнения вида

$$\mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{A} + \mathbf{H} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{H} = -\mathbf{Q},$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' + E$ — интервальная положительно-определенная матрица, т.е. $Q^T = Q > 0 \forall Q \in \mathbf{Q}$.

2. Процедура исследования свойства асимптотической устойчивости интервально-заданного объекта с запаздыванием. Рассмотрим случай, когда матрицы A, A_1, Q являются точечными. В этом случае математическая модель (1) принимает вид

$$A^T H + H A + H A_1 A_1^T H = -Q. \quad (4)$$

Решение поставленной задачи состоит в построении точечной симметрической положительно-определенной матрицы $H = H^T > 0$ как решения точечного матричного уравнения Риккати (4).

Шаг 1. Для уравнения (4) по известным матрицам A, A_1, Q на основе аналога соотношения Басса [23] построим блочную матрицу Эйлера размерности $2n \times 2n$ в виде

$$F = \begin{vmatrix} A & \vdots & A_1 A_1^T \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ -Q & \vdots & A^T \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Преобразуем матрицу F к верхней треугольной форме Хессенберга \bar{F} [25].

Шаг 3. Преобразуем матрицу \bar{F} , которая имеет верхнюю форму Хессенберга, в треугольную форму Шура [25].

С использованием QR-алгоритма приведем матрицу F_{n-2} в форму Шура.

Процесс заканчивается в том случае, если все элементы некоторой матрицы $G^{(l)}$, лежащие ниже диагонали, выходящей из верхнего левого угла, оказываются нулевыми.

Обозначим матрицу $G^{(l)}$ через R (если матрица квадратная, то R будет верхней треугольной):

$$R = P^{(l)} P^{(l-1)} \dots P^{(1)} G. \quad (5)$$

Поскольку $P = P^T$, выражение (5) можно записать в виде

$$G = P^{(1)} P^{(2)} \dots P^{(l)} R.$$

Обозначим через Q матрицу вида

$$Q = P^{(1)} P^{(2)} \dots P^{(l)}.$$

Тогда имеем представление

$$G = QR,$$

которое называется QR-разложением. Далее матрицы Q и R перемножаются в обратном порядке:

$$G_r = RQ.$$

Матрица G_r ортогонально-подобна матрице G :

$$G_r = Q^T G Q.$$

Матрицу Q^T можно построить как произведение $n - 1$ вращений, т. е. представить в виде

$$Q^T = R_{n,n-1} \cdots R_{23} R_{12}.$$

Согласно теореме Шура любая необязательно квадратная матрица унитарно-эквивалентна треугольной матрице, в которой собственные значения диагональных блоков представляют собой собственные значения для этой квадратной матрицы.

Шаг 4. Строится унитарная матрица U [23], которая обеспечивает вещественную треугольную форму Шура S для матрицы F . Матрица U равна $U = \prod_k Q_k$, $S = U F U^*$, и ее можно представить в блочном виде

$$U = \begin{vmatrix} U_{11} & \vdots & U_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ U_{21} & \vdots & U_{22} \end{vmatrix},$$

где знак “*” обозначает операцию транспонирования для случая, когда элементы матрицы F вещественны; в случае комплексных элементов знак “*” обозначает транспонирование и замену этих элементов на комплексно-сопряженные.

Шаг 5. Согласно методам решения матричных уравнений [25] точечную матрицу H можно определить из выражения вида

$$H = U_{21} U_{11}^{-1}.$$

Шаг 6. Проверяется, является ли матрица положительно-определенной [26, 27]. В случае если H удовлетворяет условиям положительной определенности, рассматриваемый объект с запаздыванием является асимптотически устойчивым.

Заключение. С использованием интервального аналога прямого метода Ляпунова, скалярно-оптимизационной функции, подхода Разумихина, аналога соотношения Басса и QR-алгоритма разработана процедура исследования асимптотической устойчивости интервально-заданного объекта с запаздыванием.

Список литературы

1. ПЕРВОЗВАНСКИЙ А. А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.
2. ПОНТРЯГИН Л. С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91, № 6. С. 1279–1280.

3. ЧЕБОТАРЕВ Н. Г., МЕЙМАН Н. Н. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 26. С. 3–331.
4. КАПЫРИН В. Н. К проблеме Гурвица для трансцендентных функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1944. 257 с.
5. РЕЗВАН В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М.: Наука, 1983. 360 с.
6. SATCHE M. Discussion of a previous paper // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1949. P. 419–420.
7. ЦЫПКИН Я. З. Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7, № 2. С. 107–128.
8. ЛАВРЕНТЬЕВ М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
9. HALANAY A. Differential equations, stability, oscillation, time lags. N. Y.: Acad. Press, 1966. Chap. 4. 148 p.
10. CORDUNEANU C. Sur une equation Integrate non-lineare. Analele Stiintifice ale Universitatii Al. I. Cuza din Iasi, Sectiunea 1-a, Matematica. 1963. V. 2. 375 p.
11. КРАСОВСКИЙ Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 256 с.
12. ЦЫПКИН Я. З., ПОЛЯК Б. Т. Частотные критерии робастной устойчивости линейных дискретных систем // Автоматика (Киев). 1990. № 4. С. 3–9.
13. ASKERMAN J. Sampled data control systems-analysis and synthesis. Robust system design. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 350 p.
14. ХЬЮБЕР П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
15. ХАРИТОНОВ В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 11. С. 2086–2088.
16. ХАРИТОНОВ В. Л. Семейства устойчивых квазиполиномов // Автоматика и телемеханика. 1991. № 7. С. 75–88.
17. ХАЛАНАЙ А. Асимптотическое поведение решений некоторых интегральных уравнений // Rev. Roumaine. Math. Pures Appl. 1965. V. 10, N 6. P. 765–767.
18. ШАШИХИН В. Н. Робастная стабилизация интервальных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1992. № 6. С. 47–53.
19. ШАШИХИН В. Н. Синтез робастного управления для интервальных крупномасштабных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 164–174.
20. КУВЛАНОВСКАЯ В. Н. О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 4. С. 555–570.
21. FRANCIS J. G. F. The QR transformation. 2 // Comput. J. 1962. V. 4, N 4. P. 332–345.
22. КУНЦЕВИЧ А. М. Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова / А. М. Кунцевич, М. М. Лычак. М.: Наука, 1977. 400 с.
23. РАЗУМИХИН Б. С. Устойчивость эрeditaryных систем. М.: Наука, 1988. 122 с.
24. ЦЫКУНОВ А. М. Адаптивное управление объектами с последействием. М.: Наука, 1984. 240 с.
25. ИКРАМОВ Х. Д. Численное решение матричных уравнений: ортогональные методы. М.: Наука, 1984. 192 с.
26. СОКОЛОВА С. П., ПАЩЕНКО Г. Н. Исследование робастных свойств простейшей иммунологической модели // Тр. Междунар. науч.-практ. конф. “Проблемы вычислительной математики и информационных технологий”, Алма-Ата, 25–26 марта 1999 г. Алма-Ата: КазНУ им. аль-Фараби, 1999. С. 334–335.
27. СОКОЛОВА С. П., ПАЩЕНКО Г. Н. Пакет прикладных программ для исследования интервальной иммунологической системы // Новости науки Казахстана. 2009. № 2. С. 103–108.

*Пащенко Галина Николаевна – канд. техн. наук, ст. науч. сотр.
Института проблем информатики и управления
Министерства образования и науки Республики Казахстан;
e-mail: galina_pashenko@mail.ru*

Дата поступления — 25.11.2009