РАЗЛОЖЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

Т. Т. Ч. Буй, В. Г. Спицын

Институт кибернетики Национального исследовательского
Томского политехнического университета, 634034, Томск, Россия

УДК 004.932

Рассматриваются вопросы двумерного дискретного вейвлет-преобразования и быстрого преобразования Хаара для разложения изображений. Представлены формулы для разложения изображений.

Ключевые слова: обработка изображения, двумерное дискретное вейвлет-преобразование, быстрое преобразование Хаара.

It is considered questions of two-dimensional discrete wavelet transform and fast Haar wavelet transform for expansion of images. Formulas for expansion of images are presented.

Key words: image processing, two-dimensional discrete wavelet transform, fast Haar wavelet transform.

Введение. Интерес к цифровым системам обработки изображений обусловлен простотой их использования и экономической эффективностью. Недостатком этих систем является низкое пространственное разрешение по сравнению с традиционными пленочными фотоаппаратами. При любом способе обработки изображения главной задачей является нахождение эффективного представления, которое позволяет представить изображение в компактной форме. В современной теории и практике сигналов, в частности при спектральном анализе, используются сигналы специального вида — вейвлеты [1, 2].

В работах [3–5] представлены теория и практические применения различных вейвлетов. Практически важные вейвлеты традиционно определяются как функции одной вещественной переменной с вещественными значениями. В зависимости от математической модели (структуры области определения, структуры области возможных значений и вида преобразований) различаются дискретные и непрерывные вейвлеты. Поскольку разложение сигналов в базисе вейвлетов осуществляется с использованием арифметики с плавающей точкой, возникают ошибки, величина которых зависит от степени приближения сигнала.

Двумерное дискретное вейвлет-преобразование — один из наиболее важных инструментов. Двумерное вейвлет-преобразование основано на одномерном вейвлет-преобразовании, которое не зависит от числа столбцов и строк изображения. Поэтому предпочтение отдается горизонтальному и вертикальному направлениям.

Вейвлеты Хаара [6] представляют собой кусочно-постоянные функции, заданные на конечных интервалах различных масштабов и принимающие два значения {-1; +1}. Вейвлет Хаара единичного масштаба и нулевого смещения (материнский вейвлет Хаара) — функция, равная $+1$ на интервале $[0;\ 1/2)$ и -1 на интервале $[1/2;\ 1)$. Вейвлеты Хаара хорошо зарекомендовали себя в практических задачах обработки дискретных сигналов, таких как массивы отсчетов аудиосигналов и цифровые фотографии. Характерная особенность преобразования Хаара заключается в том, что оно является разделимым и легко вычисляется.

1. Преобразование и быстрое преобразование Хаара. Преобразование Хаара (ПХ) является одним из простейших базисных вейвлет-преобразований. Пусть имеется одномерный дискретный сигнал $f = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N)$. ПХ разлагает каждый сигнал на два компонента, один из которых называется средним, а другой известен как разность [6]. Первое среднее значение подсигнала $a^1 = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{N/2})$ на первом уровне для одного сигнала длиной N $(f = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N))$ вычисляется по формуле [6]

$$a_n = \frac{f_{2n-1} + f_{2n}}{\sqrt{2}}, \quad n = 1, 2, 3,\ \ldots, N/2,$$

и первый детализирующий подсигнал $d^1 = (d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{N/2})$ на таком же уровне представляется как

$$d_n = \frac{f_{2n-1} - f_{2n}}{\sqrt{2}}, \quad n = 1, 2, 3,\ \ldots, N/2.$$

Эти значения формируют два новых сигнала: $a = \{a_n\}, n \in \mathbb{Z}$ и $d = \{d_n\}, n \in \mathbb{Z}$, один из которых является огрубленной версией исходного сигнала (каждой паре элементов f соответствует их среднее арифметическое), а другой содержит информацию (будем называть ее детализирующей), необходимую для восстановления исходного сигнала. Действительно:

$$f_{2n-1} = a_n + d_n, \quad f_{2n} = a_n - d_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

К сигналу a можно применить аналогичную операцию и также получить два сигнала, один из которых является огрубленной версией a, а другой содержит детализирующую информацию, необходимую для восстановления a.

Для того чтобы определить принцип работы вейвлет-преобразования, рассмотрим следующий пример. Предположим, что

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

В случае применения одномерного ПХ вдоль первой строки коэффициенты аппроксимации следующие: $(1+2)/\sqrt{2}$, $(3+4)/\sqrt{2}$, коэффициенты различия — $(1-2)/\sqrt{2}$, $(3-4)/\sqrt{2}$. То же преобразование применяется к другим строкам I. Располагая коэффициенты аппроксимации каждой строки в первых двух столбцах и соответствующие коэффициенты различия в последних двух столбцах, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 7 & \vdots & -1 & -1 \\ 9 & 13 & \vdots & -1 & -1 \\ 17 & 3 & \vdots & -1 & -1 \\ 7 & 11 & \vdots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(коэффициенты аппроксимации и коэффициенты различия в каждой строке отделены точками). Применяя на следующем шаге одномерное ПХ к столбцу результирующей матрицы, находим результирующую матрицу на первом уровне:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 7 & \vdots & -1 & -1 \\ 9 & 13 & \vdots & -1 & -1 \\ 17 & 3 & \vdots & -1 & -1 \\ 7 & 11 & \vdots & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 12 & 20 & \vdots & -2 & -2 \\ 24 & 14 & \vdots & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ -6 & -6 & \vdots & 0 & 0 \\ 10 & -8 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 24 & 14 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая часть одномерного ПХ, показанного в примере, имеет размерность (число строк/2) $\times$ (число столбцов/2), эти области обозначены A, H, V, D соответственно. Область A (область приближения) включает информацию о глобальных свойствах проанализированного изображения. Удаление спектральных коэффициентов от этой области приводит к наибольшему искажению исходного изображения. Область H (горизонтальная область) включает информацию о вертикальных строках, спрятанных (скрытых) в изображении. Удаление спектральных коэффициентов от этой области исключает горизонтальные детали из исходного изображения. Область V (вертикальная область) содержит информацию о горизонтальных строках, спрятанных (скрытых) в изображении. Удаление спектральных коэффициентов от этой области приводит к исчезновению вертикальных деталей из исходного изображения. Область D (диагональная область) включает информацию о диагональных деталях, скрытых в изображении. Удаление спектральных коэффициентов от этой области приводит к минимальному искажению исходного изображения. Таким образом, ПХ применимо в случае, когда матрица изображения содержит число строк и столбцов, кратное двум.

Быстрое преобразование Хаара (БПХ) включает сложение, вычитание и деление на два, вследствие чего оно становится эффективнее и сводит задачу вычисления к сравнению с ПХ. Для разложения изображения одномерное БПХ сначала применяется к каждой строке пиксельных значений ввода отображающей матрицы, а затем к каждому столбцу. Результирующими значениями являются все детализирующие коэффициенты, за исключением отдельного общего среднего коэффициента.

2. Двумерное вейвлет-преобразование. Двумерное вейвлет-преобразование представляет собой поочередное одномерное вейвлет-преобразование строк и столбцов этой матрицы. Сначала выполняются одномерные вейвлет-преобразования каждой строки, после чего преобразованная строка записывается на прежнее место. Элементы нумеруются способом, указанным выше. Далее вейвлет-преобразования применяются ко всем столбцам. В результате изображение разбивается на четыре равные части (рис. 1). На рис. 1 показаны стандартные обозначения квадрантов преобразованного изображения: LL, LH, HL, HH. Квадрант LL соответствует низкочастотным вейвлет-коэффициентам, HH — высокочастотным [7].

Если не оговорено иное, под N-кратным двумерным вейвлет-преобразованием понимается применение N раз двумерного вейвлет-преобразования, причем очередное двумерное

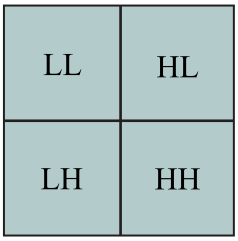

Рис. 1. Однократное применение двумерного вейвлет-преобразования к квадратному изображению

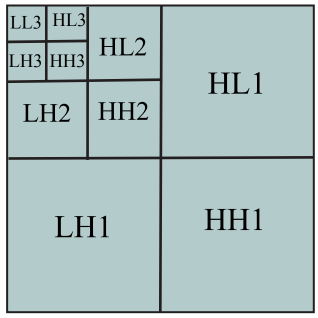

Рис. 2. Трехкратное применение двумерного вейвлет-преобразования

вейвлет-преобразование применяется к младшей четверти матрицы (квадрант LL на рис. 1). Полученное N-кратное преобразование показано на рис. 2 ($N = 3$). На рис. 2 приведены стандартные обозначения квадрантов изображения. Квадранты N-кратного двумерного вейвлет-преобразования обозначаются аналогично.

Обратное двумерное вейвлет-преобразование рекурсивно восстанавливает младший квадрант. В случае, представленном на рис. 2, для получения (восстановления) нового квадранта LL2 используются квадранты LL3, LH3, HL3 и HH3. Далее, для восстановления квадранта LL1 используются квадранты LL2, LH2, HL2, HH2 и т. д. Аналогично выполняется N-кратное обратное вейвлет-преобразование.

Заметим, что указанное преобразование является иерархическим. Иными словами, если при использовании обратного вейвлет-преобразования вычисляются не все уровни, а меньшее их количество, то в квадранте LL образуется уменьшенная копия изображения (рис. 3). Если обратное вейвлет-преобразование не используется, то младший квадрант также является уменьшенной копией изображения. В силу этого свойства обратное вейвлет-преобразование позволяет вырезать фрагменты изображений различного масштаба. Однако заметим, что, во-первых, доступные масштабы определяются количеством уровней вейвлет-преобразования, и, во-вторых, масштабы не произвольны, а увеличены в два раза.

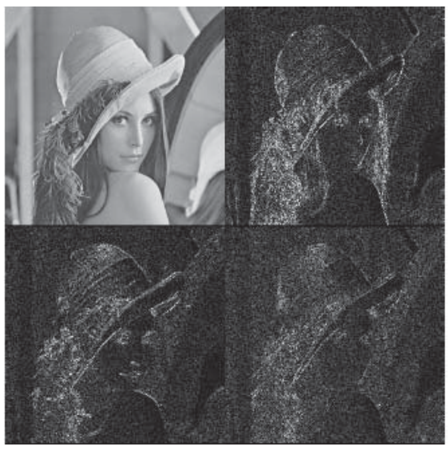

Рис. 3. Однократное применение двумерного вейвлет-преобразования или применение $(N-1)$-кратного обратного вейвлет-преобразования к изображению, полученному N-кратным вейвлет-преобразованием

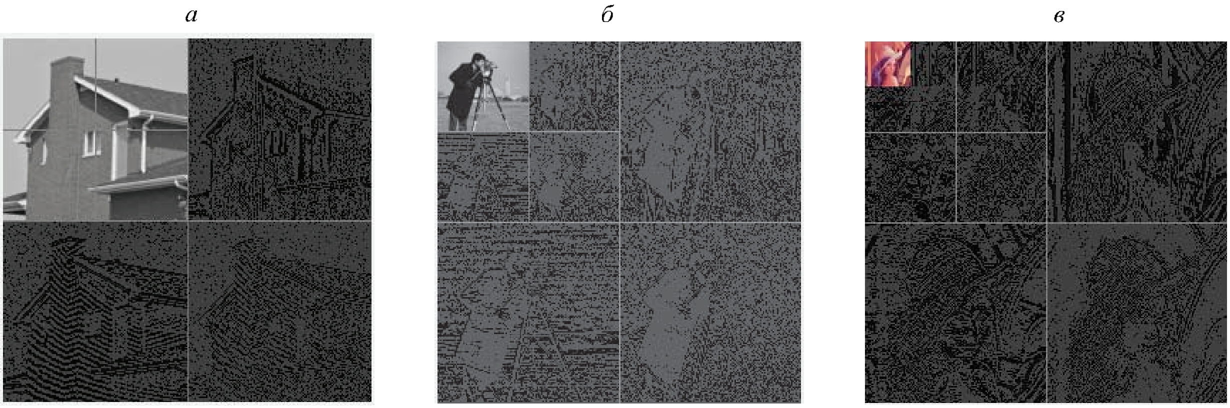

Рис. 4. Вейвлет-преобразование изображения с использованием быстрого преобразования Хаара первого (*а*), второго (*б*) и третьего (*в*) порядков

3. Результаты быстрого преобразования Хаара. В результате исследования средствами C# создано приложение, реализующее быстрое преобразование Хаара. Это приложение способно обрабатывать файлы формата *.gif размером 256×256 пикселей. Изображения, представленные на рис. 4, получены с использованием быстрого преобразования Хаара в качестве функций (базисных функций).

В действительности число возможных разложений настолько велико, что не имеет смысла и даже невозможно перебирать их или исследовать каждое из них в отдельности. Поэтому желательно иметь эффективный алгоритм нахождения разложений, оптимальных по отношению к некоторым критериям, связанным с конкретными приложениями.

Заключение. Для разложения цифровых изображений использованы двумерное дискретное вейвлет-преобразование и быстрое преобразование Хаара. Предложены и апробированы алгоритмы вейвлет-преобразования, эффективность которых подтверждена результатами их моделирования.

Рассмотренное преобразование может быть использовано в задачах цифровой обработки сигналов, а также в системах высокоскоростной обработки данных и мультимедийных системах.

Список литературы

1. Gonzalez R. C. Digital image processing / R. C. Gonzalez, R. E. Woods. Boston: Addison-Wesley, 2001. 813 p.
2. Pratt W. K. Digital image processing. N. Y.: Wiley Intersci., 2001. 738 p.
3. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
4. Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразования. Новосибирск: НГТУ, 2003. 104 с.
5. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. N. Y.: Acad. Press, 1999. 851 p.
6. Anuj B., Rashid A. Image compression using modified fast Haar wavelet transform // World Appl. Sci. J. 2009. V. 7, N 5. P. 647–653.
7. Шокуров А. В., Михалев А. В. Оптимальное использование вейвлет-компонент // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 4. С. 171–172.

Буй Тхи Тху Чанг — асп. Института кибернетики ТПУ;
тел.(3822) 41-89-12; e-mail: trangbt.084@gmail.com;
Спицын Владимир Григорьевич — д-р техн. наук,
проф. Института кибернетики ТПУ; тел. (3822) 41-89-12; e-mail: spvg@tpu.ru

Дата поступления — 25.02.11 г.