

## УПОРЯДОЧЕНИЕ РАБОТ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю. Р. Крупа

ТОО „ИНКОМ“,  
050012, Алма-Ата, Республика Казахстан

УДК 519.852.6

В статье представлена модель математического программирования для оптимизационного расчета задач календарного планирования работ проекта с использованием законов сетей Кирхгофа.

**Ключевые слова:** математическое программирование, сетевое планирование работ, законы Кирхгофа.

In clause present model of mathematical programming for optimization calculation of task scheduling a project using laws networks Kirhgof.

**Key words:** mathematical programming, scheduling project, lows of Kirhgof.

**Введение.** Наиболее часто используемые классические методы для сетевого планирования работ — это метод критического пути (СРМ) и метод анализа и вероятностной оценки работ (PERT).

Метод СРМ позволяет рассчитать календарные графики выполнения комплекса работ на основе задаваемых оценок продолжительности выполнения каждой работы и определить критический путь для проекта в целом.

Метод PERT позволяет определить вероятности окончания проекта в заданные периоды времени. При использовании метода PERT необходимо задать наименее вероятную продолжительность выполнения каждой работы, наиболее вероятную продолжительность и наибольшую продолжительность для случая, если она будет больше ожидаемой.

Перечисленные методы расчета сетевых планов работ не позволяют использовать в расчете такие важнейшие исходные данные, как объемы работ и потребные ресурсы, без чего трудно получить план, соответствующий реальной ситуации. Кроме того, указанные методы не позволяют учитывать взаимное влияние множества параллельно выполняемых работ, использовать функции для вычисления времени по работам и не представляют средств минимизации общего времени проекта.

Эти же недостатки по сетевым расчетам можно отнести и к программным продуктам Primavera, MS Project, Rillsoft Project. В данной статье делается попытка решения названных проблем с помощью модели математического программирования.

**1. Общее описание модели.** Задача планирования ставится как детерминированная и решается с помощью модели, в которой используются два закона сетей Кирхгофа [1].

Главные цели создания модели для календарного планирования: рассчитать временные и ресурсные параметры всех работ, минимизировать полное время проекта, упорядочить работы во временном интервале по заданной технологии.

Требования:

- 1) расчетная схема строится по правилам ориентированного графа;
- 2) при создании расчетной схемы используется технология производства работ;
- 3) для отображения технологических особенностей производства используются следующие типы дуг: рабочие, временные связи, транзитные связи;
- 4) каждая рабочая дуга (работа проекта) характеризуется обязательными атрибутами (объемом, временем, ресурсом) и дополнительными: предельными величинами по времени и по ресурсам [2];
- 5) результаты расчета:
  - полное время проекта;
  - данные по дугам: временные, ресурсные, величины резервов времени и ресурсов.

Модель создается по сети, которая отображает необходимую последовательность работ проекта. Сеть состоит из множества узлов и множества рабочих дуг, временных связей и транзитных связей. Временные связи используются для реализации нужной технологии: установления временных задержек и опережений, синхронизации множества параллельных работ. Транзитные связи служат для передачи ресурсов между рабочими дугами и реализации временных установок. В сети выделяются два особых узла: один соответствует начальному, другой — конечному узлу проекта. В расчетной сети при расчете много-ресурсного плана работ условно выделяются подсети работ, которые выполняются одним ресурсом или рабочими одной специальности. Такая подсеть в обязательном порядке имеет начальный узел для ввода нужного количества ресурса, кроме того, по мере необходимости ресурсы могут вводиться во внутренних узлах подсети.

Основные процессы, реализуемые в предлагаемой модели:

- ввод объемов работ;
- ввод данных по имеющимся ресурсам для производства работ;
- расчет полного времени проекта;
- расчет количественных параметров в элементах сети: ресурсов используемых, ресурсов резервных, времени использованного, времени резервного.

**2. Модель расчетной сети.** Уравнения 2.1, 2.2, 2.3 — уравнения неразрывности потока, т.е. определяют поток ресурсов по дугам в соответствии с первым законом сетей [1].

2.1. *Ограничения по заданным ресурсам на входных узлах  $i$ :*

$$X_i^r \leq R_i^r, l,$$

где  $X$  — величина входного ресурса;  $r$  — индекс ресурса,  $r \in I^r$ ;  $I^r$  — множество ресурсов, используемых в проекте;  $i$  — индекс узла для ввода ресурсов,  $i \in N^r$ . Узлы ввода располагаются в любой точке сети по мере потребности;  $N^r$  — множество узлов, в которых выполняется ввод ресурсов;  $R$  — заданная величина входного ресурса.

2.2. *Ограничения по балансу ресурсов в узлах  $i$ , в которых вводятся ресурсы:*

$$X_i^r - \sum_j (X_{ij}^r + \Delta X_{ij}^r) = 0,$$

где  $r$  — индекс ресурса,  $r \in I^r$ ;  $ij$  — индексы узлов сети,  $ij \in S$ ,  $i$  — индекс начального узла дуги (индекс  $i$  в данном уравнении принадлежит также и множеству  $N^r$ ),  $j$  — индекс конечного узла дуги;  $S$  — множество узлов сети;  $X_i^r$  — величина входного ресурса  $r$  на

входном узле  $i$ ;  $X_{ij}^r$  — величина используемого ресурса  $r$  выходящей дуги  $i - j$  из узла  $i$ ;  $\Delta X_{ij}^r$  — величина резервного ресурса  $r$  выходящей дуги  $i - j$  из узла  $i$ .

2.3. *Ограничения по балансам входящих и выходящих ресурсов дуг на внутренних узлах сети:*

$$\sum_j (X_{ij}^r + \Delta X_{ij}^r) - \sum_i (X_{ij}^r + \Delta X_{ij}^r) = 0,$$

где  $r$  — индекс ресурса,  $r \in I^r$ ;  $ij$  — индексы узлов сети,  $i, j \in S$ . Это ограничение формируется на узлы сети, исключая начальный и конечный;  $X_{ij}^r$  — величина используемого ресурса  $r$  входящей и выходящей дуги  $i - j$ ;  $\Delta X_{ij}^r$  — величина резервного ресурса  $r$  входящей и выходящей дуги  $i - j$ .

Уравнения 2.4, 2.5 и 2.6, определяющие время работ, строятся в соответствии со вторым законом сетей для всех независимых циклов [1]. Множество циклов определяется по алгоритму определения независимых циклов [3].

Количество независимых циклов сети равно цикломатическому числу и определяется по формуле:  $M = K - Z + 1$ , где  $M$  — цикломатическое число;  $K$  — количество дуг в сети;  $Z$  — количество узлов в сети.

2.4. *Ограничения по времени работ в независимых циклах.* Ограничение представляет сумму значений времени на дугах в независимом цикле:

$$\sum_{Q_{ij} \in \mu} \text{sign}(ij) [F_{ij}(X_{ij}^r) + \Delta t_{ij}^r] = 0,$$

где  $Q_{ij}$  — множество дуг  $i - j$ , принадлежащих независимому циклу;  $\mu = 1, 2, \dots, M$  — множество независимых циклов сети;  $r$  — индекс ресурса;  $r \in I^r$ ;  $i, j$  — индексы узлов сети,  $i, j \in S$ ;  $\text{sign}(ij)$  — знак равен „+“ (плюсу), если направление дуги совпадает с направлением обхода дуг в цикле, иначе знак равен „-“ (минусу);  $F_{ij}(X_{ij}^r)$  — функция используемого времени при выполнении работы ресурсом  $X_{ij}^r$  на дуге  $i - j$ ;  $\Delta t_{ij}^r$  — резервное время на дуге  $i - j$  с ресурсом  $r$ .

2.5. *Уравнение полного пути.* Ограничение по времени работ на независимом цикле составленного из дуг полного пути от начального узла до конечного и временной дугой полного пути с узлами „начальный-конечный“:

$$\sum_{Q_{ij}} \text{sign}(ij) [F_{ij}(X_{ij}^r) + \Delta t_{ij}^r] - T_{ij} = 0,$$

где  $Q_{ij}$  — множество дуг  $i - j$ , образующих любой путь между начальным и конечным узлами сети;  $T_{ij}$  — время дуги полного пути. Представляется в двух вариантах: вычисляется как расчетная величина в оптимизационном расчете; заданная величина. Используется как директивное время проекта. Остальные обозначения идентичны вышеприведенным.

Вычисленное время полного пути  $T$  показывает время проекта, которое равно критическому временному пути проекта.

2.6. *Целевая функция формируется из множества дуг полного пути и имеет вид:*

$$\sum_{Q_{ij}} \text{sign}(ij) [F_{ij}(X_{ij}^r) + \Delta t_{ij}^r] \Rightarrow \min,$$

где  $Q_{ij}$  — множество дуг  $i - j$ , образующих любой путь между начальным и конечным узлами сети.

2.7. Условие неотрицательности всех переменных:

$$(X_i^r, X_{ij}^r, \Delta X_i^r, \Delta t_{ij}^r, T_{ij}) \geq 0.$$

2.8. Дополнительные (необязательные) требования по параметрам, которые могут возникнуть по технологическим условиям.

Ограничения по предельным величинам ресурсов дуги (работы):

$$X_{ij}^{r \min} \leq X_{ij}^r \leq X_{ij}^{r \max},$$

где  $X_{ij}^r$  — расчетная переменная ресурса дуги;  $X_{ij}^{r \min}, X_{ij}^{r \max}$  — минимальная, максимальная величины ресурса  $r$  на дуге  $i - j$ .

Ограничения по предельным временным параметрам дуги (работы):

$$T_{ij}^{\min} \leq F_{ij}(X_{ij}^r) \leq T_{ij}^{\max},$$

где  $T_{ij}^{\min}, T_{ij}^{\max}$  — минимальная, максимальная величины времени на дуге  $i - j$ ;  $F_{ij}(X_{ij}^r)$  — функция расчета времени дуги.

Ограничения по предельным временным параметрам дуги (временной связи):

$$T_{ij}^{\min} \leq Z_{ij} \leq T_{ij}^{\max},$$

где  $Z_{ij}$  — расчетная переменная временной дуги (связи);  $T_{ij}^{\min}, T_{ij}^{\max}$  — минимальная, максимальная величины времени на дуге  $i - j$ .

**3. Комментарии по представленной модели.** Множество критических временных путей или критических ресурсных путей определяется по рабочим дугам, у которых время резерва по времени и/или по ресурсу соответственно равно нулю.

Объемы работ в описании модели не представлены, т. к. они используются в функции расчета времени, которая представляется выражением в общем виде  $F_{ij}(X_{ij}^r)$ , т. е. показывается только аргумент  $X_{ij}^r$ , который вычисляется в расчете.

Функция используемого времени  $F_{ij}(X_{ij}^r)$  при выполнении работы должна быть линейной, но линейная функция, как правило, не дает достаточную точность вычисления, поэтому применяются нелинейные функции. Например, часто применяется формула гиперболы. Приведение нелинейной функции к линейному виду можно сделать с использованием, например, сепарабельного подхода.

**Заключение.** Представленная модель позволяет в рамках одной задачи математического программирования получить план производства работ для реальных производственных условий.

1. Расчет можно выполнять в двух режимах:

- оптимизация времени при заданных ресурсах;
- оптимизация ресурсов при директивном задании времени проекта.

2. Основные параметры результатов:

- полное время проекта;
- оптимизированные параметры плана: время работы, используемое и резервное, ресурсы работы, используемые и резервные, время на временных и транзитных связях, величина ресурсов на транзитных связях;

– согласованные и распределенные по времени работы в соответствии с расчетными величинами.

3. По временным рассчитанным данным для наглядности можно построить схему с привязкой дуг к временной шкале, которая будет показывать последовательность производства работ в соответствии с технологией. В схеме для отражения технологии используются все виды дуг: рабочие, временные связи и транзитные связи.

4. Описываемую модель можно применять как в непрерывном варианте решения, так и в частично целочисленном варианте. Применение непрерывного варианта решения имеет ряд существенных преимуществ, например:

– по статистическим исследованиям большое число проектов заканчивается со значительными нарушениями плановых сроков и других показателей. Вариантом повышения надежности плана можно считать следующее обстоятельство: например, полученное не целое расчетное значение, допустим, ресурса, дает точно необходимую величину для выполнения заданного объема работы. Но на работу может быть поставлено только целое количество ресурса, не меньше рассчитанного, а избыток в виде дробной части надо принимать как некоторый запас надежности при исполнении плана;

– если все же надежность плана считается недостаточной, то увеличить надежность плана можно посредством дополнения модели простым алгоритмом для управления запасами (резервами) по времени и/или ресурсам и, следовательно, понижения рисков (см. п. 5);

– уход от использования для расчетов дискретных оптимизационных программ имеет также и то преимущество, что позволяет решать задачи больших размерностей и с меньшими затратами времени. В этой связи надо учитывать, что применение в модели нелинейных функций времени и последующей линеаризацией увеличивает размерность задачи (как по числу переменных, так и по уравнениям) в разы.

5. Решение, получаемое по предлагаемой модели, является оптимальным, которому характерны минимизированные величины резервов и получение точных значений по времени и ресурсам, получаемым из заложенной в модели функции расчета времени. Иными словами, по вероятностной оценке получаем оптимистичный и, значит, рискованный план. В связи с тем, что в описываемой модели можно легко манипулировать (управлять) величинами рассчитываемых резервов, то для снижения рисков календарного плана можно предложить следующий сценарий расчета плана работ, основанный на увеличении или понижении величин временных и ресурсных резервов работ:

– первый этап: получение оптимистичного плана, который по всем параметрам удовлетворяет заказчика, но который может быть исполнен только в идеальных условиях;

– второй этап: расчет плана с пониженными рисками. Вводим директивные требования на второй расчет плана, основываясь на главных параметрах от первого расчета, и производим новый расчет. Например, задаем директивное время проекта от первого расчета, резервы по времени (на критических работах определенных производительных сил или определенных работах) увеличиваем на 15 %, а резервы по ресурсам увеличиваем на 10 %. При этом, естественно, потребуются дополнительные ресурсы, но все директивные установки будут выполнены.

В настоящее время изменение временных и ресурсных запасов работ для изменения рисков в сетевых планах основывается на опыте, интуиции и ответственности руководителя за исход проекта. Факторы, которые могут использоваться для выборки рискованных объектов при планировании, — это критические пути, отдельные части критических пу-

тей, важные работы или цепочки (на расчетной схеме) производительных сил в оценке руководителя работ.

6. Модель, описанная в пунктах 2.1–2.8, представляет описание модели в общем виде. Для описания конкретной технологии производства работ, т. е. формирования модели на нужный проект, и последующего расчета задачи планирования надо определить используемые типы дуг и их параметры. Допустим, что в расчетной схеме будут использованы такие дуги, как рабочая, временная и транзитная:

– рабочая дуга определяет процесс реализации плановой работы. Для решения будут использованы четыре параметра: ресурсы используемые, ресурсы резервные, время рабочее (в виде функции) и время резервное. Поэтому в расчете по рабочей дуге надо назначить три переменных: по величине используемого ресурса, по величине резервного ресурса и величине резервного времени. Величина же рабочего (используемого) времени дуги вычисляется по функции времени, заложенной в модели. Расчет используемого времени для показа пользователю по функции времени выполняется после оптимизационного расчета;

– временная дуга представляется одной переменной, показывающей рассчитанное время;

– транзитная дуга представляется двумя переменными: первая служит для определения величины потока ресурса, проходящего через дугу, и вторая переменная — для определения времени на этой дуге.

## Список литературы

1. ПЕТРОВИЧ С. И. Математические модели в оперативном планировании развития горных работ на шахтах. Казахстан: „Наука“, 1986. С. 38–43.
2. Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления. Экономика. 1974. С. 55–76.
3. Цой С., ЦХАЙ С. М. Прикладная теория графов. Казахстан: „Наука“, 1971. С. 30–43.

*Крупа Юрий Романович — гл. инженер ТОО „Инком“,  
e-mail: fylm081119@yandex.ru.*

Дата поступления — 10.05.2014