МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ МАРСА

М. А. Баньщикова, Е. Ю. Титаренко*

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики,
Томского государственного университета, 634050, Томск, Россия
* Институт кибернетики Национального исследовательского
Томского политехнического университета, 634050, Томск, Россия

УДК 521.1

Представлены результаты численного моделирования движения спутников Марса (Фобос, Деймос) с использованием дифференциальных уравнений движения в элементах Роя. Проведено сравнение с моделью движения в прямоугольной системе координат.

Ключевые слова: спутники Марса, численное моделирование, орбитальные параметры.

The results of numerical modeling of motion of Mars' satellites (Phobos and Deimos) by using the differential equations in Roy's orbital elements are presented. Comparison with motion model in rectangular system of coordinates is carried out.

Key words: Mars' satellites, numerical modelling, orbital parametres.

Введение. Исследование спутников Марса Фобоса и Деймоса представляет большой интерес для астрономов. Это малые объекты, которые быстро движутся вблизи плоскости экватора планеты по почти круговым орбитам с периодом 0,3 и 1,2 сут на расстоянии приблизительно 9000 и 23 000 км от Марса соответственно. Разработано большое количество динамических моделей движения спутников Марса [1−4]. Первые численные модели движения спутников Марса появились в конце 1990-х − начале 2000-х гг. [5, 6].

Поскольку спутники быстро вращаются вблизи планеты, численное моделирование динамики этих объектов, основанное на пошаговом интегрировании дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, сопряжено с известными трудностями. Правые части уравнений представляют собой быстроизменяющиеся функции времени, поэтому численное интегрирование таких уравнений необходимо выполнять с достаточно малым шагом, что приводит к большому объему вычислений, а также к интенсивному накоплению ошибок округления в численном решении. Кроме того, дифференциальные уравнения в прямоугольных координатах сильно неустойчивы по Ляпунову, что является причиной быстрого (сверхлинейного) увеличения количества методических ошибок в процессе численного интегрирования. Так как уравнения Роя (со средней долготой) регулярны и обладают стабилизирующим эффектом [7], можно предположить, что численное моделирование на их основе будет значительно более эффективным по сравнению с моделированием на основе классических уравнений движения.

В данной работе представлена численная модель движения спутников Марса Фобоса и Деймоса, построенная на основе дифференциальных уравнений в элементах Роя, а также проведен сравнительный анализ эффективности численного моделирования движения спутников Марса в прямоугольных координатах и элементах Роя.

1. Формальное представление модели движения спутников Марса. Формально численную модель спутникового движения $\mathbf{p}^C$ в пространстве угловых координат $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ относительно стандартного земного экватора J2000.0 можно представить в виде [8]

$$\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}^{DT}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{q}^D), \mathbf{q}^T). \quad (1)$$

Здесь t – эфемеридное время; $\mathbf{q}^{DT} = (\mathbf{q}^D, \mathbf{q}^T)$ – вектор всех параметров модели; $\mathbf{T}$ – преобразование перехода от ареоцентрической системы координат в пространство угловых координат на небесной сфере, отнесенной к топоцентру; $\mathbf{q}^D = (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, t_0, q_8, \ldots)$, $\mathbf{q}^T$ – параметрические векторы, связанные соответственно с движением спутника и с координатным преобразованием; $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$ – векторы динамического состояния небесного тела в начальный момент времени t_0.

2. Уравнения движения спутников в элементах Роя. В модели (1) положения $\mathbf{x}$ и скорости $\dot{\mathbf{x}}$ определяются через элементы Роя $\mathbf{e}(\mathbf{h}, \mathbf{A}, \lambda)$ [9] следующим образом:

$$x_1 = r\cos\lambda + \frac{x_3 h_1}{h + h_3}, \qquad \dot{x}_1 = \frac{1}{r^2}(x_3 h_2 - x_2 h_3 + r\dot{r}x_1),$$

$$x_2 = r\sin\lambda + \frac{x_3 h_2}{h + h_3}, \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{r^2}(x_1 h_3 - x_3 h_1 + r\dot{r}x_2),$$

$$x_3 = -\frac{r}{h}(h_1\cos\lambda + h_2\sin\lambda), \qquad \dot{x}_3 = \frac{1}{r^2}(x_2 h_1 - x_1 h_2 + r\dot{r}x_3).$$

Здесь

$$r = \frac{h^2}{\mu + c}, \quad \dot{r} = \frac{s}{h}, \quad A = (c^2 + s^2)^{1/2},$$

$$c = \gamma\cos\lambda + \delta\sin\lambda, \quad s = \gamma\sin\lambda - \delta\cos\lambda,$$

$$\gamma = A_1 - \frac{A_3 h_1}{h + h_3}, \quad \delta = A_2 - \frac{A_3 h_2}{h + h_3}.$$

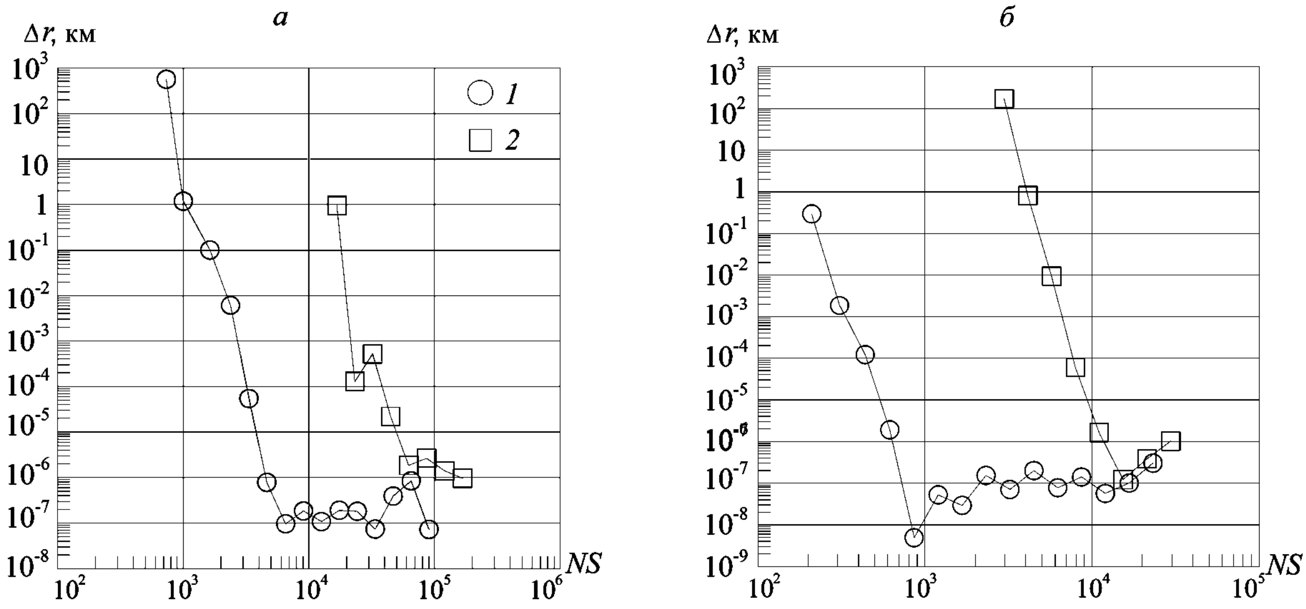
Элементы Роя вычисляются путем численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые можно представить в виде [9]

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{h}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x} \times \mathbf{P}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \left(\mathbf{P} \times \mathbf{h}\right) + \left(\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{h}}\right), \quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{r^2} + \frac{h_1\dot{h}_2 - h_2\dot{h}_1}{h\left(h + h_3\right)},$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}, \quad (2)$$

с начальными условиями, составляющими начальный вектор состояния динамической системы в пространстве элементов $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(t_0)$. В (2) $\mathbf{h}$ – оскулирующий момент количества движения ($h = |\mathbf{h}|$); $\mathbf{A}$ – вектор Лапласа ($A = |\mathbf{A}|$); λ – истинная долгота исследуемого тела (сумма долготы восходящего узла, аргумента перицентра и истинной аномалии). Элементы Роя выражаются через прямоугольные координаты по следующим формулам:



Характеристики точность − быстродействие для спутников Марса:
а − Фобос, *б* − Деймос; *1* – уравнения Роя, *2* – уравнения в прямоугольных координатах

$$h_1 = x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2, \quad h_2 = x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3, \quad h_3 = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1,$$
$$A_1 = Dx_1 - K\dot{x}_1, \quad A_2 = Dx_2 - K\dot{x}_2, \quad A_3 = Dx_3 - K\dot{x}_3, \tag{3}$$
$$\cos\lambda = \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_3}{|\mathbf{x}|}\frac{h_1}{h+h_3}, \quad \sin\lambda = \frac{x_2}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_3}{|\mathbf{x}|}\frac{h_2}{h+h_3}, \quad K = |\mathbf{x}|\cdot|\dot{\mathbf{x}}|, \quad D = |\dot{\mathbf{x}}|^2 - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|}.$$

Функция $\mathbf{P}$ вычисляется как сумма различных возмущающих сил, действующих на движение спутников Марса:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_P \tag{4}$$

($\mathbf{P}_M$ – гравитационное поле Марса; $\mathbf{P}_S$ – притяжение Солнца; $\mathbf{P}_P$ – притяжения планет Солнечной системы и Луны).

3. Оценка эффективности уравнений движения. Для сравнения представленной модели с существующими моделями выполнено численное исследование движения спутников. Сравнение проводилось с моделью в прямоугольной системе координат. Дифференциальные уравнения (2)−(4) интегрировались методом Эверхарта 12-го порядка с переменным шагом в компьютерной арифметике с двойной точностью. Движение спутников рассматривалось на временном интервале, составляющем один год. В течение этого промежутка времени Фобос совершает приблизительно 1000 оборотов, Деймос − 300 оборотов.

Проведена оценка эффективности численных моделей, характеризуемой точностью вычисляемых координат спутников и быстродействием их получения. В качестве меры быстродействия численного моделирования было принято число шагов интегрирования NS. Ошибка интегрирования оценивалась как разность численного и точного решений $\Delta r = |\Delta\mathbf{x}|$.

Путем варьирования параметра интегратора, отвечающего за выбор переменного шага интегрирования, были получены характеристики точность – быстродействие. Результаты приведены на рисунке. Видно, что при численном интегрировании уравнений в элементах для достижения точности Δr от 1 до 10^{-7} км требуется приблизительно в 10 раз меньше шагов интегрирования NS, чем при решении дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах.

Следует отметить, что с увеличением объема вычислений (с увеличением NS) возрастает ошибка округления (несистематическое поведение характеристик), которая фактически определяет уровень наивысшей точности, достижимой в арифметике с двойной точностью. Таким образом, поскольку уравнения Роя позволяют получать заданную точность при меньшем числе шагов, для них уровень наивысшей точности оказывается почти на порядок выше, чем для классических уравнений в прямоугольных координатах. На рисунке видно, что для Фобоса уравнения Роя позволяют получить точность порядка 10^{-7} км, тогда как уравнения в прямоугольных координатах − не более 10^{-6} км.

Заключение. Таким образом, в работе получены оценки эффективности использования уравнений в элементах Роя и в прямоугольных координатах при численном моделировании орбитального движения спутников Марса. Результаты показали, что уравнения в элементах Роя позволяют выполнять численное моделирование значительно более эффективно по сравнению с классическими уравнениями в прямоугольных координатах. В частности, одна и та же методическая точность в представлении вектора положения для уравнений Роя достигается на порядок быстрее.

Список литературы

1. SINCLAIR A. T. The orbits of the satellites of Mars // Vistas Astronom. 1978. V. 22, pt. 2. P. 133−140.

2. SHOR V. A. Motion of Martian satellites // Preprint Sternberg Astronom. Inst. 1989. V. 13. P. 61−75.

3. CHAPRONT-TOUZE M. Orbits of the Martian satellites from ESAPHO and ESADE theories // Astronom. Astrophys. 1990. V. 240. P. 159−172.

4. EMELYANOV N. V., VASHKOVYAK S. N., NASONOVA L. P. The dynamics of Martian satellites from observations // Astronom. Astrophys. 1993. V. 267, N 2. P. 634−642.

5. БОРДОВИЦЫНА Т. В., ШАРКОВСКИЙ Н. А. Эффективный алгоритм численного моделирования движения Фобоса, спутника Марса // Изв. вузов. Физика. 1994. № 10. С. 8−12.

6. LAINEY V., DEHANT V., PÄTZOLD M. First numerical ephemerides of the Martian moons // Astronom. Astrophys. 2007. V. 465, N 3. P. 1075–1084.

7. AVDYUSHEV V. Numerical stabilization of orbital motion // Celest. Mech. 2003. V. 87, iss. 4. P. 383–409.

8. АВДЮШЕВ В. А. Численное моделирование орбит. Томск: НТЛ, 2010.

9. РОЙ А. Е. Движение по орбитам. М.: Мир, 1981.

*Баньщикова Мария Александровна − канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
Научно-исследовательского института прикладной математики
и механики Томского государственного университета;
Титаренко Екатерина Юрьевна – ст. преп. Института кибернетики
Томского политехнического университета; e-mail: am@am.tpu.ru*

Дата поступления − 12.09.12 г.