СИНТЕЗ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫХ ОБЪЕКТОВ

А. В. Воронин, Т. А. Щелканова

Институт кибернетики Национального исследовательского
Томского политехнического университета, 634050, Томск, Россия

УДК 621.37

Исследован компенсационный метод синтеза полиномиальных регуляторов с учетом возможности обеспечения заданной статической ошибки замкнутой системы. Проанализированы возможности создания регуляторов по методу желаемой передаточной функции, при которых могут быть получены заданные показатели качества, в частности значение статической ошибки управления.

Ключевые слова: неминимально-фазовый объект, передаточная функция, нули, полюсы, статическая ошибка.

The article deals with the compensation method for synthesis of polynomial regulators to reflect possibility of providing a given static error of a closed system. The authors have analyzed the algorithm for obtaining the desired regulator transfer function that allows getting similar quality, in particular, the level of static error.

Key words: nonminimal-phase object, transfer function, zero, poles, static error.

Введение. В современной теории автоматического управления существует большое количество методов синтеза регуляторов. Некоторые из них концептуально просты, однако их использование ограничивается отсутствием четких рекомендаций относительно применения этих методов для конкретных объектов и требований к их качеству. К числу таких методов относятся методы синтеза компенсационных регуляторов [1], с использованием которых в рамках общего подхода для одного объекта может быть получено несколько регуляторов различных порядков. Все эти регуляторы основаны на идеях метода желаемой передаточной функции, в соответствии с которыми нули и полюсы системы размещаются в заданных точках комплексной плоскости. В данной работе рассматривается возможность обеспечения регулятора дополнительными свойствами, в частности обеспечения заданного уровня установившейся статической ошибки.

Описание метода желаемой передаточной функции. Идея синтеза регулятора методом желаемой передаточной функции состоит в том, что для известной передаточной функции объекта

$$W_0(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \ldots + p_0}{r_n s^n + r_{n-1} s^{n-1} + \ldots + r_0} \qquad (1)$$

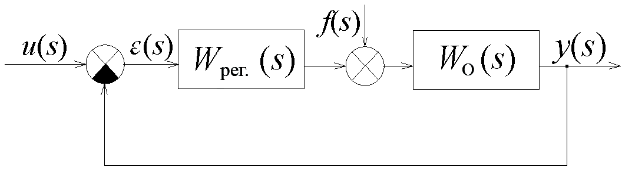

Рис. 1. Структурная схема системы управления

и желаемой передаточной функции замкнутой системы по управлению $W_{ж}(s)$ для структурной схемы, представленной на рис. 1, можно записать

$$\frac{W_{\text{рег}}(s)W_{\text{O}}(s)}{1+W_{\text{рег}}(s)W_{\text{O}}(s)} = W_{ж}(s),$$

где $W_{\text{рег}}(s)$ – искомая передаточная функция регулятора. Разрешив это равенство относительно $W_{\text{рег}}(s)$, получаем

$$W_{\text{рег}}(s) = \frac{1}{W_{\text{O}}(s)} \frac{W_{ж}(s)}{1-W_{ж}(s)}. \tag{2}$$

Данный подход хорошо известен, однако его непосредственное применение для неминимально-фазовых объектов приводит к физически не реализуемой или негрубой системе, так как регулятор, полученный по формуле (2), содержит в качестве сомножителя величину, обратную передаточной функции объекта, что приводит к сокращению нулей и полюсов, в том числе правых. Компенсация левых полюсов не нарушает устойчивости объекта, однако может вызывать скрытые колебания координат, которые часто нежелательны, так как приводят к дополнительному расходу энергии управления и увеличению динамических нагрузок в силовой части системы.

Получить работоспособную систему можно, наложив ряд ограничений на структуру желаемой передаточной функции замкнутой системы $W_{ж}(s)$ и передаточную функцию регулятора $W_{\text{рег}}(s)$ [2, 3]. В частности, можно потребовать, чтобы функция $W_{ж}(s)$ была представима в виде

$$W_{ж}(s) = \frac{P(s)}{G(s)} M(s), \tag{3}$$

где $G(s)$ – характеристический полином желаемой передаточной функции; $M(s) = m_k s^k + m_{k-1}s^{k-1} + \ldots + m_0$ – полином, подлежащий определению. При выполнении данного условия передаточная функция регулятора не будет содержать нулей, сокращающихся с нулями объекта.

Для того чтобы функция $W_{\text{рег}}(s)$ не содержала полюсов, сокращающихся с нулями объекта, необходимо выполнение условия

$$1 - W_{ж}(s) = \frac{R(s)}{G(s)} N(s), \tag{4}$$

где полином $N(s) = n_l s^l + n_{l-1}s^{l-1} + \ldots + n_0$ также подлежит определению. Из (3) и (4) следует

$$W_{\text{рег}}(s) = \frac{M(s)}{N(s)}. \tag{5}$$

Для вычисления коэффициентов полиномов $N(s)$ и $M(s)$ необходимо выполнить подстановку (3) в (4), в результате чего получаем полиномиальное уравнение

$$P(s)M(s) + R(s)N(s) = G(s), \tag{6}$$

из которого может быть сформирована система уравнений относительно коэффициентов искомых полиномов $N(s)$ и $M(s)$.

Выбор порядков полиномов $G(s), N(s), M(s)$ зависит от условий разрешимости, физической осуществимости и грубости [3], которые могут быть записаны в виде системы неравенств относительно степеней полиномов рассматриваемых передаточных функций.

Будем использовать величину n_G для обозначения порядка полинома $G(s)$. Так как число уравнений относительно коэффициентов, получаемых из (5), равно $n_G + 1$, а число неизвестных равно $n_M + n_N + 2$, для разрешимости системы должно выполняться неравенство

$$n_G \le n_M + n_N + 1. \tag{7}$$

Для выполнения условия грубости необходимо, чтобы относительный порядок передаточной функции регулятора был неотрицательным. Очевидно, что это условие выполняется, если

$$n_M \le n_N + r, \tag{8}$$

где r – необходимый порядок астатизма синтезируемой системы.

Относительный порядок передаточной функции в левой части (4) равен нулю. Следовательно, относительный порядок передаточной функции в правой части (4) также должен быть равен нулю. Таким образом:

$$n_G = n_R + n_N + r. \tag{9}$$

Естественным ограничением является также условие правильности передаточной функции желаемой системы

$$n_G \ge n_P + n_M + r, \tag{10}$$

Выражения (7)–(10) учитываются при определении степеней неопределенных полиномов $M(s)$ и $N(s)$, в качестве которых обычно рекомендуется выбирать минимально возможные степени. Из этих выражений также можно определить ограничения снизу на порядок желаемой передаточной функции системы n_G

$$n_G \ge 2n_R - 1. \tag{11}$$

Очевидно, что при использовании такого подхода невозможно обеспечить произвольную функцию $W_{\text{ж}}(s)$, т. е. произвольное расположение ее полюсов и нулей. Обычно задается лишь расположение полюсов исходя из требований к динамическим характеристикам замкнутой системы и ее астатизму. Вместе с тем метод позволяет частично управлять нулями замкнутой системы, которую можно использовать для получения наилучшего или заданного качества.

Постановка задачи. Из соотношений (7)–(10) следует, что выбор полиномов $G(s), N(s), M(s)$, а следовательно, и $W_{\text{рег}}(s)$ не является однозначным. Эта неоднозначность может быть использована для обеспечения выполнения дополнительных требований к замкнутой системе, одним из которых является статическая точность. Известно, что одним из способов повышения статической точности является введение астатизма. Однако при использовании этого метода уменьшается запас устойчивости и снижается быстродействие. Другим вариантом является обеспечение заданного уровня статической ошибки регулирования.

В предположении, что передаточная функция регулятора определяется отношением (5), установившаяся ошибка ε_∞ для схемы на рис. 1 может быть записана в виде

$$\varepsilon_\infty = \frac{1}{1+k}u_\infty + \frac{p_0/r_0}{1+k}f_\infty, \tag{12}$$

где $k = (m_0/n_0)(p_0/r_0)$. При фиксированных p_0 и r_0 увеличение коэффициента усиления разомкнутой системы и соответственно уменьшение ε_∞ при сохранении желаемого характеристического полинома $G(s)$ возможно только тогда, когда имеется возможность варьировать коэффициенты n_0 и m_0. Для этого необходимо, чтобы уравнение синтеза (6) было недоопределено, т. е. число неизвестных было больше числа уравнений.

Пусть объект управления описывается передаточной функцией (1). В соответствии с (11) минимальный порядок желаемого полинома $n_G = 2n-1$ и число уравнений, которые можно получить на основе (6), равно $2n$. В соответствии с (9) размерность полинома $N(s)$ равна $n_N = n-1$. Соответственно число неизвестных коэффициентов равно n_i – n. Максимальная размерность полинома $M(s)$, соответствующая реализуемому интегродифференцирующему регулятору, согласно (5) равна

$$n_M = n_N = n-1,$$

а число неизвестных коэффициентов m_i равно n. Полученная система уравнений относительно n_i, m_i имеет единственное решение и не позволяет регулировать уровень статической ошибки замкнутой системы. Таким образом, возможность подстройки статической ошибки требует более высоких порядков полиномов $G(s), N(s), M(s)$, чем те минимальные значения, которые следуют из (7)–(10).

Рассмотрим возможности обеспечения дополнительной точности и грубости компенсационного полиномиального регулятора на примере расчета регулятора для неустойчивого объекта – перевернутого маятника, описываемого дифференциальным уравнением

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{2L}g\varphi + \frac{3}{2L}u\,.$$

Здесь L – длина маятника; φ – угол отклонения маятника от вертикали; u– управляющее воздействие. Объект является структурно-неустойчивым, так как характеристическое уравнение имеет два вещественных корня – положительный и отрицательный.

Передаточная функция объекта по управлению имеет вид

$$W(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{16}{s^2-16}\,.$$

В соответствии с (11) минимальный порядок желаемого полинома $G(s)$ равен 3. Примем

$$G(s) = (s+10)^3 = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000\,.$$

В данном случае из (3) следует $N(s) = n_1 s + n_0$. Соответственно полином $M(s)$ должен быть не выше первого порядка. Из условия разрешимости следует $M(s) = m_1 s + m_0$.

Условия (2), (3) имеют вид

$$W_{ж}(s) = \frac{16}{(s+10)^3} M(s), \quad 1 - W_{ж}(s) = \frac{s^2 - 16}{(s+10)^3} N(s),$$

а уравнение синтеза –

$$16\,M(s) + (s^2 - 16)\,N(s) = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000\,. \qquad (13)$$

Подставляя $N(s)$ и $M(s)$ в (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, получаем систему уравнений

$$n_1 = 1, \;\; n_0 = 30, \;\; 16m_1 - 16n_1 = 300, \;\; 16m_0 - 16n_0 = 1000.$$

Отсюда следует $m_1 = 19{,}75, m_0 = 92{,}5, n_1 = 1, n_0 = 30$, при этом передаточная функция регулятора равна

$$W_{рег}(s) = \frac{19{,}75s + 92{,}5}{s + 30} = \frac{19{,}75(s + 4{,}68)}{s + 30},$$

а статическая ошибка определяется только особенностями системы и имеет фиксированное значение, управлять которым невозможно.

Ясно, что выбранный порядок полинома $G(s)$ не позволяет учесть при синтезе регулятора требования, предъявляемые к статической ошибке. В этом случае можно усложнить регулятор либо за счет введения астатизма, либо путем повышения порядка $M(s)$. Оба варианта предполагают повышение порядка полинома $G(s)$.

Примем желаемый характеристический полином в виде

$$G(s) = (s+10)^4 = s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10\ 000\,.$$

Тогда условия (2), (3) принимают вид

$$W_{ж}(s) = \frac{16}{(s+10)^4} M(s), \quad 1 - W_{ж}(s) = \frac{s^2 - 16}{(s+10)^4} N(s),$$

а уравнение синтеза –

$$16\,M(s) + (s^2 - 16)\,N(s) = s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10\ 000\,. \qquad (14)$$

Добавим условие физической реализуемости передаточной функции регулятора, т. е. предположим, что $\deg(N) > \deg(M)$. Тогда из (3) находим полиномы минимального порядка

$$M(s) = m_1 s + m_0\,, \;\; N(s) = s^2 + n_1 s + n_0\,.$$

Подставив полученные выражения для $M(s)$ и $N(s)$ в формулу (14) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s, получаем систему уравнений

$$n_1 = 40, \;\; n_0 - 16 = 600,$$

$$16m_1 - 16n_1 = 4000, \;\; 16m_0 - 16n_0 = 10\ 000.$$

Отсюда следует $m_1 = 290$, $m_0 = 1241$, $n_1 = 40$, $n_0 = 616$, при этом передаточная функция регулятора равна

$$W_{рег}(s) = \frac{290s + 1241}{s^2 + 40s + 616} = \frac{290(s + 4{,}28)}{s^2 + 40s + 616}$$

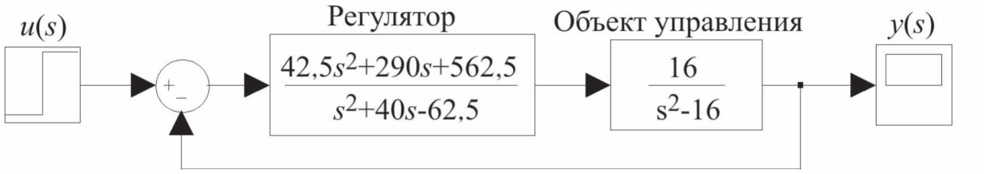

Рис. 2. Структурная схема замкнутой системы с регулятором в ППП Simulink

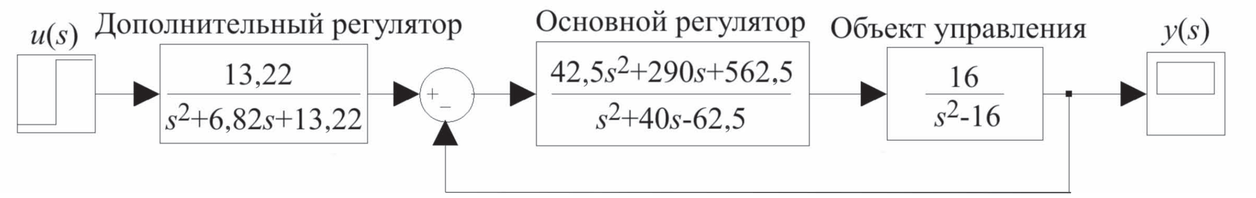

Рис. 3. Структурная схема синтезированной системы в ППП Simulink

Полученное решение однозначно. Следовательно, при минимальных порядках полиномов $N(s), M(s)$ повышение порядка полинома $G(s)$ не позволяет регулировать какие-либо характеристики замкнутой системы, кроме $G(s)$. Однако для рассматриваемого варианта желаемого полинома замкнутой системы $G(s)$ в рамках принятых ограничений порядок полинома $M(s)$ числителя регулятора может быть повышен до $M(s) = m_2 s^2 + m_1 s + m_0$. Тогда полиномиальное уравнение (13) принимает вид

$$16(m_2 s^2 + m_1 s + m_0) + (s^2 - 16)(n_2 s^2 + n_1 s + n_0) = s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10\ 000. \qquad (15)$$

В результате система уравнений для коэффициентов при s является недоопределенной. Она содержит шесть неизвестных и пять уравнений. Введем отношение $k = m_0 / n_0$ и запишем уравнение (15) в виде

$$16(m_2 s^2 + m_1 s + k\, n_0) + (s^2 - 16)(n_2 s^2 + n_1 s + n_0) = s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10\ 000.$$

Как отмечено выше, величина k определяет статическую ошибку в замкнутой системе. Пусть заданный уровень статической ошибки определен как $\varepsilon_\infty = 0{,}1\, y_\infty$. Тогда, учитывая только управление, из формулы (12) получаем

$$\frac{1}{1-k} = 0{,}1.$$

Отсюда следует $k = -9$. Записывая и решая систему уравнений относительно коэффициентов при степенях s, получаем $n_2 = 1$, $n_1 = 40$, $n_0 = -62{,}5$, $m_2 = 42{,}4$, $m_1 = 290$, $m_0 = 562{,}5$. Таким образом, передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_{\text{рег}}(s) = \frac{42{,}4s^2 + 290s + 562{,}5}{s^2 + 40s - 62{,}5}.$$

Структура модели замкнутой системы в пакете Simulink и график переходной функции представлены на рис. 2, 3.

Побочным эффектом обеспечения заданного уровня статической ошибки стало появление двух нулей замкнутой системы в точках $-3{,}41 \pm 1{,}26j$, что привело к существенному перерегулированию в переходной функции (рис. 4). Добавив в прямую цепь регулятор

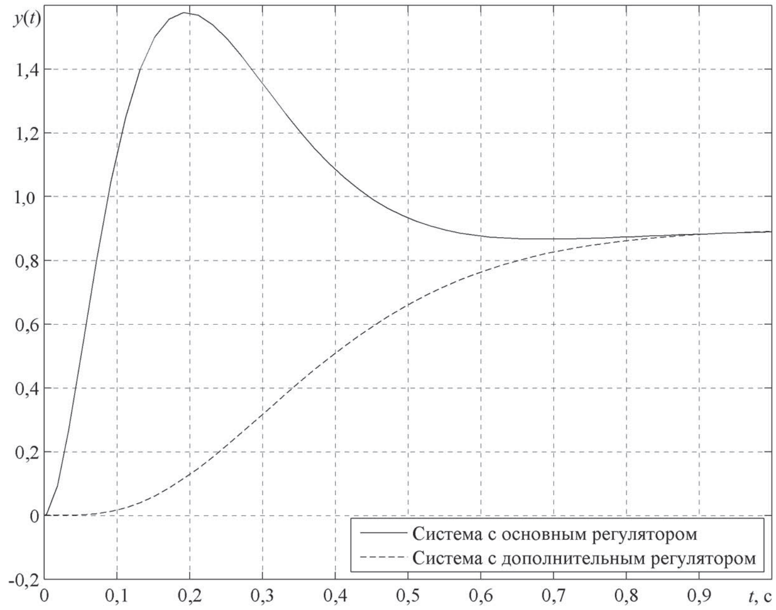

Рис. 4. Переходные характеристики в синтезированных системах

$$W_{\text{рег1}}(s) = \frac{13,22}{s^2 + 6,28s + 13,22},$$

можно добиться желаемого качества переходного процесса (рис. 4). Структурная схема полученной при этом системы представлена на рис. 3.

Из рис. 4 следует, что синтезированная система, содержащая два регулятора – основной и дополнительный, имеет статическую ошибку, равную 0,1, в то же время качество процесса соответствует желаемому.

Выводы. Результаты проведенного исследования свидетельствуют о том, что метод желаемой передаточной функции в модификации [3] позволяет синтезировать регулятор, обеспечивающий управление в системе с заданной точностью, т. е. обеспечивающий заданный уровень статической ошибки. При этом перерегулирование в системе может достигать больших значений. Во избежание этого в систему вводится дополнительное регулирующее звено компенсирующего типа. В результате система имеет заданное значение статической ошибки управления, а также приемлемое перерегулирование.

Список литературы

1. Никулин А. Е. Основы теории автоматического управления. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. М.: Наука, 1987.
3. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2003.

Воронин А. В. – канд. техн. наук, доц. Института кибернетики Томского политехнического университета; e-mail: voroninav@tpu.ru;
Щелканова Т. А. – магистрант Института кибернетики Томского политехнического университета; e-mail: 3ene4ka@sibmail.com

Дата поступления – 15.10.12 г.