

ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Д. С. Бухаров, А. Л. Казаков*

Иркутский государственный технический университет,
664074, Иркутск, Россия

* Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
664033, Иркутск, Россия

УДК 519.6

Представлено описание оптико-геометрического подхода, основанного на принципах Ферма и Гюйгенса и применяемого для решения некоторых задач транспортной логистики. Проведено сравнение подхода с волновым алгоритмом трассировки. Подход апробирован на ряде модельных задач, представлено решение прикладных задач транспортной логистики.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимизация, численный метод, транспортная логистика.

The optical-geometrical approach, based on Huygens and Fermat principles, is described. The approach is used to solve problems of transport logistics. The comparison of the optical way and the wave routing algorithm is described. The approach are tested on model problems. Decision contents of applied transport logistics problems is presented.

Key words: mathematical modeling, optimization, numerical method, transport logistics.

Введение. В настоящей работе представлено описание подхода, основанного на аналогии с геометрической оптикой и поиском глобального экстремума функционала. Оптическая составляющая аналогии базируется на фундаментальных принципах Ферма (движение луча света по маршруту, доставляющему минимум по времени) и Гюйгенса (порождение вторичных источников света и построение волновых фронтов) [1].

Ранее подобный подход применялся при решении задач управления подвижными объектами на плоскости при наличии фазовых ограничений [2, 3]. Численная реализация подхода основывалась на построении множеств достижимости.

В работе [4] оптико-геометрическая аналогия использовалась при решении задач безопасности, каждая из которых сводилась к поиску оптимального маршрута (задача безопасности передвижения, задача оптимизации системы физической защиты охраняемого объекта, задача обезвреживания нарушителя).

Оптико-геометрическая аналогия применялась также в работах [5, 6]. Распространение волн рассматривалось как процесс возбуждения на заданном многообразии нейронов. В работе [7] был осуществлен переход от процесса возбуждения в нейронной сети к распространению световой волны в терминах геометрической оптики. Результаты исследования применялись для решения задачи управления движением [8, 9].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-07-00245, 12-07-31080).

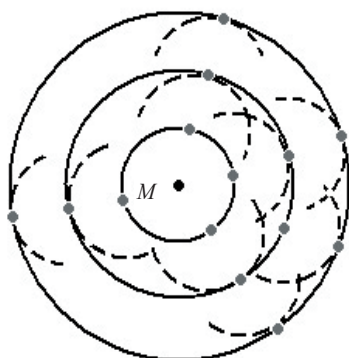


Рис. 1. Построение фронтов световой волны на основе принципа Гюйгенса

Как правило, для решения задач транспортной логистики используется аппарат теории графов [10, 11] и математического программирования. Разработанные дискретные методы позволяют эффективно решать различного рода задачи, но при исследовании специфических прикладных задач возникает ряд проблем: затруднения в поиске локальных решений; невозможность полного учета различных естественных условий задач (ландшафт, очень большие или малые населенные пункты, наличие различного рода барьеров). Кроме того, для всестороннего описания задачи может понадобиться построение громоздкой математической модели, требующей разработки специального аппарата исследования.

Для решения указанных проблем необходимо исследовать задачи в непрерывной постановке, поэтому задачи транспортной логистики сводятся к задачам вариационного исчисления специального вида, что позволяет применять для их решения основные вариационные принципы (Ферма и Гюйгенса). В настоящей работе предложена модификация [12, 13] оптико-геометрической аналогии, эффективной при решении ряда транспортно-логистических задач [14–16]: построение оптимального маршрута; сегментация логистических зон; размещение логистических объектов [17] как с точки зрения качества обслуживания (склады, магазины, почта), так и с точки зрения безопасности (спасательные пункты, хранилища токсичных и радиоактивных отходов). Проведено сравнение аналогии с известным волновым алгоритмом трассировки Ли. Представлены результаты решения некоторых модельных задач: построение оптимального маршрута с ограничением на кривизну и без ограничения; обход непроходимых или труднопреодолимых препятствий. Приведен обзор результатов решения прикладных задач.

1. Описание метода исследования. Ниже представлено описание фундаментальных вариационных принципов механики и определена их взаимосвязь.

Согласно принципу Ферма световой луч в оптически неоднородной среде выбирает путь, преодолеваемый за минимальное время и имеющий форму кривой (в однородной среде — прямой). В случае существования нескольких близких маршрутов, требующих одинакового времени распространения света, лучи света распространяются по каждому из них.

Оптическая среда характеризуется множеством точек, в которых определено значение коэффициента проницаемости среды, изменяющее скорость прохождения светового луча. Скорость света тем выше, чем больше значение проницаемости оптической среды.

Согласно принципу Гюйгенса каждая точка среды, которой достиг фронт световой волны, становится самостоятельным источником света. Представим оптическую среду в виде прямоугольной системы координат x, y . Пусть заданы точка M , в которой происходит световое возбуждение (рис. 1), и значение коэффициента проницаемости $f(x, y) = \text{const}$ в каждой точке

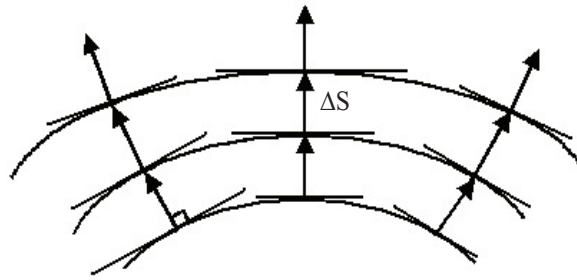


Рис. 2. Направление построения линий

(x, y) . Из источника света M по всем направлениям оптической среды распространяется свет, через малый интервал времени строится “элементарный” сферический фронт света. Множество точек, которых достиг свет, образует многообразие вторичных источников. Продолжая процесс распространения света из каждой точки полученного многообразия и строя на каждом шаге $\Delta t = \varepsilon$ огибающую всех источников, получим фронты световой волны, имеющие форму окружности (что не противоречит принципу Ферма для оптически однородной среды).

Так как световой луч, движущийся в оптической среде, описывает некоторый маршрут, то его можно построить геометрически и использовать при решении задачи маршрутизации. Пусть в некоторой области D имеется базисная кривая, на которой происходит световое возбуждение в момент времени $t = 0$. От каждой точки базисной кривой перпендикулярно ей откладывается некоторое расстояние Δs через промежуток времени $\Delta t = \varepsilon$ (принцип Гюйгенса). Расстояние Δs характеризует некоторый прямолинейный отрезок пути.

В момент времени $t = \varepsilon$ строится близкая по форме к базисной кривая, называемая эквидистантой и являющаяся многообразием вторичных источников света. В результате образуется “параллельная” кривая, известная как эквидистанта [18]. Построение осуществляется до тех пор, пока не будет заполнена вся рассматриваемая область D . В результате через каждую точку области D будет проходить фронт световой волны.

Так как каждый отрезок откладывается перпендикулярно базисной кривой, то известно направление построения (рис. 2), обеспечивающее корректную идентификацию связей между соседними точками. Данная особенность позволяет точно определить маршрут передвижения.

Покажем, что определяемый таким образом маршрут дает минимум по времени. Пусть оптическая среда D является неоднородной, $v(x, y)$ и $f(x, y)$ — скорость света и значение проницаемости среды в точке (x, y) соответственно. Откладываемое от начального многообразия источников света расстояние равно $\Delta s = v\Delta t$ ($\Delta t = \varepsilon$). Так как среда является неоднородной, скорость света меняется от точки к точке: $v(x, y) = cf(x, y)$, где c — скорость света в вакууме.

Если значение $f(x, y)$ задано во всех точках области D , то от всех точек базисной кривой можно отложить бесконечно малое расстояние $\Delta s = cf(x, y)\Delta t$, а затем многократно повторить процесс построения. Если в оптической среде D имеется непреодолимый барьер $D_b \in D$ с проницаемостью $f_b = 0$, то построить фронт в области D_b не представляется возможным.

На рис. 3 представлены световой фронт волны и траектории световых лучей, движущихся в оптически неоднородной среде. В темной области проницаемость среды ниже. Построена траектория движения светового луча Γ_1 , представляющего собой совокупность отрезков, отложенных перпендикулярно каждому фронту Φ_i , $i = \overline{0, n-1}$. Луч Γ_1 выходит из точки M ,

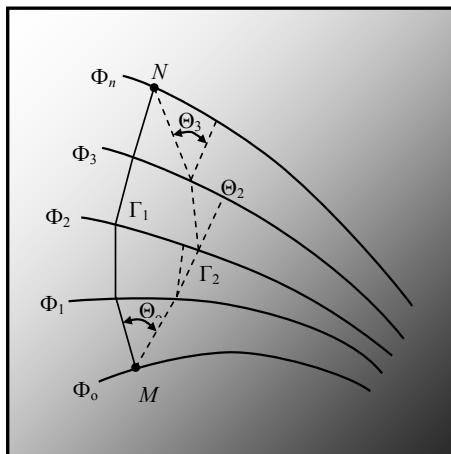


Рис. 3. Сравнение маршрутов

расположенной на базисной кривой Φ_0 , и заканчивается в точке N на кривой Φ_n . Построена также траектория Γ_2 с краевыми точками M и N , “промежуточные” отрезки которой не перпендикулярны фронтам $\Phi_i, i = \overline{0, n-1}$.

На преодоление маршрута Γ_1 затрачивается время $t_1 = n\varepsilon$, а на преодоление маршрута Γ_2 — время

$$t_2 = \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\cos \theta_i}$$

(θ_i — угол отклонения от перпендикуляра к линии фронта $\Phi_i, i = \overline{0, n-1}$).

Так как $\varepsilon > 0$ и $\theta_i \geq 0, i = \overline{0, n-1}$, то $t_2 > t_1$. Таким образом, выходящий из точки M световой луч достигает точки N за минимальное время.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место классическая задача вариационного исчисления об оптимальном маршруте [19], согласно которой минимальное время, затрачиваемое лучом на перемещение из точки M в точку N , вычисляется по формуле

$$T_{MN} = \min \int_0^{n\varepsilon} \frac{\Gamma}{v(x, y)} dt,$$

где $\Gamma \in G; G$ — множество всевозможных маршрутов, соединяющих заданные точки. Маршрут, дающий минимум по времени, определяется следующим образом:

$$\Gamma_1 = \arg \min \int_0^{n\varepsilon} \frac{\Gamma}{v(x, y)} dt.$$

Если аналитический вид функции скорости $v(x, y)$ неизвестен (что характерно для прикладных задач), то проводится численная реализация описанной оптико-геометрической аналогии.

2. Сравнение с волновым алгоритмом Ли. Сравним предложенный в данной работе подход, основанный на принципах Ферма и Гюйгенса, с волновым алгоритмом Ли [20]. Алгоритм Ли является наиболее распространенным алгоритмом трассировки и широко применяется при проектировании печатных плат, а также в компьютерной графике и в области распознавания образов.

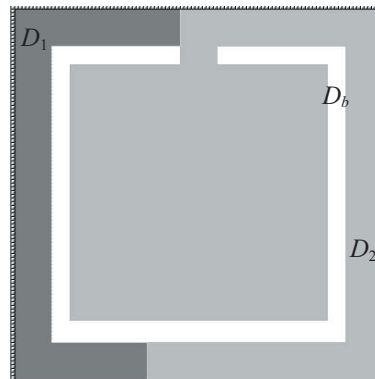
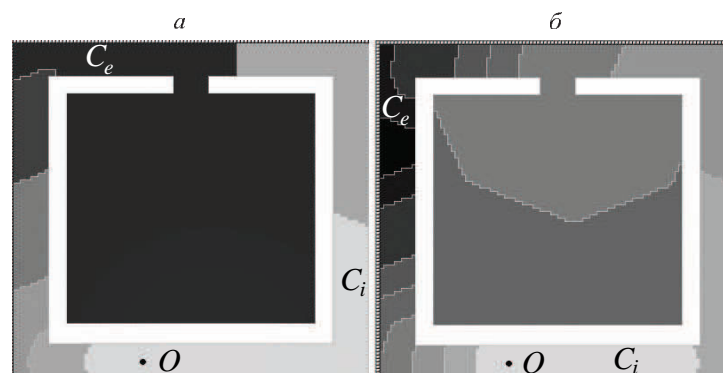


Рис. 4. Некоторая условная местность

Рис. 5. Фронты волн, полученные различными методами:
а — волновой алгоритм Ли, б — предлагаемый метод

Проведем сравнение предлагаемого метода и алгоритма Ли на некоторой условной местности D (рис. 4). Заданы области $D_1 \in D$, $D_2 \in D$, $D_b \in D$, где область D_b — непреодолимый барьер (например, высокий забор), область D_1 — среда с проницаемостью f_1 (плотная поросль кустарников), область D_2 — среда с проницаемостью $f_2 > f_1$ (асфальт). Требуется определить оптимальный маршрут передвижения из точки в нижней части местности (находящейся на границе областей D_1 и D_2) в некоторую точку в центре области D . На рис. 5 представлены фронты волн, полученные сравниваемыми методами, точка M — источник света, от светло-серой до черной области время распространения фронта волны увеличивается.

Решения задачи, полученные с использованием волнового алгоритма Ли и предложенного метода, представлены на рис. 6. Видно, что волновой алгоритм Ли прокладывает кратчайший маршрут Γ_1 на карте через область D_1 (поросль кустарников), а предлагаемый метод строит маршрут Γ_2 через область D_2 (асфальт).

Волновой алгоритм Ли прокладывает кратчайший по протяженности маршрут Γ_1 , не учитывая плотно поросшую кустарником местность D_1 , что приводит к некорректности решения. По проложенному маршруту световая волна доходит до конечной точки за время $t_1 = 299,311$. Корректное решение задачи дает предложенный метод, так как передвижение по маршруту Γ_2 займет время $t_2 = 70,989$.

Таким образом, маршрут Γ_1 (найденный с помощью волнового алгоритма Ли) не является оптимальным по времени, затрачиваемому на его преодоление ($t_1 > t_2$). При передвижении по маршруту Γ_1 будет затрачено приблизительно в четыре раза больше времени, чем при передвижении по маршруту Γ_2 .

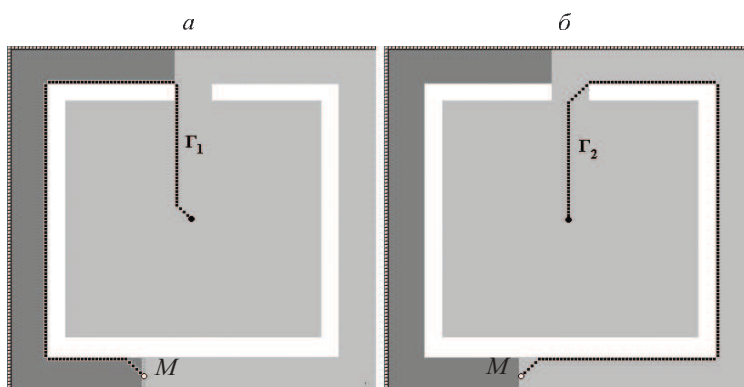


Рис. 6. Оптимальные маршруты:
 а — волновой алгоритм Ли, б — предлагаемый метод

Результаты проведенного сравнения показывают, что предлагаемый в данной работе метод имеет очевидное преимущество. Этот метод позволяет определить оптимальный по времени передвижения маршрут, при этом учитывается “ландшафт”, оказывающий существенное влияние на результат решения прикладных задач. Также метод позволяет сравнить время, затрачиваемое на передвижение по различным маршрутам из заданной точки на местности.

3. Построение оптимального маршрута. Рассмотрим предлагаемый метод на примере решения задачи об оптимальном маршруте. В данной задаче требуется определить оптимальный в некотором смысле маршрут передвижения из пункта A в пункт B . Минимальное время движения из одной точки в другую по маршруту Γ вычисляется по формуле

$$T_{AB} = \min_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{v(x, y)}. \tag{1}$$

Тогда маршрут Γ^* , доставляющий минимум по времени, определяется следующим образом:

$$\Gamma^* = \arg \min_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{v(x, y)}. \tag{2}$$

На рис. 7 представлено решение задачи о прокладке оптимального маршрута, соединяющего точки $M_1(-4, 0)$ и $M_2(4, 0)$ на ландшафте в форме полусферы $D = \{-4 \leq x \leq 4; -4 \leq y \leq 4\}$, $r = 4$. Проницаемость среды в каждой точке обратно пропорциональна высоте полусферы: $f(x, y) = 1/\sqrt{(r^2 - (x^2 + y^2))}$. Построены два оптимальных маршрута (черный цвет), проложенных в обход “горы” с пиком в центре рисунка (серая область).

В общем случае на прокладываемый маршрут накладывается дополнительное ограничение, возникающее при решении задач типа прокладки автомобильных и железнодорожных магистралей, когда требуется соблюдать плавность поворотов и учитывать ограничение на перепад высот местности. С точки зрения математики данная задача является задачей вида

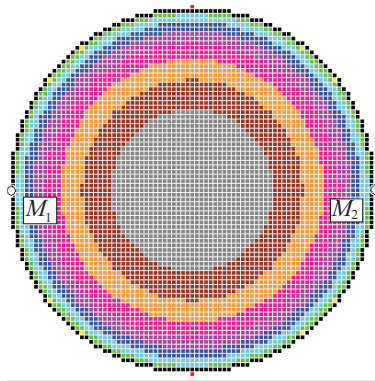


Рис. 7. Оптимальные маршруты на ландшафте в форме полусферы

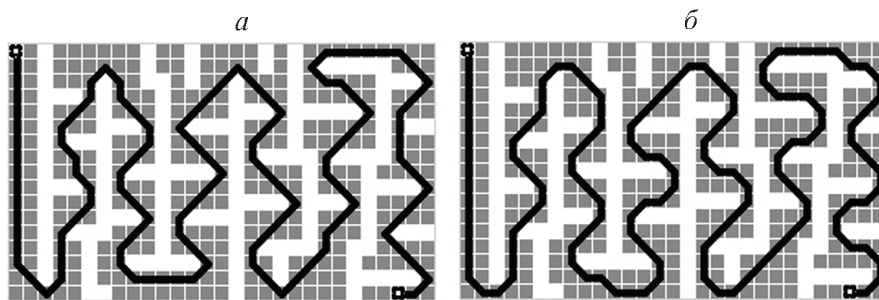


Рис. 8. Оптимальные маршруты:

a — без ограничения на угол поворота, *б* — с ограничением на угол поворота (45°)

(1), (2), но вследствие требования плавности поворота необходимо учитывать радиус кривизны прокладываемого маршрута R . Пусть кривая Γ задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$ и при всех t дважды непрерывно дифференцируема, кроме того, при всех t выполняется неравенство

$$R = \frac{\sqrt{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^3}}{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|} \geq C, \quad (3)$$

где R — радиус кривизны кривой Γ ; C — минимальный разрешенный радиус кривизны.

Численная реализация метода, учитывающего ограничения на кривизну маршрута и перепад высот, подробно представлена в работе [15].

Рассмотрим решение модельных задач. На рис. 8–10 представлена область D . Оптическая проницаемость области $D_1 \in D$ (область серого цвета) постоянна: $f_1 = \text{const}$. Область $D_b \in D$ (область белого цвета) — непреодолимый барьер. Требуется построить оптимальный маршрут между пунктами, обозначенными черно-белыми точками.

На рис. 8 представлено решение задачи о прокладке оптимального маршрута без ограничения на угол поворота (рис. 8, *a*) и с ограничением в 45° (рис. 8, *б*). Однако задача может иметь как одно (рис. 9), так и несколько решений, удовлетворяющих заданным ограничениям (угол поворота равен 11°).

На рис. 10 представлено решение задачи о прокладке оптимального маршрута с ограничением на угол поворота (11°). Из рис. 10 следует, что возможно построение нескольких маршрутов, удовлетворяющих ограничениям.

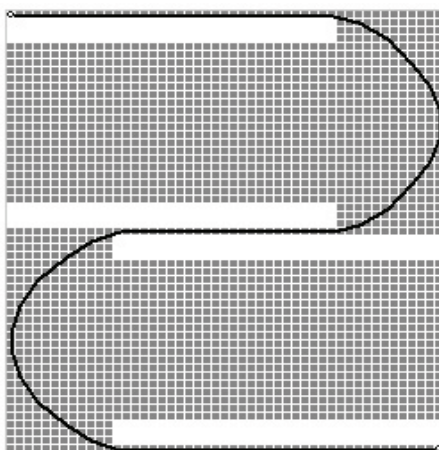
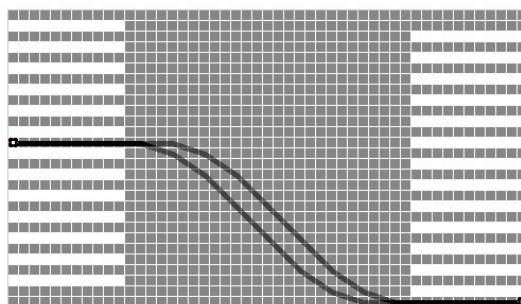
Рис. 9. Единственно возможный оптимальный маршрут (угол поворота 11°)

Рис. 10. Несколько оптимальных маршрутов

4. Обзор решенных прикладных задач. Представленный в данной работе подход и его модификации [12, 14, 15, 17] реализованы в программной системе “ВИГОЛТ” [13]. С помощью разработанной системы решены следующие прикладные задачи: идентификация и сегментация логистических зон утилизации старых автомобилей в Иркутской и Свердловской областях; прокладка высокоскоростной железнодорожной магистрали Екатеринбург — Челябинск. Описание результатов решения представлено ниже.

4.1. *Задача идентификации и сегментации логистических зон утилизации старых автомобилей.* Ниже представлено решение прикладной задачи сегментации зон утилизации старых автомобилей в Иркутской и Свердловской областях (рис. 11). Цифрами на рис. 11 обозначены номера зон утилизации, используемые в табл. 1, 2. В задаче необходимо для каждого пункта утилизации определить границы зоны утилизации, в которой расходы на доставку автомобиля в соответствующий пункт утилизации меньше расходов на доставку в другой ближайший пункт.

Предполагается, что население непрерывно распределено по всей территории области и функция $f(x, y) > 0$, характеризующая проницаемость среды, определяет плотность населения в точке (x, y) . При этом скорость движения световой волны в данной неоднородной среде определяется по формуле $v(x, y) = 1/\sqrt{f(x, y)}$, т. е. скорость движения волны тем больше, чем меньше плотность населения.

Из табл. 1, 2, в которых представлена численность обслуживаемого в каждой зоне населения, следует, что все пункты утилизации обслуживают примерно одинаковое количество клиентов.

4.2. *Прокладка высокоскоростной магистрали Екатеринбург — Челябинск.* Одним из перспективных направлений мировой транспортной системы является развитие высоко-

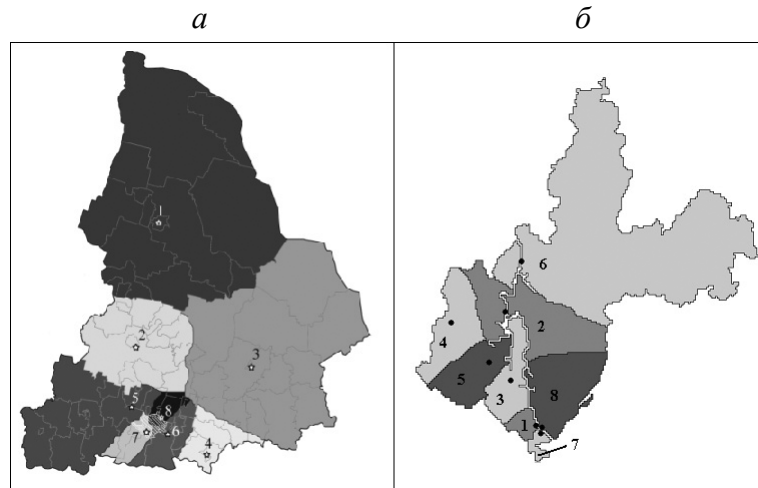


Рис. 11. Решение задачи сегментации:
a — Свердловская область, *б* — Иркутская область

Таблица 1

Численность обслуживаемого в зонах населения (Свердловская область)

Номер зоны	Название пункта	Обслуживаемое население, тыс. человек
1	Серов	460,09
2	Нижний Тагил	856,91
3	Ирбит	482,52
4	Каменск-Уральский	383,74
5	Первоуральск	720,04
6	Екатеринбург 1 (г. Арамиль)	636,66
7	Екатеринбург 2 (пос. Совхозный)	468,26
8	Екатеринбург 3 (г. Берёзовский)	417,53

Таблица 2

Численность обслуживаемого в зонах населения
 (Иркутская область)

Номер зоны	Название пункта	Обслуживаемое население, тыс. человек
1	Ангарск	410,24
2	Братск	439,45
3	Зима	273,96
4	Тайшет	114,39
5	Тулун	201,60
6	Усть-Илимск	252,49
7	Иркутск	404,66
8	Иркутск-2	456,60

скоростного железнодорожного движения. Высокоскоростные магистрали (ВСМ) — это железнодорожный транспорт, обеспечивающий движение поездов со скоростью более 200 км/ч на специально построенных железнодорожных линиях.

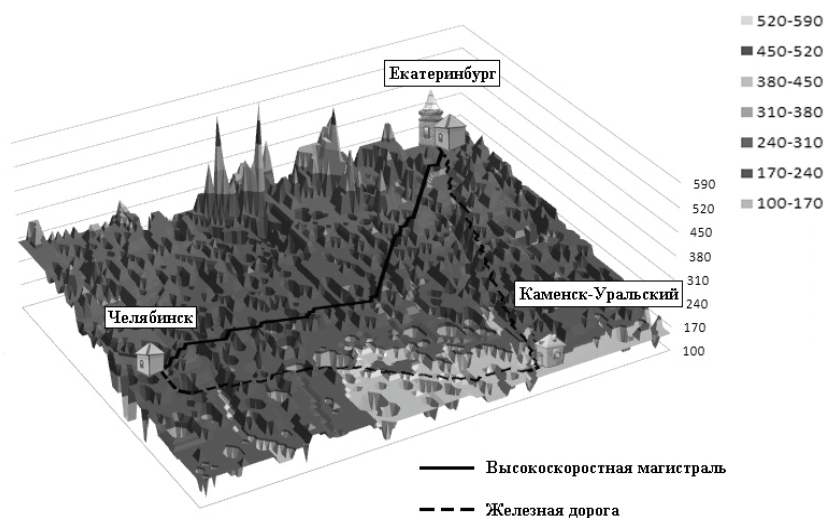


Рис. 12. Решение задачи о прокладке ВСМ

На рис. 12 представлено решение задачи прокладки участка ВСМ, соединяющего Екатеринбург и Челябинск. При построении решения учитывались ограничения (3), высота над уровнем моря, допустимый перепад высот, расположение рек, озер, болот и городов.

Протяженность имеющихся и проложенного маршрутов составляет:

- автомобильной дороги — 231 км (время преодоления маршрута — 3,4 ч);
- маршрута ВСМ — 232 км (время преодоления маршрута — 1,1 ч);
- железной дороги Екатеринбург — Челябинск — 326 км (время преодоления маршрута — 4 ч).

Из рис. 12 следует, что длина автомагистрали практически равна длине высокоскоростной железнодорожной магистрали, но при маршрутной скорости автомобиля 60–70 км/ч время, затрачиваемое им на преодоление пути, будет в три раза больше, чем на ВСМ.

Заключение. Представленный оптико-геометрический подход является эффективным способом решения большого количества разнородных задач оптимизации, возникающих в различных предметных областях. Подход позволяет учитывать необходимое количество предъявляемых в прикладных задачах требований и корректировать точность получаемых решений за счет изменения детализации оптической среды.

Решен ряд транспортно-логистических задач: построение оптимального маршрута; прокладка высокоскоростной железнодорожной магистрали; сегментация логистических зон; размещение логистических объектов. Задачи, решаемые с применением оптико-геометрической аналогии, объединяет возможность сведения их к задачам вариационного исчисления и задания оптической среды, т. е. некоторой географической составляющей задачи.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. Матвийчук А. Р., Ушаков В. Н. О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5–20.
3. Ушаков В. Н., Матвийчук А. Р. Один метод решения задач управления протяженными объектами на конечном промежутке времени // Тр. 9-й Междунар. Четаевской конф. "Аналитиче-

ская механика, устойчивость и управление движением”, Иркутск — оз. Байкал, 12–16 июня 2007 г. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2007. Т. 3. С. 253–261.

4. БАШУРОВ В. В. Математические модели безопасности / В. В. Башуров, Т. И. Филимонова. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2009.

5. ПРОПОЙ А. И. Модели возбудимых сред // Автоматика и телемеханика. 1995. № 6. С. 117–126.

6. ПРОПОЙ А. И. Возбудимые среды и нелокальный поиск // Автоматика и телемеханика. 1995. № 7. С. 162–171.

7. ПРОПОЙ А. И. Модели волновых сред // Автоматика и телемеханика. 1997. № 10. С. 18–26.

8. ПРОПОЙ А. И. Принцип эквивалентности в управлении движением. 1 // Автоматика и телемеханика. 1999. № 10. С. 89–96.

9. ПРОПОЙ А. И. Принцип эквивалентности в управлении движением. 2 // Автоматика и телемеханика. 1999. № 12. С. 57–66.

10. ПОПКОВ В. К. Математические модели связности. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2006.

11. ПОПКОВ В. К. О моделировании городских транспортных систем гиперсетями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 179–189.

12. КАЗАКОВ А. Л., ЛЕМПЕРТ А. А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 50–57.

13. БУХАРОВ Д. С., КАЗАКОВ А. Л. Программная система “ВИГОЛТ” для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Вычисл. методы и программирование. 2012. Разд. 2. С. 65–74. [Электрон. ресурс]. <http://num-meth.srcc.msu.ru>.

14. КАЗАКОВ А. Л., ЛЕМПЕРТ А. А., БУХАРОВ Д. С. Об одном численном методе решения некоторых задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Вестн. ИрГТУ. 2011. № 6. С. 6–12.

15. ЖУРАВСКАЯ М. А., КАЗАКОВ А. Л., ЛЕМПЕРТ А. А., БУХАРОВ Д. С. О методе решения задачи оптимальной прокладки высокоскоростных железнодорожных магистралей с учетом региональных особенностей // Транспорт: наука, техника, управление. 2012. № 2. С. 41–44.

16. КАЗАКОВ А. Л., ЖУРАВСКАЯ М. А., ЛЕМПЕРТ А. А. Вопросы сегментации логистических платформ в условиях становления региональной логистики // Транспорт Урала. 2010. № 4. С. 17–20.

17. БУХАРОВ Д. С. Определение оптимального количества и расположения логистических центров: математическая модель и численный метод // Вестн. ИрГТУ. 2012. № 4. С. 8–14.

18. АРНОЛЬД В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.

19. ГЕЛЬФАНД И. А. Вариационное исчисление / И. А. Гельфанд, С. В. Фомин. М.: Наука, 1961.

20. ДЕНЬДОБРЕНКО Б. Н. Автоматизация конструирования РЭА: Учеб. для вузов / Б. Н. Деньдобренко, А. С. Малика. М.: Высш. шк., 1980.

*Бухаров Дмитрий Сергеевич — асп. Иркутского государственного
технического университета; e-mail: bukharovds@gmail.com;
Казakov Александр Леонидович — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр.
Института динамики систем и теории управления СО РАН;
тел.: 45-30-33; e-mail: kazakov@icc.ru*

Дата поступления — 19.06.12