АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ ПО ОЦЕНКАМ ИХ ФАЗОЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

А. И. Кочегуров

Институт кибернетики Национального исследовательского
Томского политехнического университета, 634034, Томск, Россия

УДК 621.391

Проведен анализ фазочастотных алгоритмов с целью исследования точности измерения временного положения сложных сигналов. Приведены теоретические оценки дисперсии временного положения для случаев сильного и слабого сигнала. Рассмотрены ситуации, когда выборка значений фазочастотной характеристики смеси сигнала с помехой является коррелированной и некоррелированной. Показано, что в дисперсионных средах оптимальные оценки временного положения сложных сигналов находятся путем оптимальной обработки функций группового запаздывания смеси.

Ключевые слова: временное положение сигналов, фазочастотная характеристика, функция групповой задержки.

The analysis of the phase-frequency algorithms for the purpose of accuracy identifying the time phase of complex signals was carried out. The theoretical evaluations of dispersion of time phase for weak and strong signals were introduced. The situations were considered when the samples of phase-frequency characteristics of signal-to-interference-plus-noise are correlated and non-correlated. In the article was shown that in the dispersion environments the optimum evaluations of time phase of complex signals can be determined by processing the functions of mixture group delay.

Key words: time position of signals, phase-frequency characteristic, function of group delay.

Обычное решение задачи определения временного положения сигнала сводится к оценке одного из неэнергетических параметров нормального случайного процесса и не учитывает специфику временного параметра. В то же время представление временного положения сигнала в экспоненциальном базисе полностью определяется его фазочастотной характеристикой (ФЧХ). Поэтому оптимальный метод определения временного положения сигнала заключается в оптимальной обработке его ФЧХ [1].

Пусть задана аддитивная смесь детерминированного сигнала $s(t)$ и гауссовой помехи $n\,(t)$:

$$x(t;\tau) = s(t-\tau) + n(t)$$

(τ — временное положение сигнала).

Требуется провести анализ фазочастотных алгоритмов с целью исследования точности измерения временного положения сложных сигналов при различных предположениях о свойствах ФЧХ и различных уровнях шума.

Рассмотрим случай сильного сигнала, когда значения в выборке ФЧХ смеси сигнала с помехой являются коррелированными. В [2] показано, что в данном случае оптимальная оценка временного положения имеет вид

$$\hat{\tau}_{opt} = \frac{\int\limits_{\Omega} V(\omega)\left[\varphi_x(\omega) - \varphi_s(\omega)\right] d\omega}{\int\limits_{\Omega} V(\omega) d\omega}, \tag{1}$$

где

$$V(\omega) = \int\limits_{\Omega} R^{-1}(\omega, \omega')\omega' d\omega',$$

$R(\omega, \omega')$ — положительно-определенная матрица, составленная из элементов межчастотной корреляционной функции ФЧХ смеси; Ω — анализируемая полоса частот; $\varphi_x(\omega)$, $\varphi_s(\omega)$ — ФЧХ смеси и сигнала соответственно.

Дисперсия оценки (1) равна

$$D(\hat{\tau}_{opt}) = \left(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} R^{-1}(\omega, \omega')\omega\omega' d\omega d\omega'\right)^{-1}.$$

Рассмотрим случай сильного сигнала, когда значения в выборке ФЧХ смеси сигнала с помехой являются некоррелированными. В частном случае, когда значения ФЧХ статистически независимы, выражение (1) принимает вид [2]

$$\hat{\tau}_{opt} = \frac{\int\limits_{\Omega} \delta^2(\omega)\left[\varphi_x(\omega) - \varphi_s(\omega)\right] d\omega}{\int\limits_{\Omega} \delta^2(\omega)\omega^2 \, d\omega} \tag{2}$$

или в дискретной форме

$$\hat{\tau}_{opt} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \delta^2(\omega_k)\omega_k \Delta\varphi(\omega_k)}{\sum\limits_{k=1}^{m} \delta^2(\omega_k)\omega_k^2}, \tag{3}$$

где $\delta(\omega_k)$ — отношение сигнала к шуму на частоте ω_k; $\Delta\varphi(\omega_k) = \varphi_x(\omega_k) - \varphi_s(\omega_k)$; $m = \Omega/(\Delta\omega)$; $\Delta\omega$ — шаг дискретизации по частоте. При этом дисперсия оценки (3) равна

$$D(\hat{\tau}_{opt}) = \left(\sum_{k=1}^{m} \delta^2(\omega_k)\omega_k^2\right)^{-1}. \tag{4}$$

Сравнение (1) и (2) показывает, что при измерении временного положения сильного сигнала наличие корреляции значений ФЧХ в выборке смеси приводит лишь к изменению весовых коэффициентов в процедурах обработки ФЧХ. При этом в обоих случаях обеспечиваются предельно достижимые точности получаемых оценок.

Рассмотрим случай слабого сигнала, когда значения в выборке ФЧХ смеси сигнала с помехой являются некоррелированными. Для случая слабого сигнала найти оптимальную оценку временного положения сигнала удается только при некоррелированных значениях ФЧХ. Такая оценка получена в [3] как временное положение максимума функции правдоподобия вида

$$\ln\Gamma(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \delta(\omega_k)\cos\left(\Delta\varphi(\omega_k) + \omega_k\tau\right). \tag{5}$$

Дисперсия оценки составляет

$$D(\hat{\tau}_{opt}) \approx \frac{4}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{m} \delta^2(\omega_k)\omega_k^2\right)^{-1}$$

или в общепринятых обозначениях

$$D(\hat{\tau}_{opt}) \approx \frac{4}{\pi q_\Sigma^2 \sigma^2_{\ \omega}}, \tag{6}$$

где $q_\Sigma^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \delta^2(\omega_k)$ — суммарное отношение сигнал/помеха; σ_ω — среднеквадратичная ширина спектра сигнала.

Из выражения (6) следует, что в случае слабого сигнала, как и предполагалось, дисперсия оценки возрастает, однако нетрудно показать, что данная оценка является оптимальной и в случае сильного сигнала, но не наоборот [3]. Выполним более подробный анализ функции правдоподобия (5) и оценим возможность практической реализации данного алгоритма. Запишем выражение обратного дискретного преобразования Фурье [4]

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi jkn}{N}}$$

и преобразуем его к следующему виду:

$$\begin{aligned}
X(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|\, \mathrm{e}^{-j\varphi(k)} \left[\cos\varphi\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j\sin\varphi\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)| \left[\cos\varphi(k) - j\sin\varphi(k)\right] \left[\cos\varphi\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j\sin\varphi\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)| \left\{\cos\varphi(k)\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \sin\varphi(k)\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - \right. \\
&\left. -j\left[\sin\varphi(k)\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - \cos\varphi(k)\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Так как мнимая часть в (7) обращается в нуль [4], оставим только реальную часть и проведем следующие преобразования:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)| \left[\cos\varphi(k)\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \sin\varphi(k)\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)| \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(\varphi(k) - \frac{2\pi kn}{N}\right) + \cos\left(\varphi(k) + \frac{2\pi kn}{N}\right) +\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \cos\left(\varphi(k) - \frac{2\pi kn}{N}\right) - \cos\left(\varphi(k) + \frac{2\pi kn}{N}\right)\right)\right]\right\} = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)| \cos\left(\varphi(k) - \frac{2\pi kn}{N}\right). \quad (8)$$

Выражение (8) сравним с видом функции правдоподобия (5). Поскольку $\omega_k = 2\pi kn/N$, различия между (8) и (5) наблюдаются только в весовых множителях. Нетрудно показать, что выражение для функции правдоподобия (5) является обратным дискретным преобразованием Фурье результата фильтрации исходного процесса цифровым фильтром с частотной характеристикой вида

$$H(\omega_k) = \frac{\delta(\omega_k)}{|X(k)|}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Определим влияние фильтра. Прежде всего отметим, что данный фильтр сначала выравнивает амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) исследуемого колебания, а затем взвешивает его с помощью заданных весовых коэффициентов. При этом фазовые соотношения в исходной записи не меняются. Как известно, выравнивание АЧХ при линейной ФЧХ приводит к сжатию сигнала [5], следовательно, появляется возможность увеличить точность измерения временного положения сигнала. Кроме того, при реализации такого фильтра с помощью задания весовых коэффициентов можно управлять его частотной характеристикой, тем самым усиливая или ослабляя различные частотные составляющие сигнала.

На практике получить оптимальные оценки временного положения сигнала путем максимизации выражения (5) часто не удается, так как в анализируемой полосе частот Ω распределение отношения сигнал/помеха, формирующее весовые коэффициенты в (5), как правило, неизвестно. Поэтому можно выполнить только некоторые квазиоптимальные оценки, например с помощью фазочастотных алгоритмов с равновесной обработкой. Для таких алгоритмов функция правдоподобия имеет вид [3]

$$\ln\Gamma(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \cos\left(\Delta\varphi(\omega_k) + \omega_k\tau\right).$$

При этом дисперсия оценки временного положения слабого сигнала, определяемой фазочастотным алгоритмом с равновесной обработкой, составляет

$$D(\hat{\tau}) \approx 4\sum_{k=1}^{m} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^2 \left(\pi q_{\Sigma}^2 \sigma_{\omega}^2\right)^{-1}.$$

Как и следовало ожидать, переход к равновесной обработке снижает точность получаемых оценок. Однако при используемом на практике числе частотных компонент m это снижение не является очень значительным. Так, при m=1 максимальные потери составляют $\eta_{\max}$=1,58, а при m=20 соответственно $\eta_{\max}$=1,754. В то же время преимущество фазочастотных алгоритмов с равновесной обработкой (6) заключается в том, что они позволяют получать оценки временного положения сигналов с приемлемой точностью, когда информация об АЧХ сигнала, а следовательно, и о его форме частично или полностью отсутствует.

При распространении сложного сигнала в дисперсионных средах его форма изменяется, а временное положение определяется его групповым запаздыванием. Поэтому для построения оптимальных оценок временного положения сигналов в дисперсионных средах необходимо реализовать процедуру, когда оптимальной обработке подвергаются не ФЧХ сигналов, а функции их группового запаздывания (ФГЗ). Исследуем потенциальную точность измерения временного положения сложных сигналов по функциям их группового запаздывания. При этом под функцией группового запаздывания будем понимать функцию, значения которой определяются первой производной фазового спектра (ФЧХ):

$$t_{\text{гр}}^{s}(\omega) = -\frac{d\varphi_s(\omega)}{d\omega},$$

где $\varphi_s(\omega)$ — ФЧХ сигнала.

В случае сильного сигнала значения в выборке ФГЗ смеси являются коррелированными. Для этих условий показано, что оптимальная процедура оценки временного положения имеет вид [6]

$$\widehat{\tau}_{opt} = \frac{\int\limits_{\Omega} V(\omega)\left[t_{\text{гр}}^{x}(\omega) - t_{\text{гр}}^{s}(\omega)\right] d\omega}{\int\limits_{\Omega} V(\omega) d\omega}, \tag{9}$$

где $V(\omega) = \int\limits_{\Omega} R_t^{-1}(\omega, \omega^1) d\omega^1; R_t(\omega_i, \omega_j)$ — элемент межчастотной корреляционной функции ФГЗ смеси сигнала с помехой; $t_{\text{гр}}^{x}(\omega)$ — ФГЗ смеси сигнала с помехой; $t_{\text{гр}}^{s}(\omega)$ — ФГЗ сигнала. В этом случае дисперсию оценки временного положения можно определить по формуле [6]

$$D[\tilde{\tau}_{opt}] = \left(\iint\limits_{\Omega} R_t^{-1}(\omega, \omega^1) d\omega d\omega^1\right)^{-1}. \tag{10}$$

Рассмотрим случай сильного сигнала, когда значения в выборке ФГЗ смеси сигнала с помехой являются некоррелированными. Для частного случая, когда элементы в выборке ФГЗ смеси являются независимыми [7], имеем

$$\widehat{\tau}_{opt} = \frac{\int\limits_{\Omega} \frac{1}{\sigma_{t_{\text{гр}}^{x}}^{2}(\omega)}\left[t_{\text{гр}}^{x}(\omega) - t_{\text{гр}}^{s}(\omega)\right] d\omega}{\int\limits_{\Omega} \frac{d\omega}{\sigma_{t_{\text{гр}}^{x}}^{2}(\omega)}}, \tag{11}$$

где $\sigma_{t_{\text{гр}}^{x}}^{2}$ — дисперсия групповой задержки смеси.

В [7] показано, что дисперсия групповой задержки смеси обратно пропорциональна величине изменения скорости отношения сигнал/помеха, что позволяет записать (11) в виде

$$\hat{\tau}_{opt} = \frac{\int\limits_{\Omega} \gamma^2(\omega)[t^x_{\text{гр}}(\omega) - t^s_{\text{гр}}(\omega)]d\omega}{\int\limits_{\Omega} \gamma^2(\omega)d\omega}; \tag{12}$$

$$D[\hat{\tau}_{opt}] = \left(\int\limits_{\Omega} \gamma^2(\omega)d\omega\right)^{-1}, \tag{13}$$

где $\gamma(\omega)$ — отношение сигнал/помеха на частоте ω в области производных.

Из результатов сравнения выражений (9) и (12) следует, что наличие корреляции в выборке ФГЗ смеси сигнала с помехой не приводит к изменению структуры алгоритма измерения временного положения. Различаются только весовые коэффициенты, которые, однако, оказывают существенное влияние на точность получаемых оценок (10) и (13).

Рассмотрим случай слабого сигнала, когда значения в выборке ФГЗ смеси сигнала с помехой являются некоррелированными. В случае слабого сигнала удается построить оптимальные оценки его временного положения только для независимых значений в выборке ФГЗ смеси. Такие оценки получены в [8] и определяются путем максимизации функционала:

$$\ln I(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \gamma(\omega_k) \cos\left[\omega_k(\Delta t_{\text{гр}}(\omega_k) - \tau)\right]. \tag{14}$$

Здесь $\Delta t_{\text{гр}}(\omega_k) = t^x_{\text{гр}}(\omega_k) - t^s_{\text{гр}}(\omega_k)$; $\gamma(\omega_k)$ — отношение сигнал/помеха в области производных на частоте ω_k; m — число анализируемых частотных компонент.

Если в выражении (13) принять, что сигнал сильный, т. е. $\gamma(\omega_k) \gg 1$ для любого $k = \overline{1,m}$, то нетрудно показать, что максимизация функционала (14) позволяет получить оценку временного положения для случая сильного сигнала в виде [8]

$$\hat{\tau} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma^2(\omega_k)\omega_k^2 \Delta t_{\text{гр}}(\omega_k)}{\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma^2(\omega_k)\omega_k^2}. \tag{15}$$

Выражение (15) отличается от оптимальной процедуры определения временного положения сильного сигнала (12) весовыми коэффициентами. Однако, если при выводе (14) вместо перехода $\varphi_x(\omega_k) = \omega_k t^x_{\text{гр}}(\omega_k)$ [8] используется переход $\varphi_x(\omega_k) = \Delta\omega t^x_{\text{гр}}(\omega_k)$, то выражение (15) преобразуется к виду

$$\hat{\tau}_{opt} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma^2(\omega_k) \Delta t_{\text{гр}}(\omega_k)}{\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma^2(\omega_k)}$$

и совпадает с оптимальной оценкой временного положения сильного сигнала. В этом случае функция правдоподобия (13) для слабого сигнала является некоторой оценкой его огибающей [9] и принимает вид

$$\ln I(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \gamma(\omega_k) \cos\left[\Delta\omega(\Delta t_{\text{гр}}(\omega_k) - \tau)\right]. \tag{16}$$

Тогда измерение временного положения максимума функции правдоподобия (16) определяет оптимальную процедуру для оценки временного положения как сильного, так и слабого сигналов при их распространении в среде с дисперсией и поглощением. Сравнение (4) и (13) показывает, что в этом случае точность получаемых оценок временного положения сигнала снижается, однако остается предельно достижимой при распространении сложных сигналов в дисперсионных средах.

Таким образом, проведенный анализ показал, что применение фазочастотных алгоритмов для измерения временного положения сложных сигналов позволяет обеспечить приемлемую точность получаемых оценок даже в условиях отсутствия информации о форме принимаемого сигнала и уровне помех. Это особенно важно при решении практических задач гидролокации, сейсмологии, сейсмической разведки и т. д., когда полезные сигналы распространяются в средах с дисперсией и поглощением и регистрируются на фоне интенсивных помех.

Список литературы

1. Худяков Г. И. О потенциальной точности определения временного положения флюктуирующих сигналов // Вопросы радиоэлектроники. Общие вопросы радиоэлектроники. 1984. Вып. 8. С. 55–60.

2. Иванченков В. П., Кочегуров А. И., Орлов О. В. О точности определения временного положения сейсмических сигналов по оценкам их фазочастотных характеристик // Изв. Том. политехн. ун-та. 2009. Т. 315, № 5. С. 49–53.

3. Иванченков В. П., Кочегуров А. И. Фазочастотные алгоритмы оценки местоположения пространственно-временных сигналов в условиях априорной неопределенности // Изв. вузов. Физика. 1995. Т. 38, № 9. С. 100–104.

4. Сиберт У. М. Цепи, сигналы, системы: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. Ч. 2. 360 с.

5. Тяпкин Ю. К. Оптимальная линейно-фазовая фильтрация сейсмических записей // Геология и геофизика. 1984. № 3. С. 99–105.

6. Кочегуров А. И., Быстров В. Н. Определение временного положения сложных сигналов по коррелированным выборкам ФГЗ смеси // Тр. 8-й науч. сессии, посвящ. Дню радио, Москва, 14–15 мая 2003 г. М.: Редакция журн. "Радиотехника", 2003. Т. 1. С. 39–40.

7. Кочегуров А. И. Определение временного положения сейсмических сигналов по функциям их групповой задержки // Изв. Том. политехн. ун-та. 2009. Т. 315, № 5. С. 45–48.

8. Кочегуров А. И., Быстров В. Н. Определение временного положения сложных сигналов в среде с дисперсией и поглощением // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2002. Т. 45, № 3/4. С. 50–54.

9. Быстров В. Н., Кочегуров А. И. Выделение огибающей широкополосных сигналов по функциям их группового запаздывания // Современные проблемы радиоэлектроники: Сб. науч. тр. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2002. С. 10–11.

Кочегуров Александр Иванович — канд. техн. наук, доц.,
зам. директора Института кибернетики ТПУ;
тел. (3822) 42-04-63; e-mail: kai@cc.tpu.edu.ru

Дата поступления — 21.02.11 г.