

ВРЕМЯ РЕАЛИЗАЦИИ АСИНХРОННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МАКРОКОНВЕЙЕРНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ОБРАБОТКЕ

П. А. Павлов

Полесский государственный университет,
225710, Пинск, Республика Беларусь

УДК 681.3.06

Предлагаются математическая модель эффективной организации вычислений неоднородными процессами в многопроцессорных системах и комплексах макроконвейерного типа, а также решение задач определения времени реализации асинхронных процессов в системах макроконвейерного типа с одним каналом обмена и при ограниченном их числе.

Ключевые слова: асинхронный режим, параллельная обработка, макроконвейерные вычисления, канал обмена, конкурирующий процесс, программный ресурс, неоднородная система, масштабируемость, структурирование, конвейеризация.

The mathematical model of the effective organization of calculations by non-uniform processes in the multiprocessor systems and complexes of macroconveyor type, the solution of problems of definition of time of realization of asynchronous processes in systems of macroconveyor type with one channel of an exchange is offered and at their limited number.

Key words: asynchronous mode, parallel processing, macroconveyor calculations, the exchange channel, competing process, program resource, non-uniform system, scalability, structuring, conveyorization.

Введение. Одной из наиболее перспективных концепций параллельной обработки [1] для решения широкого класса задач является концепция *макроконвейерной* организации вычислений над структурами данных [2]. Интерес к этой концепции постоянно растет в связи с широким использованием локальных и глобальных сетей, облачных вычислений, вычислительных многопроцессорных систем (МС) и комплексов, сетевого аппаратного и прикладного программного обеспечения и т. д. Основная идея заключается в том, что при распараллеливании и распределении вычислений между процессорами (процессорными узлами) каждому отдельному процессору на очередном шаге дается такое задание, которое позволяет ему длительное время работать автономно без взаимодействия с другими процессорами. Уменьшение числа и объемов обмена сообщениями, которыми обмениваются параллельно работающие узлы, как правило, приводит к уменьшению общего времени решения поставленной задачи, являющегося главным критерием качества распараллеливания вычислений.

Одним из важнейших требований к современным макроконвейерным вычислительным системам (МВС) и вычислительным комплексам (ВК) является их *масштабируемость* (*scalability*) [3]. Следует отметить, что увеличение производительности систем макроконвейерного типа может быть достигнуто не только за счет увеличения количества аппаратных и программных ресурсов, но и с помощью распределения процессов вычислений с использованием принципов *структурирования* (*декомпозиции*) и *конвейеризации* [4].

Все это заставляет задуматься над новыми принципами и методами эффективного планирования параллельных вычислительных процессов и распределения ресурсов в системах макроконвейерного типа, созданием эффективного алгоритмического и программного обеспечения, обеспечением однозначности результата выполнения программ, построением и исследованием математических моделей и т. д.

В работе строится математическая модель эффективной организации вычислений неоднородными процессами в многопроцессорных системах макроконвейерного типа, а также решаются задачи определения времени реализации асинхронных параллельных процессов в системах макроконвейерного типа с одним каналом обмена и при ограниченном их числе. Результаты работы могут быть использованы при проектировании и создании как самих многопроцессорных систем макроконвейерного типа, так и системного и прикладного программного обеспечения для них.

1. Метод структурирования программных ресурсов и макроконвейерная обработка. Конструктивными элементами для построения математических моделей систем макроконвейерных вычислений являются понятия процесса и программного ресурса [5].

Процесс будем рассматривать как последовательность блоков (команд, процедур) Q_1, Q_2, \dots, Q_s , для выполнения которых используется множество процессоров (обрабатывающих устройств, интеллектуальных клиентов). Для ускорения выполнения процессы могут обрабатываться параллельно, взаимодействуя путем обмена информацией. Такие процессы называются *кооперативными* или *взаимодействующими* процессами.

Понятие *ресурса* используется для обозначения любых объектов вычислительной системы, которые могут быть использованы процессами для своего выполнения. *Ресурсы* (многократно используемые) ресурсы характеризуются возможностью одновременного использования несколькими вычислительными процессами. Для параллельных систем характерной является ситуация, когда одну и ту же последовательность блоков или ее часть необходимо процессорам выполнять многократно, такую последовательность будем называть *программным ресурсом* (PR), а множество соответствующих процессов — *конкурирующими*.

Структурирование — это основной способ уменьшения сложности больших программ, систем и т. д., который предполагает разбиение сложной системы на части с последующей организацией линейного или частичного порядка выполнения на множестве этих частей [6].

Принципы структурирования программ и алгоритмов приобретают особенно фундаментальный характер в области параллельного программирования. Именно структурирование позволяет наиболее эффективно решать многие проблемы параллельных вычислений на различных этапах моделирования и проектирования как самих МС и ВК, так и алгоритмического, программного прикладного и системного обеспечения для них.

Пусть PR — программный ресурс, $n \geq 2$ — число конкурирующих процессов. Общее время выполнения всех процессов, использующих PR, можно существенно сократить, если воспользоваться структурированием программного ресурса на блоки Q_1, Q_2, \dots, Q_s с последующей конвейеризацией как блоков по процессам, так и процессов по процессорам макроконвейерной многопроцессорной вычислительной системы. Как правило, структурирование программного ресурса на блоки осуществляется исходя из физического смысла задачи на этапах создания математической модели и алгоритмов ее решения или путем анализа готовой последовательной программы с целью ее декомпозиции. Количество блоков зависит от количества процессов и процессоров, каналов передачи данных, длительно-

сти выполнения программы, используемой в качестве программного ресурса, системных расходов и других параметров.

Один из возможных механизмов взаимодействия процессов, процессоров и блоков в системах макроконвейерного типа следующий. Блоки, процессы и процессоры нумеруются в порядке $(1, 2, \dots, s)$, $(1, 2, \dots, n)$ и $(1, 2, \dots, p)$ соответственно. Причем из физических соображений на множестве блоков установлен линейный порядок их выполнения. Предполагается, что все n процессов используют одну копию структурированного программного ресурса. В дальнейшем под *процессом* будем понимать выполнение блоков PR в порядке $(1, 2, \dots, s)$. Операционная система или специально выделенный организующий процесс предоставляет блоки Q_1, Q_2, \dots, Q_s структурированного программного ресурса каждому из процессов в порядке $(1, 2, \dots, n)$. При этом в случае *сосредоточенной* обработки происходит монополизация процессора i -м процессом, $i = \overline{1, n}$, а в случае *распределенной* обработки блоки одного и того же процесса выполняются на разных процессорах. Очевидно, что при наличии в сетевой многопроцессорной системе p процессоров возможно совмещенное во времени выполнение процессов.

Несомненно, организация параллельных вычислений по методу структурирования позволяет получать существенный выигрыш по времени. Так как в результате удачного распараллеливания PR на блоки ввода-вывода и счета появляется возможность совмещенного выполнения блоков, исключается один из самых времязатратных этапов повторной загрузки программных ресурсов с внешних носителей, эффективно решается проблема создания параллельно используемых программ большого объема.

Остановимся на взаимосвязях макроконвейерного способа организации вычислений над структурами данных с основными положениями метода структурирования программных ресурсов.

Макроконвейерная технология вычислений над структурами данных предполагает декомпозицию структуры данных на большие информационно-слабозависимые подструктуры. Причем должен соблюдаться основной принцип макроконвейерной технологии обработки данных, который предполагает работу с достаточно крупными подструктурами, способными занимать процессор длительное время. Работа процессоров при этом организуется таким образом, чтобы обмен данными между ними занимал небольшое время по сравнению со временем вычислений.

Пусть PR — программный ресурс, который может быть использован двумя и более конкурирующими процессами, т. е. $n \geq 2$, $p \geq 2$ — число процессоров МВС, причем память может быть как общей для всех процессоров, так и распределенной по процессорам. Возможны следующие варианты организации вычислений.

1. Каждому i -му процессу, $i = \overline{1, n}$, представляется отдельная копия программного ресурса PR. При такой стратегии, в случае $p \geq n$, все n процессов могут выполняться одновременно при условии, что в МС достаточно памяти для размещения n копий программного ресурса (в случае МС с общей памятью) или память каждого процессора МС вмещает отдельную копию программного ресурса (в случае МС с распределенной памятью). Если же $p < n$, то возможна организация циклического выполнения n процессов группами по p .

2. Программный ресурс PR может быть структурирован на блоки Q_1, Q_2, \dots, Q_s . Вычисления в этом случае можно организовать в соответствии с методами структурирования и конвейеризации.

Заметим, что вторая стратегия является наиболее предпочтительной при организации вычислений в МС конвейерного и макроконвейерного типов с целью эффективного использования основных вычислительных ресурсов. Вычисления при этом организуются по всем блокам программного ресурса, выполнение которых составляет вычислительный процесс. Макроконвейерность вычислений в этом случае достигается за счет одновременного выполнения множества конкурирующих процессов, совмещаемых во времени. Основной принцип макроконвейерной организации вычислений обеспечивается за счет структурирования программного ресурса на достаточно крупные по времени выполнения блоки, способные занимать процессор длительное время. Время межпроцессорного обмена данными при этом значительно меньше времени вычислений.

Отметим, что макроконвейерные вычисления имеют принципиальные отличия от микроконвейерных вычислений, где вычисления по типу конвейера выполняются для отдельных арифметических, логических и других операций путем сегментирования этих операций на более мелкие. При макроконвейеризации достигается ускорение в основном векторных операций, а при макроконвейеризации ускорение достигается как за счет микроконвейеризации путем зацепления однотипных операций над векторами, так и за счет совмещения выполнения макроструктур в рамках различных вычислительных процессов.

2. Математическая модель макроконвейерной организации асинхронных конкурирующих процессоров. Пусть МС характеризуется следующими параметрами:

$n, n \geq 2$ — число процессов, одновременно протекающих в многопроцессорной системе;

$p, p \geq 2$ — число процессоров, каждый из которых имеет собственную локальную память; $k, k \geq 1$ — число каналов, через которые каждый из процессоров имеет доступ к внешней памяти, общей для всех процессоров.

Предположим, что в МВС выполняется n процессов, каждый из которых состоит из s блоков обмена и s блоков счета, $s \geq 1$. Времена обмена и счета для каждого из процессов представлены в виде матриц t и T размерности $n \times s$, в которых i -е строки соответствуют i -му процессу, $i = \overline{1, n}$:

$$t = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1s} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{ns} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1s} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{ns} \end{bmatrix}.$$

Систему n сосредоточенных конкурирующих процессов будем считать *неоднородной*, если времена обмена и счета блоков Q_1, Q_2, \dots, Q_s программного ресурса зависят от скорости каналов и объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, т. е. разные для разных процессов.

Взаимодействие процессов с каналами и процессорами характеризуется следующими условиями:

- 1) к выполнению одновременно готово p процессов из n ;
- 2) в каждый момент времени k процессов из n , одновременно протекающих в МС, выполняются синхронно (без ожиданий), остальные в очереди ждут освобождения каналов;
- 3) во время обмена каждый процесс монополизует один и тот же канал, во время счета — процессор;
- 4) очередной j -й блок счета на каждом процессоре выполняется только после завершения соответствующего j -го блока обмена, а каждый $(j + 1)$ -й блок обмена выполняется после завершения j -го блока счета;

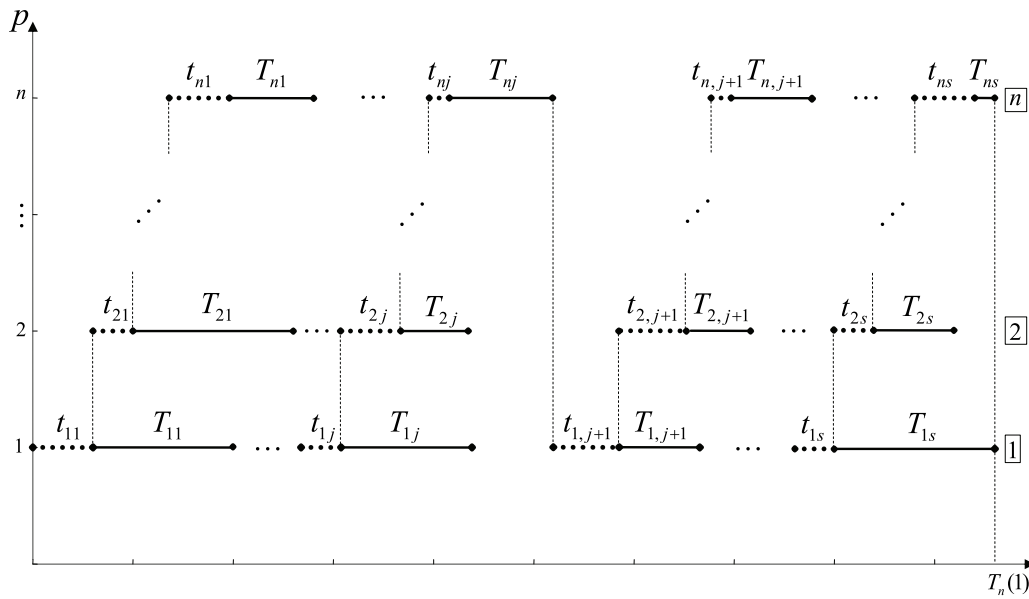


Рис. 1. Несовмещенная диаграмма Ганта с одним каналом обмена

5) процессы считаются равноприоритетными, а режим работы каналов является циклическим.

Условия 1–5 определяют *асинхронный* режим взаимодействия процессов, каналов и процессоров, который допускает как простои каналов из-за занятости процессоров, так и простои процессоров из-за занятости каналов обмена.

В этих предположениях рассмотрим решение задач получения математических соотношений для вычисления минимального общего времени выполнения множества конкурирующих процессов в МВС.

3. Время реализации асинхронных процессов в системах макроконвейерного типа с одним каналом обмена. Обозначим через $T_n(k)$ общее время выполнения всех n процессов, которые используют k каналов обмена.

Заметим, что при $p \geq k \geq n$ в рамках принятой модели макроконвейерных вычислений $T_n(k)$ составит величину:

$$T_n(k) = T_n(n) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^s (t_{ij} + T_{ij}).$$

Если окажется, что $p > k > n$, то $k - n$ каналов будут не задействованы, а $p - n$ процессоров будут простаивать.

Пусть имеется только один канал, т.е. $k = 1$. Предположим, что $n \leq p$. На рис. 1 приведена несомещенная диаграмма Ганта, отображающая взаимодействие n процессов (номер процесса изображен справа в прямоугольнике) с одним каналом и p процессорами. Причем каждый процесс состоит из $2s$ блоков, $s \geq 1$, которые периодически повторяются в порядке „обмен, счет“. При этом осуществляется конвейеризация каждого из блоков счета по всем n процессорам, на которых все n блоков счета могут выполняться одновременно.

Из анализа несомещенной диаграммы следует, что общее время $T_n(1)$ выполнения n процессов, использующих один канал обмена, можно существенно сократить, если вос-

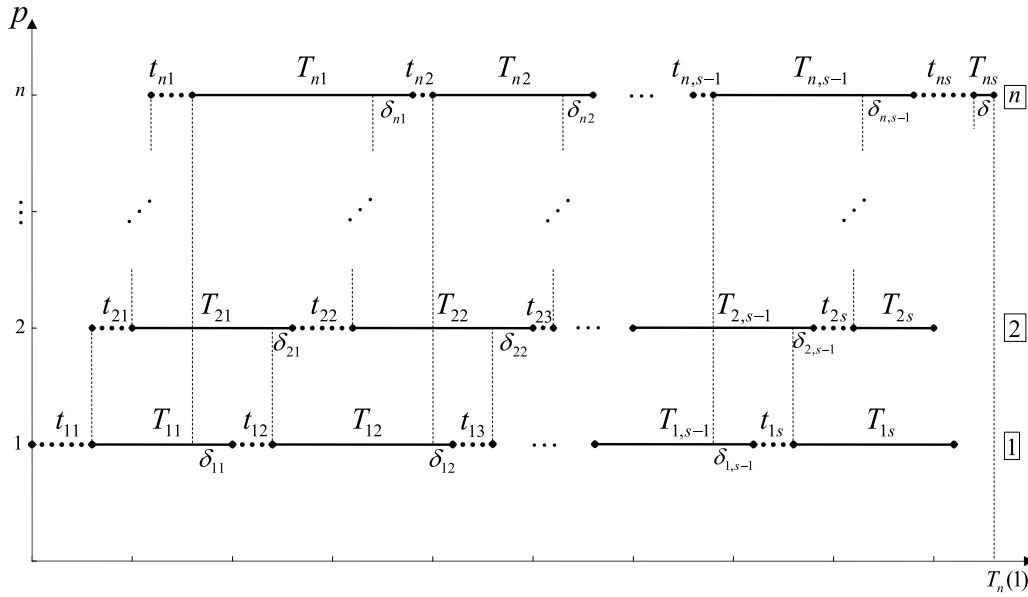


Рис. 2. Совмещенная диаграмма Ганта с одним каналом обмена

пользоваться совмещением соседних диаграмм Ганта, начиная со второй, справа налево на максимально возможную величину, не нарушающим условий 1–5 взаимодействия процессов с каналами и процессорами (рис. 2).

Для корректного совмещения соседних диаграмм можно либо составить расписание sb_{ij} моментов старта j -го блока обмена, $j = \overline{1, s}$, для i -го процесса, $i = \overline{1, n}$, либо определить времена вынужденных простоев канала δ_{ij} из-за ожидания ввода информации, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s-1}$ (рис. 2).

Анализируя две соседние несовмещенные диаграммы Ганта (рис. 1), соответствующие j -му и $(j+1)$ -му блокам обмена и счета, с временами t_{ij} , T_{ij} и $t_{i,j+1}$, $T_{i,j+1}$ соответственно, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s-1}$, видно, что моменты начала выполнения *первого* блока обмена для каждого процесса определяются из соотношений:

$$sb_{11} = 0, sb_{21} = sb_{11} + t_{11}, sb_{31} = sb_{21} + t_{21}, \dots, sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}, \dots, sb_{n1} = sb_{n-1,1} + t_{n-1,1};$$

для *второго* блока обмена:

$$sb_{12} = \max(sb_{11} + t_{11} + T_{11}; sb_{n1} + t_{n1}), sb_{22} = \max(sb_{21} + t_{21} + T_{21}; sb_{12} + t_{12}), \dots,$$

$$sb_{i2} = \max(sb_{i1} + t_{i1} + T_{i1}; sb_{i-1,2} + t_{i-1,2}), \dots, sb_{n2} = \max(sb_{n1} + t_{n1} + T_{n1}; sb_{n-1,2} + t_{n-1,2});$$

для *третьего* блока обмена:

$$sb_{13} = \max(sb_{12} + t_{12} + T_{12}; sb_{n2} + t_{n2}), sb_{23} = \max(sb_{22} + t_{22} + T_{22}; sb_{13} + t_{13}), \dots,$$

$$sb_{i3} = \max(sb_{i2} + t_{i2} + T_{i2}; sb_{i-1,3} + t_{i-1,3}), \dots, sb_{n3} = \max(sb_{n2} + t_{n2} + T_{n2}; sb_{n-1,3} + t_{n-1,3});$$

для j -го блока обмена, $j = \overline{4, s-1}$:

$$sb_{1j} = \max(sb_{1,j-1} + t_{1,j-1} + T_{1,j-1}; sb_{n,j-1} + t_{n,j-1}), sb_{2j} = \max(sb_{2,j-1} + t_{2,j-1} + T_{2,j-1}; sb_{1j} + t_{1j}),$$

$$\begin{aligned} \dots, sb_{ij} &= \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}; sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), \dots, \\ sb_{nj} &= \max(sb_{n,j-1} + t_{n,j-1} + T_{n,j-1}; sb_{n-1,j} + t_{n-1,j}); \end{aligned}$$

для s -го блока обмена:

$$\begin{aligned} sb_{1s} &= \max(sb_{1,s-1} + t_{1,s-1} + T_{1,s-1}; sb_{n,s-1} + t_{n,s-1}), sb_{2s} = \\ &= \max(sb_{2,s-1} + t_{2,s-1} + T_{2,s-1}; sb_{1s} + t_{1s}), \dots, \\ sb_{is} &= \max(sb_{i,s-1} + t_{i,s-1} + T_{i,s-1}; sb_{i-1,s} + t_{i-1,s}), \dots, sb_{ns} = \\ &= \max(sb_{n,s-1} + t_{n,s-1} + T_{n,s-1}; sb_{n-1,s} + t_{n-1,s}). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 1. *Общее время выполнения n ($n \geq 2$) процессов p ($p \geq 2$) процессорами, конкурирующими за использование одного канала обмена в случае достаточного числа процессоров ($n \leq p$), определяется по формуле:*

$$T_n(1) = \max_{1 \leq i \leq n} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}), \quad (1)$$

где sb_{ij} — моменты старта j -го блока обмена для i -го процесса, определяемые из соотношений:

$$\begin{aligned} sb_{11} &= 0, sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}, sb_{1j} = \max(sb_{1,j-1} + t_{1,j-1} + T_{1,j-1}; sb_{n,j-1} + t_{n,j-1}), \quad (2) \\ sb_{ij} &= \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}; sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), i = \overline{2, n}, j = \overline{2, s}. \end{aligned}$$

Рассмотрим интерпретацию формул (1) и (2) на примере 1.

Пример 1. Нужно определить время выполнения трех процессов ($n = 3$) в многопроцессорной системе с тремя процессорами ($p = 3$) и одним каналом обмена ($k = 1$). Каждый процесс состоит из четырех блоков обмена и четырех блоков счета ($s = 4$), времена которых заданы следующими матрицами:

$$t_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, T_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 9 & 5 \\ 8 & 10 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения $T_3(1)$ воспользуемся формулой (1). Предварительно найдем моменты старта j -го блока обмена, $j = \overline{1, 4}$, для i -го процесса, $i = \overline{1, 3}$, по формулам (2):

$$\begin{aligned} sb_{11} &= 0, \\ sb_{12} &= \max(sb_{11} + t_{11} + T_{11}; sb_{31} + t_{31}) = \max(0 + 3 + 4; 5 + 3) = 8, \\ sb_{13} &= \max(sb_{12} + t_{12} + T_{12}; sb_{32} + t_{32}) = \max(8 + 2 + 9; 16 + 2) = 19, \\ sb_{14} &= \max(sb_{13} + t_{13} + T_{13}; sb_{33} + t_{33}) = \max(19 + 2 + 6; 28 + 3) = 31, \\ sb_{21} &= sb_{11} + t_{11} = 0 + 3 = 3, \\ sb_{22} &= \max(sb_{21} + t_{21} + T_{21}; sb_{12} + t_{12}) = \max(3 + 2 + 6; 8 + 2) = 11, \end{aligned}$$

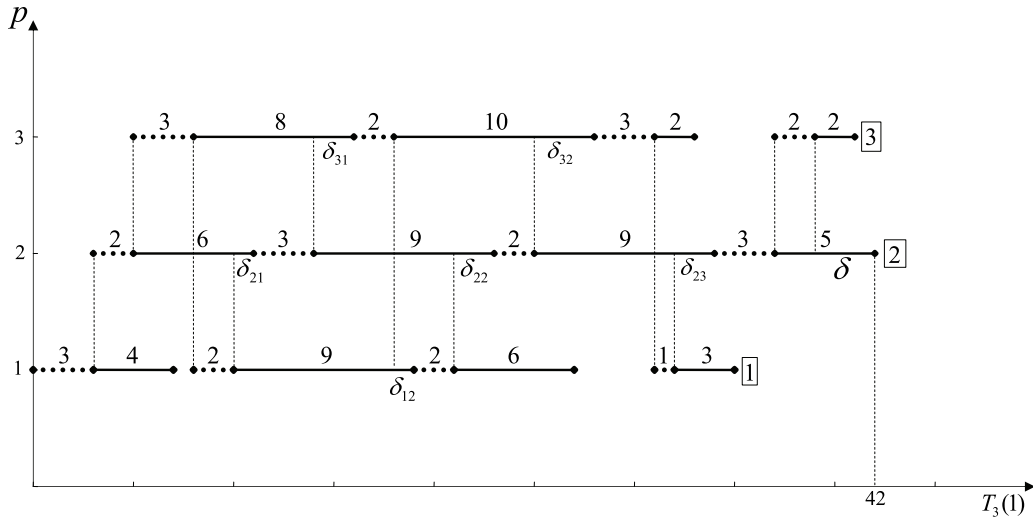


Рис. 3. Совмещенная диаграмма Ганта (3 процесса, 3 процессора, 1 канал, 4 блока обмена и счета)

$$sb_{23} = \max(sb_{22} + t_{22} + T_{22}; sb_{13} + t_{13}) = \max(11 + 3 + 9; 19 + 2) = 23,$$

$$sb_{24} = \max(sb_{23} + t_{23} + T_{23}; sb_{14} + t_{14}) = \max(23 + 2 + 9; 31 + 2) = 34,$$

$$sb_{31} = sb_{21} + t_{21} = 3 + 2 = 5,$$

$$sb_{32} = \max(sb_{31} + t_{31} + T_{31}; sb_{22} + t_{22}) = \max(5 + 3 + 8; 11 + 3) = 16,$$

$$sb_{33} = \max(sb_{32} + t_{32} + T_{32}; sb_{22} + t_{22}) = \max(16 + 2 + 10; 23 + 2) = 28,$$

$$sb_{34} = \max(sb_{33} + t_{33} + T_{33}; sb_{24} + t_{24}) = \max(28 + 3 + 2; 34 + 3) = 37.$$

Тогда

$$T_3(1) = \max(31 + 1 + 3; 34 + 3 + 5; 37 + 2 + 2) = 42.$$

Таким образом, общее время выполнения 3 процессов на 3 процессорах, использующих 1 канал обмена, будет равно 42, что совпадает со временем выполнения процессов на совмещенной диаграмме Ганта (рис. 3).

Для определения общего времени выполнения процессов в МВС с помощью времен вынужденных простоев канала справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Общее время выполнения n ($n \geq 2$) процессов p ($p \geq 2$) процессорами, конкурирующими за использование одного канала обмена в случае $n \leq p$, определяется по формуле:*

$$T_n(1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s t_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s-1} \delta_{ij} + \delta, \quad (3)$$

где δ_{ij} — времена вынужденных простоев канала из-за ожидания ввода информации для i -го процесса на j -м шаге вычислений, а δ — время от конца ввода каналом последней порции информации t_{ns} до окончания счета всеми процессорами, определяемые из соотношений:

$$\delta_{i0} = 0, \delta_{ij} = \max \left\{ 0; T_{ij} - \sum_{r=i+1}^n (\delta_{r,j-1} + t_{rj}) - \sum_{r=1}^{i-1} (\delta_{rj} + t_{r,j+1}) \right\}, j = \overline{1, s-1}, i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$\delta = \max_{1 \leq l \leq n} \left\{ T_{ls} - \sum_{r=l+1}^n (\delta_{r,s-1} + t_{rs}) \right\}. \quad (5)$$

Доказательство.

Справедливость формул (4) проверяется методом математической индукции:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \max \left\{ 0; T_{11} - \sum_{r=2}^n t_{r1} \right\}, \delta_{21} = \max \left\{ 0; T_{21} - \sum_{r=3}^n t_{r1} - (\delta_{11} + t_{12}) \right\}, \\ \delta_{31} &= \max \left\{ 0; T_{31} - \sum_{r=4}^n t_{r1} - \sum_{r=1}^2 (\delta_{r1} + t_{r2}) \right\}, \dots, \delta_{n1} = \max \left\{ 0; T_{n1} - \sum_{r=1}^{n-1} (\delta_{r1} + t_{r2}) \right\}, \\ \delta_{12} &= \max \left\{ 0; T_{12} - \sum_{r=2}^n (\delta_{r1} + t_{r2}) \right\}, \delta_{22} = \max \left\{ 0; T_{22} - \sum_{r=3}^n (\delta_{r1} + t_{r2}) - (\delta_{12} + t_{13}) \right\}, \\ \delta_{32} &= \max \left\{ 0; T_{32} - \sum_{r=4}^n (\delta_{r1} + t_{r2}) - \sum_{r=1}^2 (\delta_{r2} + t_{r3}) \right\}, \dots, \delta_{n2} = \\ &= \max \left\{ 0; T_{n2} - \sum_{r=1}^{n-1} (\delta_{r2} + t_{r3}) \right\}, \dots, \\ \delta_{1,s-1} &= \max \left\{ 0; T_{1,s-1} - \sum_{r=2}^n (\delta_{r,s-2} + t_{r,s-1}) \right\}, \delta_{2,s-1} = \\ &= \max \left\{ 0; T_{2,s-1} - \sum_{r=3}^n (\delta_{r,s-2} + t_{r,s-1}) - (\delta_{1,s-1} + t_{1s}) \right\}, \\ \delta_{3,s-1} &= \max \left\{ 0; T_{3,s-1} - \sum_{r=4}^n (\delta_{r,s-2} + t_{r,s-1}) - \sum_{k=1}^2 (\delta_{r,s-1} + t_{rs}) \right\}, \dots, \\ \delta_{n,s-1} &= \max \left\{ 0; T_{n,s-1} - \sum_{r=1}^{n-1} (\delta_{r,s-1} + t_{r,s}) \right\}. \end{aligned}$$

Первый процессор заканчивает работу после ввода последней порции информации через время, определяемое соотношением $\max \left\{ 0; T_{1s} - \sum_{r=2}^n (\delta_{r,s-1} + t_{rs}) \right\}$, второй — через $\max \left\{ 0; T_{2s} - \sum_{r=3}^n (\delta_{r,s-1} + t_{rs}) \right\}$, ..., последний — через T_{ns} . Следовательно, δ равно максимальному из этих чисел, что доказывает справедливость формулы (5).

Отметим, что в случае $n = p$, в формулах (1)–(5) индекс n заменяется на индекс p .

Пример 2. По данным примера 1 определить $T_3(1)$. Для этого воспользуемся формулой (3), предварительно найдя времена вынужденного простоя канала δ_{ij} , $j = \overline{1, 3}$, $i = \overline{1, 3}$, и время δ по формулам (4) и (5) (рис. 3):

$$\delta_{11} = \max\{0; 4 - 2 - 3\} = 0, \delta_{21} = \max\{0; 6 - 3 - 0 - 2\} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\delta_{31} &= \max\{0; 8 - 0 - 2 - 1 - 3\} = 2, \\
\delta_{12} &= \max\{0; 9 - 1 - 3 - 2 - 2\} = 1, \delta_{22} = \max\{0; 9 - 2 - 2 - 1 - 2\} = 2, \\
\delta_{32} &= \max\{0; 10 - 1 - 2 - 2 - 2\} = 3, \\
\delta_{13} &= \max\{0; 6 - 2 - 2 - 3 - 3\} = 0, \delta_{23} = \max\{0; 9 - 3 - 3 - 0 - 1\} = 2, \\
\delta_{33} &= \max\{0; 2 - 0 - 1 - 2 - 3\} = 0, \\
\delta &= \max\{3 - 2 - 3 - 0 - 2; 5 - 0 - 2; 2\} = 3.
\end{aligned}$$

Имеем:

$$T_3(1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 t_{ij} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} + \delta = 28 + 11 + 3 = 42.$$

Следовательно, $T_3(1) = 42$, что совпадает с временем выполнения процессов в примере 1 и на совмещенной диаграмме Ганта (рис. 3).

4. Время реализации асинхронных процессов при ограниченном числе каналов обмена. Из физических и практических соображений наибольший интерес в рамках концепции макроконвейерных вычислений представляет случай *ограниченного* числа каналов, т. е. когда $k \ll n$, $n = km$, $m > 1$, что означает, что число процессов кратно числу каналов, которые конкурируют за их использование. Будем считать, что число процессоров достаточно для выполнения n процессов, т. е. $p \geq n$. Рассмотрим следующий способ взаимодействия процессов, каналов и процессоров.

Каждый g -й канал, $g = \overline{1, k}$, обслуживает очередные m процессов, которые выполняются на m процессорах. В таблице показано распределение процессов по каналам и процессорам, а на рис. 4 — их взаимодействие.

Так как каждый g -й канал, $g = \overline{1, k}$, обслуживает группу из m процессов, то, согласно формулам (3)–(5), время $T_m^g(1)$, затраченное на выполнение каждой группы из m процессов m процессорами каждым каналом, составит:

$$T_m^1(1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^s t_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{s-1} \delta_{ij} + \delta_1, \text{ где}$$

$$\delta_{i0} = 0, \delta_{ij} = \max \left\{ 0; T_{ij} - \sum_{r=i+1}^m (\delta_{r,j-1} + t_{rj}) - \sum_{r=1}^{i-1} (\delta_{rj} + t_{r,j+1}) \right\}, j = \overline{1, s-1}, i = \overline{1, m}$$

$$\delta_1 = \max_{1 \leq l \leq m} \left\{ T_{ls} - \sum_{r=l+1}^m (\delta_{r,s-1} + t_{rs}) \right\};$$

$$T_m^2(1) = \sum_{i=m+1}^{2m} \sum_{j=1}^s t_{ij} + \sum_{i=m+1}^{2m} \sum_{j=1}^{s-1} \delta_{ij} + \delta_2, \text{ где}$$

$$\delta_{i0} = 0, \delta_{ij} = \max \left\{ 0; T_{ij} - \sum_{r=i+1}^{2m} (\delta_{r,j-1} + t_{rj}) - \sum_{r=m+1}^{i-1} (\delta_{rj} + t_{r,j+1}) \right\},$$

$$j = \overline{1, s-1}, i = \overline{m+1, 2m},$$

$$\delta_2 = \max_{m+1 \leq l \leq 2m} \left\{ T_{ls} - \sum_{r=l+1}^{2m} (\delta_{r,s-1} + t_{rs}) \right\}; \dots;$$

$$T_m^k(1) = \sum_{i=(k-1)m+1}^n \sum_{j=1}^s t_{ij} + \sum_{i=(k-1)m+1}^n \sum_{j=1}^{s-1} \delta_{ij} + \delta_k, \text{ где}$$

$$\delta_{i0} = 0, \delta_{ij} = \max \left\{ 0; T_{ij} - \sum_{r=i+1}^n (\delta_{r,j-1} + t_{rj}) - \sum_{r=(k-1)m+1}^{i-1} (\delta_{rj} + t_{r,j+1}) \right\},$$

$$j = \overline{1, s-1}, i = \overline{(k-1)m+1, n},$$

$$\delta_k = \max_{(k-1)m+1 \leq l \leq n} \left\{ T_{ls} - \sum_{r=l+1}^n (\delta_{r,s-1} + t_{rs}) \right\}.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. Общее время выполнения p процессорами ($p \geq 2$), $n = tk$, ($m > 1$) процессов, которые конкурируют за использование k каналов ($k \geq 1$); в случае достаточного числа процессоров ($p \geq n$) определяется из соотношения:

$$T_n(k) = \max_{1 \leq g \leq k} T_m^g(1) = \max_{1 \leq g \leq k} \left\{ \sum_{i=(g-1)m+1}^{gm} \sum_{j=1}^s t_{ij} + \sum_{i=(g-1)m+1}^{gm} \sum_{j=1}^{s-1} \delta_{ij} + \delta_g \right\}, \quad (6)$$

где для $g = \overline{1, k}$:

$$\delta_{i0} = 0, \delta_{ij} = \max \left\{ 0; T_{ij} - \sum_{r=i+1}^{gm} (\delta_{r,j-1} + t_{rj}) - \sum_{r=1}^{i-1} (\delta_{rj} + t_{r,j+1}) \right\},$$

$$j = \overline{1, s-1}, i = \overline{(g-1)m+1, gm},$$

$$\delta_g = \max_{(g-1)m+1 \leq l \leq gm} \left[T_{ls} - \sum_{r=l+1}^{gm} (\delta_{r,s-1} + t_{rs}) \right]. \quad (7)$$

Теорема 4. Общее время выполнения p процессорами ($p \geq 2$), $n = tk$, ($m > 1$) процессов в макроконвейерной вычислительной системе с k каналами обмена ($k \geq 1$) в случае $p \geq n$ определяется из соотношения:

$$T_n(k) = \max_{1 \leq g \leq k} T_m^g(1) = \max_{1 \leq g \leq k} \left(\max_{(g-1)m+1 \leq i \leq gm} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}) \right), \quad (8)$$

где sb_{ij} — моменты начала выполнения j -го блока обмена для i -го процесса, определяемые по формулам:

$$sb_{(g-1)m+1,1} = 0, sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1},$$

$$sb_{(g-1)m+1,j} = \max(sb_{(g-1)m+1,j-1} + t_{(g-1)m+1,j-1} + T_{(g-1)m+1,j-1}; sb_{mg,j-1} + t_{mg,j-1}), \quad (9)$$

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}; sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), i = \overline{(g-1)m+2, gm}, j = \overline{2, s}, g = \overline{1, k}.$$

Таблица

Распределение процессов по каналам и процессорам

Номер канала	Времена обмена	Номер процессора	Времена счета
1	t_{11} t_{12} ... t_{1s} t_{21} t_{22} ... t_{2s} ... t_{m1} t_{m2} ... t_{ms}	1 2 ... m	T_{11} T_{12} ... T_{1s} T_{21} T_{22} ... T_{2s} ... T_{m1} T_{m2} ... T_{ms}
2	$t_{m+1,1}$ $t_{m+1,2}$... $t_{m+1,s}$ $t_{m+2,1}$ $t_{m+2,2}$... $t_{m+2,s}$... $t_{2m,1}$ $t_{2m,2}$... $t_{2m,s}$	$m+1$ $m+2$... $2m$	$T_{m+1,1}$ $T_{m+1,2}$... $T_{m+1,s}$ $T_{m+2,1}$ $T_{m+2,2}$... $T_{m+2,s}$... $T_{2m,1}$ $T_{2m,2}$... $T_{2m,s}$
...
g	$t_{(g-1)m+1,1}$ $t_{(g-1)m+1,2}$... $t_{(g-1)m+1,s}$ $t_{(g-1)m+2,1}$ $t_{(g-1)m+2,2}$... $t_{(g-1)m+2,s}$... $t_{gm,1}$ $t_{gm,2}$... $t_{gm,s}$	$(g-1)m+1$ $(g-1)m+2$... gm	$T_{(g-1)m+1,1}$ $T_{(g-1)m+1,2}$... $T_{(g-1)m+1,s}$ $T_{(g-1)m+2,1}$ $T_{(g-1)m+2,2}$... $T_{(g-1)m+2,s}$... $T_{gm,1}$ $T_{gm,2}$... $T_{gm,s}$
...
k	$t_{(k-1)m+1,1}$ $t_{(k-1)m+1,2}$... $t_{(k-1)m+1,s}$ $t_{(k-1)m+2,1}$ $t_{(k-1)m+2,2}$... $t_{(k-1)m+2,s}$... t_{n1} t_{n2} ... t_{ns}	$(k-1)m+1$ $(k-1)m+2$... n	$T_{(k-1)m+1,1}$ $T_{(k-1)m+1,2}$... $T_{(k-1)m+1,s}$ $T_{(k-1)m+2,1}$ $T_{(k-1)m+2,2}$... $T_{(k-1)m+2,s}$... T_{n1} T_{n2} ... T_{ns}

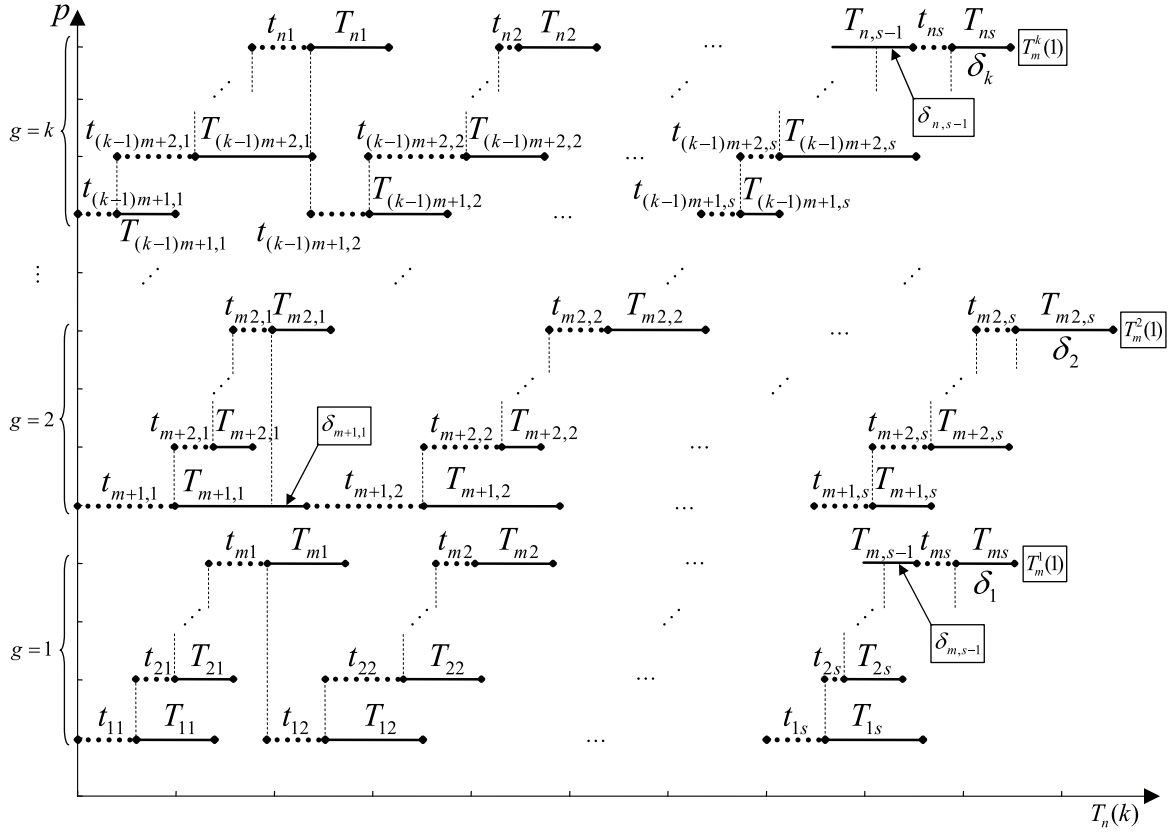


Рис. 4. Способ взаимодействия процессов, каналов и процессоров

Доказательство теоремы следует из того факта, что каждый g -й канал, $g = \overline{1, k}$, согласно формулам (1)–(2), обслуживает группу из m процессов m процессорами за время $T_m^g(1)$, определяемое по формулам:

$$T_m^1(1) = \max_{1 \leq i \leq m} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}), \text{ где}$$

$$sb_{11} = 0, sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}, sb_{1j} = \max(sb_{1,j-1} + t_{1,j-1} + T_{1,j-1}; sb_{mj,j-1} + t_{mj,j-1}),$$

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}; sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), i = \overline{2, m}, j = \overline{2, s};$$

$$T_m^2(1) = \max_{m+1 \leq i \leq 2m} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}), \text{ где}$$

$$sb_{m+1,1} = 0, sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1},$$

$$sb_{m+1,j} = \max(sb_{m+1,j-1} + t_{m+1,j-1} + T_{m+1,j-1}; sb_{2m,j-1} + t_{2m,j-1}),$$

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}; sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), i = \overline{m+2, 2m}, j = \overline{2, s}; \dots;$$

$$T_m^k(1) = \max_{(k-1)m+1 \leq i \leq n} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}), \text{ где}$$

$$sb_{(k-1)m+1,1} = 0, sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1},$$

$$sb_{(k-1)m+1,j} = \max(sb_{(k-1)m+1,j-1} + t_{(k-1)m+1,j-1} + T_{(k-1)m+1,j-1}; sb_{mk,j-1} + t_{mk,j-1}),$$

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}; sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), i = \overline{(k-1)m+2, n}, j = \overline{2, s}.$$

Следовательно, общее время $T_n(k)$ будет равно $\max_{1 \leq g \leq k} T_m^g(1)$.

Пример 3. Пусть $n = p = 9$, $k = 3$, $s = 5$, а времена обмена и счета заданы матрицами:

$$t_{9 \times 5} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, T_{9 \times 5} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда каждый из трех каналов будет обслуживать группу из трех процессов, т. е. $m = 3$. а) используя формулы (6) и (7) и считая $g = 1, 2, 3$, определяем:

$$\delta_{11} = \max(0; 4 - 2 - 3) = 0, \delta_{21} = \max(0; 3 - 3 - 0 - 3) = 0,$$

$$\delta_{31} = \max(0; 4 - 0 - 3 - 0 - 4) = 0,$$

$$\delta_{12} = \max(0; 5 - 0 - 4 - 0 - 2) = 0, \delta_{22} = \max(0; 4 - 0 - 2 - 0 - 2) = 0,$$

$$\delta_{32} = \max(0; 4 - 0 - 2 - 0 - 5) = 0,$$

$$\delta_{13} = \max(0; 3 - 0 - 5 - 0 - 1) = 0, \delta_{23} = \max(0; 6 - 0 - 1 - 0 - 1) = 4,$$

$$\delta_{33} = \max(0; 4 - 0 - 1 - 4 - 3) = 0,$$

$$\delta_{14} = \max(0; 3 - 4 - 3 - 0 - 4) = 0, \delta_{24} = \max(0; 4 - 0 - 4 - 0 - 3) = 0,$$

$$\delta_{34} = \max(0; 6 - 0 - 3 - 0 - 1) = 2,$$

$$\delta_1 = \max(5 - 0 - 1 - 3 - 2; 3 - 2 - 2; 3) = 3,$$

$$T_3^1(1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 t_{ij} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \delta_{ij} + \delta_1 = 39 + 6 + 3 = 48;$$

$$\delta_{41} = \max(0; 5 - 2 - 2) = 1, \delta_{51} = \max(0; 2 - 2 - 1 - 6) = 0,$$

$$\delta_{61} = \max(0; 4 - 1 - 6 - 0 - 4) = 0,$$

$$\delta_{42} = \max(0; 7 - 0 - 4 - 0 - 3) = 0, \delta_{52} = \max(0; 2 - 0 - 3 - 0 - 3) = 0,$$

$$\delta_{62} = \max(0; 5 - 0 - 3 - 0 - 3) = 0,$$

$$\delta_{43} = \max(0; 4 - 0 - 3 - 0 - 4) = 0, \delta_{53} = \max(0; 3 - 0 - 4 - 0 - 2) = 0,$$

$$\delta_{63} = \max(0; 4 - 0 - 2 - 0 - 2) = 0,$$

$$\delta_{44} = \max(0; 2 - 0 - 2 - 0 - 3) = 0, \delta_{54} = \max(0; 4 - 0 - 3 - 0 - 3) = 0,$$

$$\delta_{64} = \max(0; 4 - 0 - 3 - 0 - 3) = 0,$$

$$\delta_2 = \max(3 - 0 - 3 - 0 - 2; 4 - 0 - 2; 5) = 5,$$

$$T_3^2(1) = \sum_{i=4}^6 \sum_{j=1}^5 t_{ij} + \sum_{i=4}^6 \sum_{j=1}^4 \delta_{ij} + \delta_1 = 47 + 1 + 5 = 53;$$

$$\delta_{71} = \max(0; 3 - 4 - 3) = 0, \delta_{81} = \max(0; 6 - 3 - 0 - 3) = 0,$$

$$\delta_{91} = \max(0; 4 - 0 - 3 - 0 - 5) = 0,$$

$$\delta_{72} = \max(0; 4 - 0 - 5 - 0 - 1) = 0, \delta_{82} = \max(0; 4 - 0 - 1 - 0 - 2) = 1,$$

$$\delta_{92} = \max(0; 4 - 0 - 2 - 1 - 3) = 0,$$

$$\delta_{73} = \max(0; 2 - 1 - 3 - 0 - 2) = 0, \delta_{83} = \max(0; 4 - 0 - 2 - 0 - 1) = 1,$$

$$\delta_{93} = \max(0; 3 - 0 - 1 - 1 - 2) = 0,$$

$$\delta_{74} = \max(0; 2 - 1 - 2 - 0 - 4) = 0, \delta_{84} = \max(0; 3 - 0 - 2 - 0 - 4) = 0,$$

$$\delta_{94} = \max(0; 5 - 0 - 2 - 0 - 2) = 1,$$

$$\delta_3 = \max(2 - 0 - 2 - 1 - 2; 7 - 1 - 2; 3) = 4,$$

$$T_3^3(1) = \sum_{i=7}^9 \sum_{j=1}^5 t_{ij} + \sum_{i=7}^9 \sum_{j=1}^4 \delta_{ij} + \delta_3 = 38 + 3 + 4 = 45;$$

б) пусть $g = 1$, тогда с учетом (9) $j = \overline{2, 5}$, $i = 2, 3$. По этим формулам находим моменты начала выполнения блоков обмена для 1, 2 и 3 процессов, обслуживаемых *первым* каналом:

$$sb_{11} = 0, sb_{21} = 3, sb_{31} = 5, sb_{12} = 8, sb_{22} = 11, sb_{32} = 15, sb_{13} = 17, sb_{23} = 19, sb_{33} = 24,$$

$$sb_{14} = 25, sb_{24} = 30, sb_{34} = 33, sb_{15} = 37, sb_{25} = 40, sb_{35} = 43.$$

Используя (8), определяем минимальное общее время выполнения процессов *первым* каналом:

$$T_3^1(1) = \max(37 + 3 + 5; 40 + 1 + 3; 43 + 2 + 3) = 48.$$

Аналогично, для $g = 2$, $j = \overline{2, 5}$, $i = 5, 6$. Тогда для 4, 5 и 6 процессов, обслуживаемых *вторым* каналом, моменты начала выполнения блоков обмена равны:

$$sb_{41} = 0, sb_{51} = 5, sb_{61} = 7, sb_{42} = 10, sb_{52} = 16, sb_{62} = 20, sb_{43} = 23, sb_{53} = 26, sb_{63} = 29,$$

$$sb_{44} = 33, sb_{54} = 35, sb_{64} = 37, sb_{45} = 40, sb_{55} = 43, sb_{65} = 46.$$

$$\text{Тогда } T_3^2(1) = \max(40 + 3 + 3; 43 + 3 + 4; 46 + 2 + 5) = 53.$$

Для *третьего* канала $g = 3$, $j = \overline{2, 5}$, $i = 8, 9$, тогда имеем:

$$sb_{71} = 0, sb_{81} = 2, sb_{91} = 6, sb_{72} = 9, sb_{82} = 12, sb_{92} = 17, sb_{73} = 18, sb_{83} = 21, sb_{93} = 24,$$

$$sb_{74} = 26, sb_{84} = 28, sb_{94} = 30, sb_{75} = 34, sb_{85} = 36, sb_{95} = 39,$$

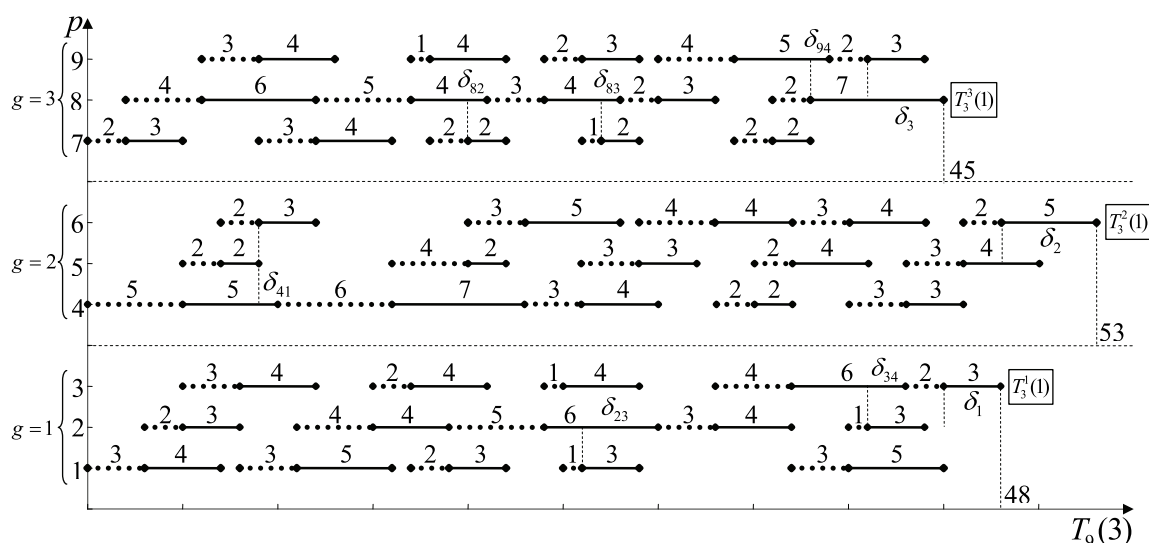


Рис. 5. Совмещенная диаграмма Ганта (9 процессов, 9 процессоров, 3 канала)

$$T_3^3(1) = \max(34 + 2 + 2; 36 + 2 + 7; 39 + 2 + 3) = 45.$$

Таким образом, общее время выполнения 9 процессов на 9 процессорах, использующих 3 канала обмена, составит:

$$T_9(3) = \max_{1 \leq g \leq 3} T_3^g(1) = \max(T_3^1(1); T_3^2(1); T_3^3(1)) = \max(48; 53; 45) = 53 \text{ (рис. 5).}$$

Заключение. В заключении отметим, что построенная модель организации макроконвейерных вычислений над структурами данных при ограниченном числе каналов обмена и разработанные аналитические методы расчета общего времени выполнения множества неоднородных конкурирующих процессов являются основой для постановки и решения ряда важных практических задач по расчету оптимальной балансировки числа процессоров и каналов, оптимизации числа блоков счета и обмена, минимизации общего времени выполнения процессов и др.

Список литературы

1. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ–Петербург, 2002.
2. Коваленко Н. С., Павлов П. А. Модель сосредоточенной обработки неоднородных процессов в системах макроконвейерного типа // Вестник Белорусского государственного университета. 2013. № 3. С. 93–100.
3. Топорков В. В. Модели распределенных вычислений. М: Физматлит, 2004.
4. Павлов П. А., Коваленко Н. С. Математическое моделирование параллельных процессов. Germany: Lambert Academic Publishing, 2011.
5. Коваленко Н. С., Павлов П. А. Алгоритм построения оптимальной компоновки одинаково распределенных систем // Программирование. 2012. № 3. С. 3–10.
6. Павлов П. А. Оптимальность структурирования программных ресурсов при конвейерной распределенной обработке // Программные продукты и системы. 2010. № 3. С. 76–82.

Павлов Павел Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент Полесского государственного университета; тел. (375) 699-12-68; e-mail: pin2535@tut.by;

Дата поступления — 29.03.2014