РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРАНСПОРТНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ

Г. А. Жусупбаева

Кыргызский национальный аграрный университет им. К. И. Скрябина,
720005, Бишкек, Кыргызская Республика

УДК 519.8

Обоснована применимость метода последовательных расчетов к однопродуктовой задаче размещения с нелинейными функциями транспортных и производственных затрат.

Ключевые слова: задача размещения, многоэкстремальная задача, метод последовательных расчетов, достаточное условие применимости метода, допустимый план задачи, оптимальный план задачи, множество вариантов.

In this article the applicability of the method of consistent calculations to single-component task of accommodation with nonlinear functions of transportations and manufacturing expenses is motivated.

Key words: distribution problem, multiextremal problem, method of successive calculation, feasible plan of the task, optimal schedule of the task, set of variants, sufficient condition of applicability of the method.

Рассматривается следующая экстремальная задача: найти минимум

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i(x_i) \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

где $x = |x_{ij}|_{m,n}$; $\varphi_{ij}(x_{ij})$ $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ — выпуклая непрерывная возрастающая функция $x_{ij} \in [0, b_j]$ $(j = 1, 2, ..., n)$; $\bar{\psi}_i(x_i)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ — выпуклая непрерывная на всей числовой оси функция, имеющая разрыв в нуле, $x_i \in \left(0, \sum_{j=1}^{n} b_j\right]$:

$$\bar{\psi}_i(x_i) = \begin{cases} \psi_i(x_i) + T_i, & x_i > 0, \\ 0, & x_i = 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., m,$$

b_j, T_i — известные постоянные.

Предполагается, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Экономическая постановка задачи (1), (2) аналогична приведенной в [1, 2].

Исследованию задачи (1), (2) посвящены работы [3–6], в которых рассматривались различные случаи.

Вследствие нелинейности $\varphi_{ij}(x_{ij})$ $(i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n)$ и разрывности функции $\bar{\psi}_i(x_i)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ в нуле рассматриваемая задача имеет большое количество экстремумов, поэтому для ее решения требуется применение специальных методов и алгоритмов.

Для решения задачи (1), (2) используем метод последовательных расчетов [6]. Введем совокупность множеств $\omega \subset I = \{i = 1, 2, ..., m\}$, для каждого подмножества $\omega \in I$ построим функционал

$$f(\omega) = \sum_{i\in\omega} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i\in\omega} \psi_i(x_i) + \sum_{i\in\omega} T_i. \tag{3}$$

Наименьшее значение функционала $f(\omega)$ при условиях

$$\sum_{i\in\omega} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad i \in \omega, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i \in \omega, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

обозначим через $p(\omega)$.

Достаточным условием применимости метода последовательных расчетов является требование выполнения неравенства

$$s(\omega_1, \omega_2) = p(\omega_1) + p(\omega_2) - p(\alpha) - p(\beta) \leq 0, \tag{5}$$

где ω_1, ω_2 — произвольные подмножества множества I, такие что $\alpha = \omega_1 \cup \omega_2,\ \beta = \omega_1 \cap \omega_2$.

Исходную задачу можно заменить следующей эквивалентной задачей: среди всех множеств $\omega \subset I$ требуется найти множество ω^*, такое что $p(\omega^*) \leq p(\omega)$ для всех $\omega \subset I$, т. е. требуется определить функцию

$$p(\omega^*) = \min_{\omega\subset I} \{p(\omega)\}.$$

Если в качестве метода решения использовать простой перебор, то число возможных вариантов $\omega \subset I$ будет равно 2^m, поэтому при больших значениях m этот метод практически неприменим вследствие большого количества подмножеств ω.

Метод последовательных расчетов заключается в замене полного перебора вариантов направленным частичным перебором, позволяющим отбрасывать большие группы вариантов, заведомо не дающих оптимума [6]. В основе метода последовательных расчетов лежит следующая

Теорема. *Пусть функция $p(\omega)$ удовлетворяет условию (5), ω^* — множество, на котором эта функция достигает глобального минимума. Тогда для любой конечной последовательности $\{\omega_i\}$, содержащей ω^*, такой что $\omega_i \subset \omega_{i+1}$, функция $p(\omega)$ монотонно убывает до множества ω^* и монотонно возрастает после множества ω^*.*

Использование данной теоремы позволяет исключить из рассмотрения целые массивы вариантов. Действительно, пусть для некоторых ω_1 и ω_2, таких что $\omega_1 \subset \omega_2 \subset I$, найдены значения $p(\omega_1)$ и $p(\omega_2)$. Тогда при $p(\omega_1)<p(\omega_2)$ из рассмотрения можно исключить $2^{m-|\omega_2|}$ вариантов $\omega \supset \omega_2$. Если $p(\omega_1) > p(\omega_2)$, то можно отбросить $2^{|\omega_1|}$ вариантов $\omega \subset \omega_1$. Обычно порядок перебора в методе последовательных расчетов не превышает m^3, что существенно меньше объема полного перебора 2^m [6].

Докажем применимость метода последовательных расчетов при решении поставленной задачи. Из определения множеств $\alpha = \omega_1 \cup \omega_2$, $\beta = \omega_1 \cap \omega_2$ следует, что имеет место равенство

$$\sum_{i\in\omega_1} T_i + \sum_{i\in\omega_2} T_i = \sum_{i\in\alpha} T_i + \sum_{i\in\beta} T_i. \tag{6}$$

Учитывая (6), неравенство (5) можно записать в виде

$$s(\omega_1,\omega_2) = \min_x \left\{ \sum_{i\in\omega_1}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i\in\omega_1}\psi_i(x_i) \right\} + \min_x \left\{ \sum_{i\in\omega_2}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i\in\omega_2}\psi_i(x_i) \right\} -$$

$$- \min_x \left\{ \sum_{i\in\alpha}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i\in\alpha}\psi_i(x_i) \right\} - \min_x \left\{ \sum_{i\in\beta}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i\in\beta}\psi_i(x_i) \right\} \le 0. \tag{7}$$

Обозначим оптимальный план задачи (3), (4) на множестве α через $\left\{x_{ij}^{\alpha}\right\}$, а на множестве β — через $\left\{x_{ij}^{\beta}\right\}$. Тогда для доказательства выполнения условия (7) достаточно показать, что

$$s(\omega_1,\omega_2) = \sum_{i\in\omega_1}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\omega_1}) + \sum_{i\in\omega_2}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\omega_2}) - \sum_{i\in\alpha}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\alpha}) - \sum_{i\in\beta}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\beta}) +$$

$$+ \sum_{i\in\omega_1}\psi_i(x_i^{\omega_1}) + \sum_{i\in\omega_2}\psi_i(x_i^{\omega_2}) - \sum_{i\in\alpha}\psi_i(x_i^{\alpha}) - \sum_{i\in\beta}\psi_i(x_i^{\beta}) \le 0. \tag{8}$$

Здесь $\left\{x_{ij}^{\omega_1}\right\}$,$\left\{x_{ij}^{\omega_2}\right\}$ — некоторые допустимые планы задачи (3), (4) на множествах ω_1 и ω_2,

$$x_i^{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\alpha}, \quad x_i^{\beta} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\beta}, \quad x_i^{\omega_1} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\omega_1}, \quad x_i^{\omega_2} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\omega_2}.$$

Отметим, что, поскольку функции $\psi_i(x_i)$ являются выпуклыми вниз и возрастающими, для каждой из них справедливо следующее неравенство:

$$\psi_i(x_1-\lambda) + \psi_i(x_2+\lambda) \le \psi_i(x_1) + \psi_i(x_2) \quad \text{при} \quad x_1 \ge x_2, \quad i = 1,2,...,m, \tag{9}$$

где $0 \le \lambda \le |x_1 - x_2|$.

Аналогично для функции $\varphi_{ij}(x_{ij})$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$ имеет место неравенство (9).

Предположим, что для задачи (3), (4) на множествах ω_1 и ω_2 существуют допустимые планы $\left\{x_{ij}^{\omega_1}\right\}$, $\left\{x_{ij}^{\omega_2}\right\}$, удовлетворяющие условиям

$$x_{ij}^{\omega_1} = x_{ij}^{\alpha}, \quad i \in \alpha \backslash \omega_2, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

$$x_{ij}^{\omega_2} = x_{ij}^{\alpha}, \quad i \in \alpha \backslash \omega_1, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{10}$$

$$x_{ij}^{\omega_1} + x_{ij}^{\omega_2} = x_{ij}^{\alpha} + x_{ij}^{\beta}, \quad i \in \beta, \quad j = 1, 2, ..., n;$$

$$x_i^{\alpha} \leq x_i^{\omega_1}, \quad x_i^{\omega_2} \leq x_i^{\beta}, \quad i \in \beta. \tag{11}$$

Тогда, используя условия (10), из (8) получаем равенства

$$s(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i \in \beta} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\omega_1}) + \sum_{i \in \beta} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\omega_2}) - \sum_{i \in \beta} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\alpha}) - \sum_{i \in \beta} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\beta}) + \\ + \sum_{i \in \beta} \psi_i(x_i^{\omega_1}) + \sum_{i \in \beta} \psi_i(x_i^{\omega_2}) - \sum_{i \in \beta} \psi_i(x_i^{\alpha}) - \sum_{i \in \beta} \psi_i(x_i^{\beta}). \tag{12}$$

Из (12), используя свойства выпуклости функций $\varphi_{ij}(x_{ij})$ и $\psi_i(x_i)$ (9), находим

$$s_1(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i \in \beta} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\omega_1}) + \sum_{i \in \beta} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\omega_2}) - \sum_{i \in \beta} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\alpha}) - \sum_{i \in \beta} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^{\beta}) \leq 0,$$

$$s_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i \in \beta} \psi_i(x_i^{\omega_1}) + \sum_{i \in \beta} \psi_i(x_i^{\omega_2}) - \sum_{i \in \beta} \psi_i(x_i^{\alpha}) - \sum_{i \in \beta} \psi_i(x_i^{\beta}) \leq 0.$$

Таким образом, достаточное условие (5) применимости метода последовательных расчетов доказано в предположении о существовании допустимых планов $\{x_{ij}^{\omega_1}\}$, $\{x_{ij}^{\omega_2}\}$, удовлетворяющих условиям (10), (11).

Остается доказать существование таких допустимых планов для рассматриваемой задачи. Доказательство существования допустимых планов $\{x_{ij}^{\omega_1}\}$ и $\{x_{ij}^{\omega_2}\}$, удовлетворяющих соотношениям (10), (11) для рассматриваемой задачи, аналогично доказательству, приведенному в работе [7].

Список литературы

1. Жусупбаева Г. А. Применение метода последовательных расчетов к нелинейной задаче размещения // Тр. ИВМиМГ СО РАН. Сер. Информатика. 2007. Вып. 7. С. 220–229.

2. Жусупбаева Г. А., Жусупбаев А. Ж. Задача размещения производства с нелинейной целевой функцией // Исследования по интегродифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2007. Вып. 36. С. 161–165.

3. Гирсанов И. В., Поляк Б. Т. Математические методы решения задачи о размещении // Проблемы оптимального планирования проектирования и управления производством. М.: Изд-во МГУ, 1963. С. 288–300.

4. Борисова Т. Н., Влашек З., Карманов В. Г. и др. Некоторые методы решения задачи размещения // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1965. С. 441–451.

5. Жусупбаев А. Ж. Задача размещения производства с выпуклым сепарабельным функционалом // Изв. АН КиргССР. 1974. № 6. С. 14–20.

6. Черенин В. П., Хачатуров В. Р. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства // Экономико-математические методы. М.: Наука, 1965. Вып. 2. С. 279–290.

7. Жусупбаев А. Ж. Задача размещения производства с нелинейным разрывным функционалом // Применение математических методов в экономических исследованиях. Фрунзе: Илим, 1976. С. 30–41.

Жусупбаева Гульзат Амангельдиевна — асп. Кыргызского национального аграрного университета; тел. (0312) 26-74-51; e-mail: GA08@mail.ru

Дата поступления — 20.05.11