

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ, РЕАЛИЗУЮЩИЙ НЕЛИНЕЙНУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ПРОХОЖДЕНИЯ ТОКОВ ЧЕРЕЗ БЕЗДРЕЙФОВЫЙ ТРАНЗИСТОР В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Х. С. Соатов

Ташкентский университет информационных технологий, 100202, Ташкент, Узбекистан

УДК 621.385: 621.396

Предложен вычислительный алгоритм, реализующий нелинейную математическую модель процессов прохождения токов через бездрейфовый транзистор.

Ключевые слова: бездрейфовый транзистор, вычислительный алгоритм, линеаризация, метод последовательного приближения, метод R-функций.

The work is devoted to developing a computational algorithm that implements a nonlinear mathematical model of the process of passing current through the transistor Drift free.

Key words: drift free transistor, the computer algorithm, linearization, the method of successive approximations, method of R-function.

В работе [1] предложены математические модели процессов прохождения токов через бездрейфовый транзистор в двумерной постановке для двух случаев:

1. Движение электронов в полупроводнике. В этом случае совместно решается система дифференциальных уравнений вида [1-3]

$$\begin{aligned} I_n &= Sqn\mu_n E + SqD_n \left(\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} \right), \\ D_n \Delta n + \mu_n \operatorname{div}(nE) + \frac{n^* - n}{\tau_n} &= 0, \\ \operatorname{div}(E) &= \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} (N_g^+ - N_a^- + p - n), \\ D_p \Delta p - \mu_p \operatorname{div}(nE) + \frac{p^* - p}{\tau_p} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь I_n, n, E, p — неизвестные функции; n^* — термодинамическая равновесная концентрация электронов в базе; τ_n — время жизни электрона в полупроводнике; τ_p — время жизни “дырочной” компоненты проводимости в полупроводнике; N_g^+, N_a^- — концентрация атомов (ионов) донорной и акцепторной примесей в данном сечении полупроводника.

2. Дырочная компонента проводимости в неоднородном полупроводнике. В этом случае совместно решается система дифференциальных уравнений вида [1-3]

$$I_p = Sqn\mu_p E - SQD_p \left(\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} \right),$$

$$D_n \Delta n + \mu_n \operatorname{div}(nE) + \frac{n^* - n}{\tau_n} = 0, \quad (2)$$

$$D_p \Delta p - \mu_p \operatorname{div}(nE) + \frac{p^* - p}{\tau_p} = 0,$$

$$\operatorname{div}(E) = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} (N_g^+ - N_a^- + p - n).$$

Здесь I_p, n, E, p — неизвестные функции; p^* — термодинамическая равновесная концентрация “дырок” [2, 3].

Уравнения (1), (2) являются нелинейными. При решении нелинейных уравнений возникает ряд математических трудностей. Одним из путей решения нелинейных уравнений является линеаризация, суть которой заключается в применении метода последовательного приближения [4]. При этом на каждом шаге решаются линейные уравнения.

Рассмотрим систему уравнений (1). Конечной целью поставленной задачи является нахождение I_n , присутствующей только в первом уравнении этой системы. Поэтому первое уравнение можно считать расчетной формулой для вычисления I_n при известных n, E .

Для того чтобы определить E , будем считать, что напряженность электронного поля отсутствует ($E = 0$). Тогда второе и четвертое уравнения системы (1) соответственно принимают вид

$$D_n \Delta n + \frac{n^* - n}{\tau} = 0; \quad (3)$$

$$D_p \Delta p + \frac{p^* - p}{\tau_p} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) решаются при соответствующих краевых условиях, которые формально представим в виде

$$D_n \Delta n + \frac{n^* - n}{\tau_n} = 0; \quad (5)$$

$$l_1 n|_{\Gamma} = \varphi; \quad (6)$$

$$D_p \Delta p + \frac{p^* - p}{\tau_p} = 0; \quad (7)$$

$$l_2 p|_{\Gamma} = \psi. \quad (8)$$

Здесь l_1 и l_2 — дифференциальные операторы, порядок которых ниже двух.

Решая задачи (5), (6) и (7), (8) с использованием одного из проекционных методов [5–7], получим $n^{(1)}$ и $p^{(1)}$ в первом приближении. Подставляя значения $n^{(1)}$ и $p^{(1)}$ в третье уравнение системы (3), получаем

$$\operatorname{div}(E) = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} (N_g^+ - N_a^- + p^{(1)} - n^{(1)}). \quad (9)$$

Уравнения (9) также решаются при соответствующих краевых условиях, которые формально представим в виде

$$l_3 E|_{\Gamma} = \psi, \quad (10)$$

где l_3 — дифференциальный оператор.

Решая совместно уравнения (9), (10), определим $E^{(1)}$. Подставляя $E^{(1)}$ в первое уравнение системы (1), получаем

$$I_n = Sq n^{(1)} \mu_n E^{(1)} + Sq D_n \left(\frac{\partial n^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial n^{(1)}}{\partial y} \right).$$

На втором шаге итерации значения $E^{(1)}$, найденные на первом шаге, подставляем во второе и четвертое уравнения системы (1). В результате получаем следующие две системы уравнений:

$$D_n \Delta n^{(2)} + \mu_n \operatorname{div}(n E^{(1)}) + \frac{n^* - n^{(2)}}{\tau_n} = 0; \quad (11)$$

$$D_p \Delta p^{(2)} - \mu_p \operatorname{div}(n E^{(1)}) + \frac{p^* - p^{(2)}}{\tau_p} = 0. \quad (12)$$

Решая (11) при условии (6) и (12) при условии (8), находим второе приближение $n^{(2)}$ и $p^{(2)}$. Подставляя эти значения в (9), имеем

$$\operatorname{div}(E) = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} (N_q^+ - N_a^- + p^{(2)} - n^{(2)}). \quad (13)$$

Решая (13) при условии (10), определим $E^{(2)}$, а затем вычислим значения I_n :

$$I_n = Sq n^{(2)} \mu_n E^{(2)} + Sq D_n \left(\frac{\partial n^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial n^{(2)}}{\partial y} \right). \quad (14)$$

Аналогично после i -го приближения имеем

$$D_n \Delta n^{(i)} + \mu_n \operatorname{div}(n^{(i)} E^{(i-1)}) + \frac{n^* - n^{(i)}}{\tau_n} = 0,$$

$$D_p \Delta p^{(i)} - \mu_p \operatorname{div}(n^{(i)} E^{(i-1)}) + \frac{p^* - p^{(i)}}{\tau_p} = 0.$$

В i -м приближении уравнения (13), (14) соответственно принимают вид

$$\operatorname{div}(E^{(i)}) = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} (N_q^+ - N_a^- + p^{(i)} - n^{(i)}),$$

$$I_n = Sq n^{(i)} \mu_n E^{(i)} \left(\frac{\partial n^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial n^{(i)}}{\partial y} \right).$$

Итерационный процесс заканчивается при выполнении следующего условия:

$$|n^{(i)} - n^{(i-1)}| \leq \varepsilon, \quad |p^{(i)} - p^{(i-1)}| \leq \varepsilon, \quad |E^{(i)} - E^{(i-1)}| \leq \varepsilon$$

(ε — заданное достаточно малое действительное число).

Опишем алгоритм решения линейных краевых задач на i -м шаге. Рассмотрим уравнение (5) в виде

$$An = D_n \Delta n^{(i)} + \mu_n \operatorname{div}(n^{(i)} E^{(i-1)}) + \frac{n^* - n}{\tau_n} = 0 \quad (15)$$

при условии (6) вида

$$L_1 n^{(i)}|_{\Gamma} = \varphi_1. \quad (16)$$

Здесь L_1 — дифференциальный оператор.

Задачу (15), (16) будем решать методом Бубнова — Галеркина [5–7]. При этом координатные последовательности построим на основе метода R-функций Рвачева [8]. Как отмечено выше, L_1 — линейный дифференциальный оператор, порядок которого не выше двух, т. е. условие (16) можно представить в виде

$$u|_{\Gamma} = \varphi_{11} \quad (17)$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi_{12}. \quad (18)$$

Условия (17) и (18) называются условиями Дирихле (условие первого рода) и Неймана (условие второго рода) соответственно. Кроме того, в этом случае возможно краевое условие третьего рода

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial n} + bu \right) \Big|_{\Gamma} = \varphi_{13}, \quad (19)$$

где a, b — известные функции.

Структура решения (последовательности системы координатных функций) при условиях (17)–(19) соответственно имеет вид

$$u = \varphi_{11} + \omega \Phi; \quad (20)$$

$$u = \Phi - \omega D_1 \Phi + \omega \varphi_{12}; \quad (21)$$

$$u = \Phi + \frac{\omega}{a} (-b\Phi - aD_1 \Phi + \varphi_{13}), \quad (22)$$

где D_1 — дифференциальный оператор:

$$D_1 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right),$$

Φ — неопределенная компонента структуры, которая обычно представляется в виде

$$\Phi = \sum_{i+j=0}^n C_{ij} X_i(x) X_j(y), \quad (23)$$

C_{ij} — неизвестные функции, подлежащие определению; $X_i(x)$, $X_j(y)$ — полные системы базисных полиномов, таких как степенные тригонометрические, полиномы Чебышева, сплайны и т. д.; ω — нормализованное уравнение границы области, обладающей следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \omega &> 0, & (x, y) &\in \Omega, \\ \omega &= 0, & (x, y) &\in \Gamma, \\ \omega &< 0, & (x, y) &\notin \Omega \cup \Gamma, \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= 1. \end{aligned}$$

Подставляя одно из структурных решений (20)–(22) в (15) и выполняя процедуры Бубнова — Галеркина, получаем

$$MC = F; \quad (24)$$

$$M = \iint_{\Omega} \left(A_1 n_k^{(i)} - \frac{1}{\tau_n} n_k^{(i)} \right) n_m^{(i)} d\Omega, \quad F = - \iint_{\Omega} \left(\frac{n^*}{\tau_n} + \varphi \right) n_m^{(i)} d\Omega,$$

$$A_1 = D_n \Delta + \mu_n \operatorname{div}(E^{(i)}).$$

В случае использования структурной формулы (20) выражения для n_k и φ имеют вид

$$n_k^{(i)} = \omega \Phi, \quad \varphi = \varphi_{11},$$

в случае использования (21) —

$$n_k^{(i)} = \omega - \omega D_1 \Phi, \quad \varphi = \omega \varphi_{12},$$

в случае использования (22) —

$$n_k^{(i)} = \Phi + \frac{\omega}{a} (-b\Phi - aD_1\Phi), \quad \varphi = \frac{\omega}{a} \varphi_{13}.$$

Решим системы алгебраических уравнений (24) и определим неизвестные коэффициенты. Затем, подставляя их в (23) и (20) (или (21) и (22)), получаем искомые решения.

Аналогично строится алгоритм линеаризации для решения системы дифференциальных уравнений (2).

Заключение. Таким образом, разработан вычислительный алгоритм решения нелинейных краевых задач для приведенных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка на базе метода последовательного приближения при сочетании методов Бубнова — Галеркина и метода R-функций В. Л. Рвачева. Предложенный алгоритм легко реализуем на компьютере.

Список литературы

1. СОАТОВ Х. С. Математические модели процессов прохождения $p - n$ -токов через бездрейфовый транзистор в двумерной постановке // Вестн. ТАТУ. 2011. № 2. С. 27–33.
2. АНДРЕЕВ И. С. Транзисторы и тиристоры: Учеб. пособие / И. С. Андреев, Х. К. Арипов, Ж. Т. Максудов, Ш. Б. Рахматов. Ташкент: Изд-во ТЭИС, 1994. 164 с.
3. АНДРЕЕВ И. С., АРИПОВ Х. К., АЛИМОВА Н. Б., МАКСУДОВ Ж. Т. Методика расчета аналоговых преобразователей на основе нелинейных моделей биполярных транзисторов // Пробл. информатики и энергетики. 1996. № 1/2. С. 72–74.
4. ПЕТРОВ В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Саратов. ун-т, 1975. 120 с.
5. МИХЛИН С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 511 с.
6. МАРЧУК Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1973. 352 с.
7. КАНТОРОВИЧ Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. М.: Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 695 с.
8. РВАЧЕВ В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. Киев: Наук. думка, 1976. 288 с.

*Соатов Халик Садилович — канд. техн. наук, доц.,
проректор Ташкентского университета информационных технологий;
тел.: (+99871)238-64-01, (+99871) 238-64-64; e-mail: kh.soatov@twit.uz*

Дата поступления — 09.09.11 г.