

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ УПРУГОЙ ПОДЛОЖКИ, СЛОЕВ УПРУГОГО СВЯЗУЮЩЕГО И УПРУГОГО ПОКРЫТИЯ

Эльман Али Хазар

Киргизско-турецкий университет Манас,
720044, Бишкек, Киргизия

УДК 539.3

Разработан метод решения задачи с применением преобразований Лапласа и Фурье. Представлены и проанализированы численные результаты для самоуравновешенных нормальных напряжений, обусловленных локальным искривлением упругого связующего слоя при растяжении и сжатии рассматриваемого тела вдоль свободной лицевой поверхности. Вязкоупругое поведение материалов описывали с помощью дробно-экспоненциальных операторов Работнова.

Ключевые слова: продольная неустойчивость, изогнутый слой, критическое время, местный вблизи поверхности изгиб, стабильность, вязкоупругий слой.

A method for solving the problem considered by employing the Laplace and Fourier transformations is developed. Numerical results for the self-balanced normal stresses caused by a local curving of an elastic bond layer upon tension and compression of the body mentioned along the free face plane are presented and analyzed. The viscoelasticity of the materials is described by the Rabotnov fractional-exponential operators.

Key words: buckling instability, curved-layer, critical time, local near-surface buckling, stability, viscoelastic layer.

Введение. Большое количество экспериментальных исследований, описанных в [1–6], свидетельствует о том, что при сжатии или растяжении однонаправленных упругих и вязкоупругих композитов в направлении укладки слоев или волокон имеет место локальное приповерхностное разрушение (расслоение). Во многих случаях это разрушение обусловлено самоуравновешенными напряжениями, развивающимися в силу наличия локальных искривлений в приповерхностных армирующих слоях. Такие искривления в структуре композитных материалов возникают как следствие разных технологических факторов. Анализ указанных исследований показывает, что для изучения соответствующих проблем разрушения применяют два подхода. Первый основан на изучении распределения напряжений и использовании макроскопического критерия разрушения для нормальных или касательных напряжений, а второй — на критерии потери устойчивости конструктивных элементов композитов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полубесконечное тело (рис. 1) при $x_3 = \text{const}$, состоящее из вязкоупругого слоя покрытия 1, упругого связующего слоя 2 и вязкоупругой полуплоскости 3. Величины, относящиеся к этим слоям, и полуплоскости, обозначенные на рис. 1 цифрами 1, 2, 3, будут иметь верхние индексы (1), (2), (3) соответственно.

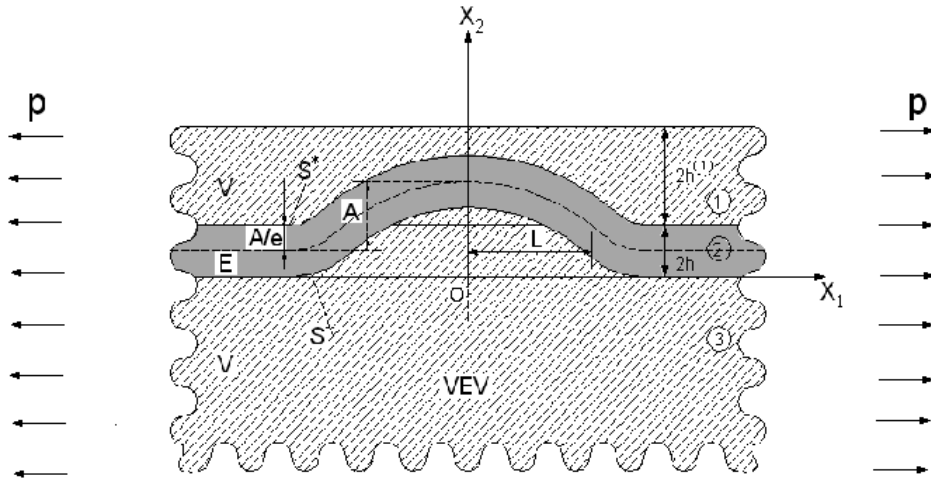


Рис. 1. Геометрия структуры материала

Свяжем срединные поверхности слоя покрытия и связующего слоя с лагранжевыми системами координат $O_m^{(k)} x_{1m}^{(k)} x_{2m}^{(k)} x_{3m}^{(k)}$ ($k=1, 2, 3$), полученными из декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ параллельным переносом вдоль оси Ox_2 .

Цель настоящей работы — исследование распределения напряжений, обусловленных локальным несовершенством упругого связующего слоя, и определение влияния на него упругих параметров. Уравнение равновесия слоев и геометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_{jm}^{(k)}} \left[\sigma_{jn}^{(k)m} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(k)m}}{\partial x_{nm}^{(k)}} \right) \right] = 0, \\
 & \sigma_{ij}^{(k)m} = C_{ijrs}^{(k)m} \varepsilon_{rs}^{(k)m}(t) + \int_0^t C_{ijrs}^{(k)m}(t-\tau) \varepsilon_{rs}^{(k)m}(\tau) d\tau, \\
 & 2\varepsilon_{ij}^{(k)m} = \frac{\partial u_i^{(k)m}}{\partial x_{jm}^{(k)}} + \frac{\partial u_j^{(k)m}}{\partial x_{im}^{(k)}} + \frac{\partial u_n^{(k)m}}{\partial x_{im}^{(k)}} \frac{\partial u_n^{(k)m}}{\partial x_{jm}^{(k)}} \\
 & i, j, n, r, s = 1, 2, 3, \\
 & k, m = 1, 2
 \end{aligned} \tag{1}$$

Запишем граничные условия отсутствия усилий на свободной лицевой поверхности слоя покрытия и условия полного контакта между компонентами рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned}
 & \left[\sigma_{jn}^{(1)1} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(1)1}}{\partial x_{n1}^{(1)}} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^{1-} = \left[\sigma_{jn}^{(2)1} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(2)1}}{\partial x_{n1}^{(2)}} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^{1-}, \\
 & u_i^{(1)1} \Big|_{S_1^-} = u_i^{(2)1} \Big|_{S_1^-}, \\
 & \left[\sigma_{jn}^{(2)1} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(2)1}}{\partial x_{n1}^{(2)}} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^{2+} = \left[\sigma_{jn}^{(1)2} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(1)2}}{\partial x_{n2}^{(1)}} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^{2-}, \\
 & \left[\sigma_{jn}^{(1)1} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(1)1}}{\partial x_{n1}^{(1)}} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^{1-} = \left[\sigma_{jn}^{(2)1} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(2)1}}{\partial x_{n1}^{(2)}} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^{1-},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_i^{(1)1} \Big|_{S_1^-} &= u_i^{(2)1} \Big|_{S_1^-}, \\
\left[\sigma_{jn}^{(2)1} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(2)1}}{\partial x_{n1}^{(2)}} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^{2+} &= \left[\sigma_{jn}^{(1)2} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(1)2}}{\partial x_{n2}^{(1)}} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^{2-}, \\
u_i^{(2)1} \Big|_{S_2^+} &= u_i^{(1)2} \Big|_{S_2^+}, \\
\left[\sigma_{jn}^{(1)2} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(1)2}}{\partial x_{n2}^{(1)}} \right) \right] \Big|_{S_2^-} n_j^{2-} &= \left[\sigma_{jn}^{(2)2} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(2)2}}{\partial x_{n2}^{(2)}} \right) \right] \Big|_{S_2^-} n_j^{2-}, \\
u_i^{(1)2} \Big|_{S_2^-} &= u_i^{(2)2} \Big|_{S_2^-}, \\
\sigma_{11}^{(2)2} &\rightarrow p_1, \sigma_{33}^{(2)2} \rightarrow p_3, \sigma_{ij}^{(2)2} \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $ij \neq 11; 33$ as $x_{22}^{(1)} \rightarrow -\infty$.

$$\left[\sigma_{jn}^{(1)1} \left(\delta_j^n + \frac{\partial u_i^{(1)1}}{\partial x_n^{(1)}} \right) \right] \Big|_{S_1^+} n_j^{1+} = 0. \tag{4}$$

Малое начальное несовершенство упругого слоя задано уравнением его средней поверхности

$$x_{2m}^{(1)} = F_m(x_{1m}^{(1)}, x_{3m}^{(1)}) = \varepsilon f_m(x_{1m}^{(1)}, x_{3m}^{(1)}), \tag{5}$$

где ε — малый безразмерный параметр ($0 \leq \varepsilon \leq 1$).

Предположим, что $F_m(x_{1m}^{(1)}, x_{3m}^{(1)})$ и ее первая производная непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_{1m}^{(1)}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_{3m}^{(1)}} \right)^2 \ll 1.$$

2. Метод решения. Рассмотрим общие концепции процедуры решения, используемые в настоящем исследовании и описанные в [3–8].

Во-первых, при условии постоянной толщины $2h$ упругого слоя и с учетом уравнения (5) выведены уравнения для поверхностей S^\pm (рис. 1), которые можно представить как $x_i^{(k)\pm} = x_i^{(k)\pm}(t_1, h, \varepsilon, f(t_1, t_3))$ ($k; i=1, 2, 3$), где t_1, t_3 — параметры ($t_1, t_3 \in (-\infty, +\infty)$) и h — полутолщина упругого армирующего слоя. На основе этих уравнений также выведены выражения для компонентов n_j^\pm . Соответственно величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние составляющих рассматриваемой системы, также представлены в ряде по малому параметру ε :

$$\{\sigma_{ij}^{(k)}; \varepsilon_{ij}^{(k)}; u_i^{(k)}\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \{\sigma_{ij}^{(k),q}; \varepsilon_{ij}^{(k),q}; u_i^{(k),q}\}. \tag{6}$$

Подставив уравнение (6) в уравнения (1)–(4) и сравнив члены с одинаковыми степенями ε , получим замкнутую систему уравнений контактных и граничных условий. В силу

линейности уравнения состояния удовлетворяются для каждого приближения (6) отдельно, так же как и четвертое условие (3).

Предположим, что материалы полуплоскости и слоев умеренно жесткие и что величины, относящиеся к нулевому приближению, можно найти из соответствующих линейных уравнений. Кроме того, предположим, что $\left| \frac{\partial u_i^{(k),0}}{\partial x_j^{(k)}} \right| \ll 1$, и пренебрежем этими величинами в уравнениях первого приближения.

Применим преобразование Лапласа $\bar{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(t) \exp(-st) dt$, $s > 0$ ко всем уравнениям и соотношениям, относящимся к нулевому приближению. В силу постановки задачи и принципа соответствия изображения по Лапласу для нулевого приближения имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}^{(k)m,0} &= \frac{\bar{E}^{*(k)m}(\bar{p}_1 + \bar{\nu}^{*(k)m}\bar{p}_3)}{\bar{E}^{*(2)2}(1 - (\bar{\nu}^{*(k)m})^2)} - \frac{\bar{E}^{*(k)m}(\bar{p}_3 + \bar{\nu}^{*(k)m}\bar{p}_1)}{\bar{E}^{*(2)2}(1 - (\bar{\nu}^{*(k)m})^2)}, \\ \bar{\sigma}_{11}^{(k)m,0} &= \frac{\bar{E}^{*(k)m}(\bar{p}_1 + \bar{\nu}^{*(k)m}\bar{p}_3)}{\bar{E}^{*(2)2}(1 - (\bar{\nu}^{*(k)m})^2)} - \frac{\bar{E}^{*(k)m}(\bar{p}_3 + \bar{\nu}^{*(k)m}\bar{p}_1)}{\bar{E}^{*(2)2}(1 - (\bar{\nu}^{*(k)m})^2)} \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(k)m,0} &= 0 \quad \text{for } ij \neq 11, 33,\end{aligned}$$

где $\bar{E}^{*(k)m}$ и $\bar{\nu}^{*(k)m}$ — операторы.

В силу уравнений (1), (2) можно записать

$$\begin{aligned}E^{*(k)m} &= E_0^{(k)m} + \int_0^t E^{(k)m}(t - \tau) d\tau, \\ \nu^{*(k)m} &= \nu_0^{(k)m} + \int_0^t \nu^{(k)m}(t - \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Здесь $E_0^{(k)m}$ и $\nu_0^{(k)m}$ — мгновенные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона связующего материала. Оригиналы искомых величин находим по методу Шейпери [9].

Для первого приближения получены уравнения

$$\frac{\partial \sigma_{ji}^{(k)m,1}}{\partial x_{jm}^{(k)}} + \sigma_{11}^{(k)m,0} \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{1m}^{(k)})^2} + \sigma_{33}^{(k)m,0} \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} = 0, \quad (7)$$

а также механические и геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{ji}^{(k)m,1} &= \lambda^{*(k)m} \theta^{(k)m,1} \delta_i^j + 2\nu^{*(k)m} \varepsilon_{ji}^{(k)m,1}, \quad \theta^{(k)m,1} = \varepsilon_{11}^{(k)m,1} + \varepsilon_{22}^{(k)m,1} + \varepsilon_{33}^{(k)m,1}, \\ \varepsilon_{ji}^{(k)m,1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(k)m,1}}{\partial x_{jm}^{(k)}} + \frac{\partial u_j^{(k)m,1}}{\partial x_{im}^{(k)}} \right), \quad \nu^{*(k)m} = \frac{1}{2} \left(\frac{E^{*(k)m} \mu^{*(k)m}}{(1 + \nu^{*(k)m})(1 - 2\nu^{*(k)m})} \right), \\ \mu^{*(k)m} &= \frac{E^{*(k)m}}{2(1 + \nu^{*(k)m})}\end{aligned} \quad (8)$$

Граничные и контактные условия имеют вид:

$$\sigma_{21}^{(1),1,1} \Big|_{x_2^{(1)} = -h_1^{(1)}} - \sigma_{11}^{(1),1,0} \Big| \frac{df}{dx_1^{(1)}} = 0,$$

$$\sigma_{22}^{(1),1,1} \Big|_{x_2^{(1)}=+h_1^{(1)}} = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_{23}^{(1),1,1} \Big|_{x_2^{(1)}=+h_1^{(1)}} - \sigma_{33}^{(1),1,0} \Big|_{\frac{df}{dx_3^{(1)}}} = 0,$$

$$\sigma_{2i}^{(1),1,1} \Big|_{x_2^{(1)}=-h_1^{(1)}} - \sigma_{2i}^{(2),1,1} \Big|_{x_2^{(1)}=+h_1^{(2)}} = (\sigma_{11}^{(1),1,0} - \sigma_{11}^{(2),1,0}) \frac{df_1}{dx_{11}^{(1)}} \delta_i^1 + (\sigma_{33}^{(1),1,0} - \sigma_{33}^{(2),1,0}) \frac{df_1}{dx_{31}^{(1)}} \delta_i^3$$

$$u_i^{(1)1,1} \Big|_{x_2^{(1)}=-h_1^{(1)}} - u_i^{(2)1,1} \Big|_{x_2^{(2)}=+h_1^{(2)}} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

Последующая разработка метода решения зависит от выбора функции (5), описывающей форму начального локального несовершенства. В настоящем исследовании в соответствии с функцией, наблюдаемой в структуре композитных материалов [3], она выбрана как

$$f = f_1(x_1) \cdot f_3(x_3); \quad f = e^{-\left(\frac{x_1}{L_1}\right)^2 - \gamma^2 \left(\frac{x_3}{L_1}\right)^2}, \quad (11)$$

где $\gamma = \frac{l_1}{l_3}$.

Если $\gamma = \frac{l_1}{l_3} = 0$ ($l_3 \rightarrow \infty$), то полученные результаты сходятся с результатами [1].

Предполагали, что $L \ll l_1$ и $\varepsilon = L/l_1$. Производную, входящую в (10), можно выразить как

$$\frac{df}{dx_1} = f_1'(x_1) \cdot f_3(x_3); \quad \frac{df}{dx_3} = f_1(x_1) \cdot f_3'(x_3). \quad (12)$$

В этом случае изображение по Лапласу (7) можно записать как

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ji}^{(k)m,0}}{\partial x_{jm}^{(k)}} + \int_0^\infty \sigma_{11}^{(k)m,0}(t) \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{1m}^{(k)})^2} \exp(-st) dt + \int_0^\infty \sigma_{33}^{(k)m,0}(t) \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} \exp(-st) dt = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (13)$$

А также (8), (9) и (10) изображения по Лапласу можно записать:

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(k)m,0}, \varepsilon_{ij}^{(k)m,0}, u_i^{(k)m,0}, \lambda^{*(k)m}, \mu^{*(k)m} \right\} \Rightarrow \left\{ \bar{\sigma}_{ij}^{(k)m,0}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)m,0}, \bar{u}_i^{(k)m,0}, \bar{\lambda}^{*(k)m}, \bar{\mu}^{*(k)m} \right\}.$$

Теперь рассмотрим интегральные члены в уравнении (13):

$$\int_0^\infty \sigma_{11}^{(k)m,0}(t) \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{1m}^{(k)})^2} \exp(-st) dt \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \sigma_{33}^{(k)m,0}(t) \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} \exp(-st) dt.$$

Для механических причин значения $\sigma_{11}^{(k)m,0}(t)$ и $\sigma_{33}^{(k)m,0}(t)$ при $t = 0$ и ∞ . В связи с этим, можно написать

$$\int_0^\infty \sigma_{jj}^{(k)m,0}(t) \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} \exp(-st) dt \cong \sigma_{jj}^{(k)m,0}(t_*) \int_0^\infty \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} \exp(-st) dt =$$

$$\sigma_{jj}^{(k)m,0}(t_*) \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(k)m,0}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2}, \quad j = 1, 3; i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ji}^{(k)m,1}}{\partial x_{jm}^{(k)}} + \sigma_{11}^{(k)m,0} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{1m}^{(k)})^2} + \sigma_{33}^{(k)m,0} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} = 0. \quad (15)$$

Теперь необходимо найти решение уравнений (8) и (15), удовлетворяющих граничным и контактными условиям (9).

$$\nabla^2 \bar{u}_i^{(k)m,1} + \left(1 + \frac{\bar{\lambda}^{(k)m}}{\bar{\mu}^{(k)m}}\right) \frac{\partial}{\partial x_{im}^{(k)}} \bar{\theta}^{(k)m,1} + \frac{\sigma_{11}^{(k)m,0}(t_*)}{\bar{\mu}^{(k)m}} \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{1m}^{(k)})^2} +$$

$$\frac{\sigma_{33}^{(k)m,0}(t_*)}{\bar{\mu}^{(k)m}} \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} = 0, \quad (16)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial (x_{1m}^{(k)})^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x_{2m}^{(k)})^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2}. \quad (17)$$

Из уравнений (16) и (17) получаем

$$\left(2 + \frac{\bar{\lambda}^{(k)m}}{\bar{\mu}^{(k)m}}\right) \nabla^2 \bar{\theta}^{(k)m,1} + \frac{\sigma_{11}^{(k)m,0}(t_*)}{\bar{\mu}^{(k)m}} \frac{\partial^2}{\partial (x_{1m}^{(k)})^2} \bar{\theta}^{(k)m,1} +$$

$$\frac{\sigma_{33}^{(k)m,0}(t_*)}{\bar{\mu}^{(k)m}} \frac{\partial^2}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} \bar{\theta}^{(k)m,1} = 0.$$

$$\nabla^2 \bar{u}_i^{(k)m,1} + \frac{\sigma_{11}^{(k)m,0}(t_*)}{\bar{\mu}^{(k)m}} \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{1m}^{(k)})^2} + \frac{\sigma_{33}^{(k)m,0}(t_*)}{\bar{\mu}^{(k)m}} \frac{\partial^2 u_i^{(k)m,1}}{\partial (x_{3m}^{(k)})^2} =$$

$$-(1 + \frac{\bar{\lambda}^{(k)m}}{\bar{\mu}^{(k)m}}) \frac{\partial}{\partial x_{im}^{(k)}} \bar{\theta}^{(k)m,1}.$$

Применим экспоненциальное преобразование Фурье к уравнениям (16) и (17) и граничным и контактными условиям (9) и (10) по переменной x_1 . В результате уравнения (16) и (17) примут вид

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_{13}^{(k)m,1}}{d^2 x_{2m}^{(k)}} - (S_1^2 + S_3^2 + \frac{\sigma_{11}^{(k)m,0}}{2\mu^{*(k)m} + \lambda^{*(k)m}} S_1^2 +$$

$$\frac{\sigma_{33}^{(k)m,0}}{2\mu^{*(k)m} + \lambda^{*(k)m}} S_3^2) \bar{\theta}_{13}^{(k)m} = 0$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_i^{(k)m,1}}{d^2 x_{2m}^{(k)}} - (S_1^2 + S_3^2 + \frac{\sigma_{11}^{(k)m,0}}{\mu^{*(k)m}} S_1^2 + \frac{\sigma_{33}^{(k)m,0}}{\mu^{*(k)m}} S_3^2) \bar{u}_i^{(k)m}$$

$$= -(1 + \frac{\lambda^{*(k)m}}{\mu^{*(k)m}}) \left(\frac{d \bar{\theta}_{13}^{(k)m}}{d x_{2m}^{(k)}} \delta_i^2 + \bar{\theta}_{13}^{(k)m,1} \delta_i^1 + \bar{\theta}_{13}^{(k)m,1} \delta_i^3 \right) \quad (18)$$

Решая уравнение (18), получим:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}_{13}^{(k)m,1} &= \bar{A}_1^{(k)m,1} e^{r_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)m,1}} + \bar{A}_2^{(k)m,1} e^{-r_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)m,1}} \\
\bar{u}_1^{(k)m,1} &= \bar{C}_{11}^{(k)m} e^{k_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + C_{12}^{(k)m} e^{-k_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + \bar{A}_{11}^{(k)m} e^{r_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + C A_{12}^{(k)m} e^{-r_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} \\
\bar{u}_2^{(k)m,1} &= \bar{C}_{21}^{(k)m} e^{k_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + C_{22}^{(k)m} e^{-k_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + \bar{A}_{21}^{(k)m} e^{r_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + C A_{22}^{(k)m} e^{-r_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} \\
\bar{u}_3^{(k)m,1} &= \bar{C}_{31}^{(k)m} e^{k_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + C_{32}^{(k)m} e^{-k_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + \bar{A}_{31}^{(k)m} e^{r_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}} + C A_{32}^{(k)m} e^{-r_1^{(k)m} x_{2m}^{(k)}}
\end{aligned}$$

Эти функции находятся с применением метода Schapery [9], и критическое время оценивается по критерию

$$\left| u_2^{(1)1,1}(0) \right| \rightarrow \infty, \text{ as } t \rightarrow t_{cr}.$$

На данный момент мы ограничимся рассмотрением метода решения

$$\left| u_2^{(1)1,1}(0) \right| \rightarrow \infty, \text{ as } p \rightarrow p_{1cr}$$

3. Численные результаты и обсуждение. Предположим, что вязкоупругость материалов слоя покрытия и полуплоскости можно описать операторами

$$E^{*(k)} = E_0^{(k)} [1 - \omega_0 R_\alpha^*(-\omega_0 - \omega_\infty)], \nu^{*(k)} = \nu_0^{(k)} \left[1 + \frac{1 - 2\nu_0^{(k)}}{\nu_0^{(k)}} \omega_0 R_\alpha^*(-\omega_0 - \omega_\infty) \right],$$

$$\lambda^{*(k)} = \lambda_0^{(k)} \left[1 + \frac{1 - 2\nu_0^{(2)}}{2\nu_0^{(2)}(1 + \nu_0^{(2)})} \omega_0 R_\alpha^* \left(-\frac{3}{2(1 + \nu_0^{(2)})} \omega_0 - \omega_\infty \right) \right],$$

$$\mu^{*(k)} = \mu_0^{(k)} \left[1 - \frac{3\omega_0}{2\nu_0^{(2)}(1 + \nu_0^{(2)})} R_\alpha^* \left(-\frac{3}{2(1 + \nu_0^{(2)})} \omega_0 - \omega_\infty \right) \right]. \quad (19)$$

где $E_0^{(k)}$, $\nu_0^{(k)}$ — мгновенный модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно; $\lambda_0^{(k)}$ и $\mu_0^{(k)}$ — мгновенные постоянные Ляме; α , ω_0 и ω_∞ — реологические параметры; R_α^* — дробно-экспоненциальный оператор Работнова [10], определяемый как

$$R_\alpha(\beta) \Psi(t) = \int_0^t R_\alpha(\beta, t - \tau) \Psi(\tau) d\tau, R_\alpha(\beta) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, -1 < \alpha \leq 0, \quad (20)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма функция.

Введем безразмерный реологический параметр $\omega = \omega_\infty/\omega_0$ и безразмерное время $t' = \omega_0^{1/(1+\alpha)} t$. Рассмотрим сначала случай, когда материалы слоя покрытия и полуплоскости также чисто упругие, и проанализируем распределение нормальных напряжений $\sigma_{nn}(= \varepsilon \sigma_{22}^{(1)1})$, действующих на поверхности раздела покрывающего и связующего слоев. Пусть $\varepsilon = 0,015$, $E^{(2)}/E^{(1)} = E^{(2)}/E^{(3)} = 50$, $\nu_0^{(3)} = \nu_0^{(2)} = \nu_0^{(1)} = 0,3$ и $\gamma = 0; 20; 100; 200; 300$. Влияние геометрической нелинейности на распределение напряжений будем характеризовать параметром $e = p/E^{(2)} \times 10^3$.

Анализ численных результатов начнем с зависимости $\sigma_{nm}/\sigma_{11}^{(1)0}$ (at $x_1/L = 0,0$) и $h^{(1)}/L$, приведенной на рис. 2 при $h^{(2)}/L = 0,3$, $m = 0,0$ для разных значений e .

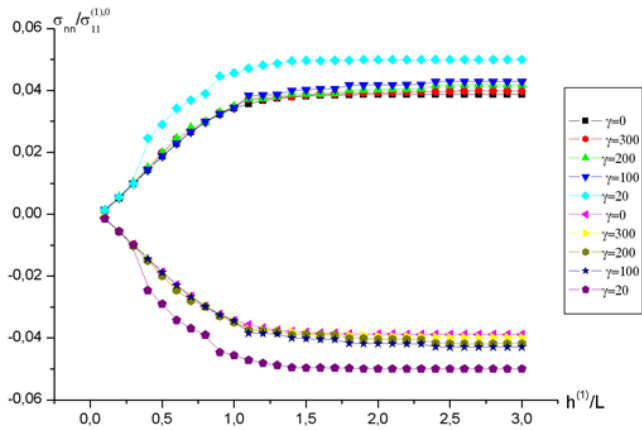


Рис. 2. Зависимость напряжения $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ от параметров $h^{(1)}/L$ при $h^{(2)}/L = 0, 3, , = 0, 0$ и разных значениях e

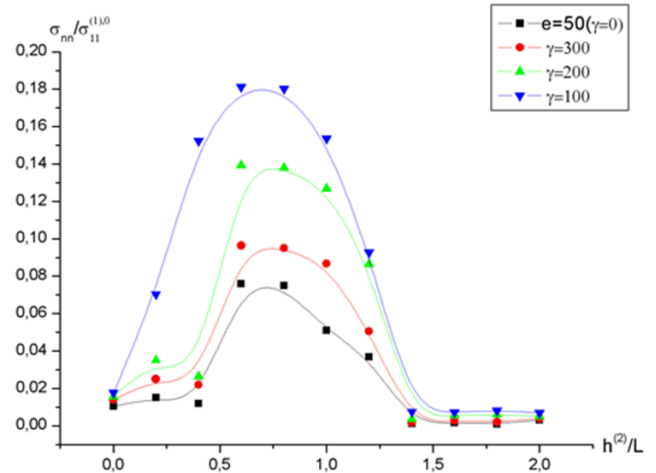


Рис. 3. Зависимость напряжения $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ от параметров $h^{(2)}/L$ при $h^{(1)}/L = 0, 45$ и разных значениях e

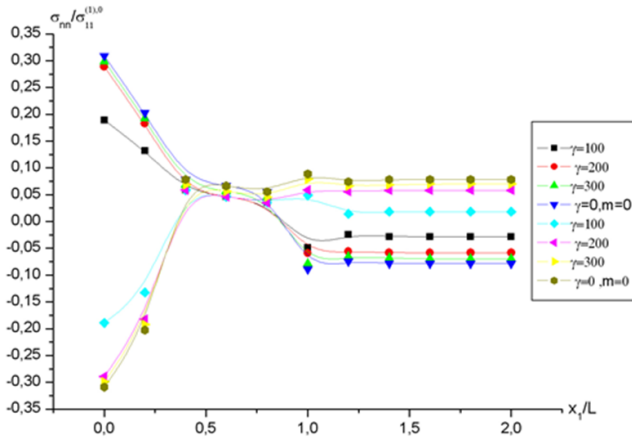


Рис. 4. Зависимость напряжения $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ от координаты x_1/L при $h^{(2)}/L = 0, 3$ при разных $h^{(1)}/L = 0, 45$, $e = 5, 0$ и разных значениях m

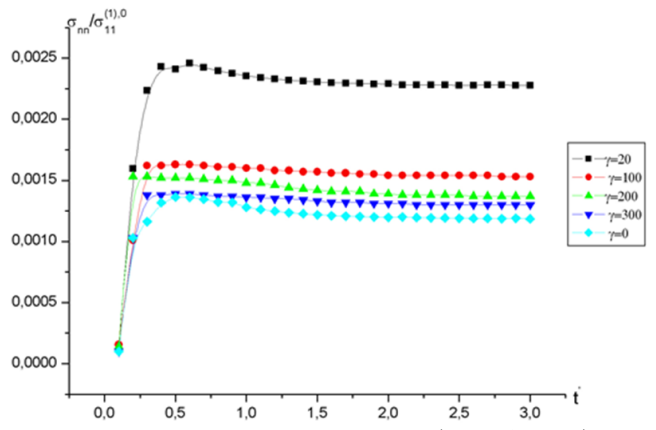


Рис. 5. Зависимость напряжения $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ от времени t' при $e = 0, 3$, $h^{(2)}/L = 0, 3$ при разных $h^{(2)}/L = 0, 45$ и $\alpha = -0, 5$ и разных значениях ω

В соответствии с хорошо известными соображениями механики напряжение σ_{nn} с увеличением параметра $h^{(1)}/L$ должно стремиться к асимптотическому (предельному) значению, т. е. к значению σ_{nn} , соответствующему случаю, когда слой 2 (см. рис. 1) содержится в бесконечном теле из материала полуплоскости 3. Это предположение подтверждают данные рис. 2 и тот факт, что предельные значения при $\sigma_{nn}|e| = 1, 0$ почти совпадают с полученными в рамках линейной теории упругости и проанализированными в [3]. В то же время данные рис. 2 свидетельствуют о том, что при учете геометрической нелинейности абсолютные значения σ_{nn} с ростом $|e|$ уменьшаются (увеличиваются) при растяжении (сжатии) рассматриваемого материала. В качественном смысле эти результаты согласуются с описанными в [3–26], что подтверждает обоснованность применяемых алгоритмов и вычислительных программ.

Рассмотрим зависимость напряжения $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ (при $x_1/L = 0.0$) и $h^{(2)}/L$ при разных e и $h^{(1)}/L = 0, 45$; $\gamma = 0; 100; 200; 300$ (рис. 3).

Проанализируем влияние параметра m , входящего в выражение функции (12) и ха-

рактически форму локального искривления армирующего слоя, на распределение напряжений $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ в зависимости от координаты x_1/L (рис. 4) для случаев $|e| = 5, 0$, $h^{(1)}/L = 0, 45$, $h^{(2)}/L = 0, 3$, $\gamma = 0; 100; 200; 300$. Видно, что $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ увеличиваются с ростом m . Как видно из рис. 4, когда γ получает более высокие значения, $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ приближается к пределу, за которым γ равен нулю.

Теперь предположим, что материалы слоя покрытия и полуплоскости вязкоупругие, характеризуемые операторами (19) и (20). Исследуем влияние реологические параметров ω и α на $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right| t'_* = 0.0$ в уравнениях (10) и (11). Зависимости напряжения $\left| \sigma_{nn} / \sigma_{11}^{(1),0} \right|$ (при $x_1/L = 0, 0$) от безразмерного времени t' представлены для разных значений ω (α) при $h^{(2)}/L = 0, 3$, $h^{(1)}/L = 0, 45$, $m = 0, 0$, $\alpha = -0, 5$ ($\omega = 3, 0$), $\gamma = 0; 20; 100; 200; 300$ (рис. 5).

Теперь сформулируем критерии разрушения для рассматриваемого материала. Для этой цели введем следующие обозначения: Π_1^+ — прочность при растяжении (сжатии) вдоль оси Ox_1 , Π_2^+ — прочность при растяжении в направлении Ox_2 . Поскольку величина Π_2^+ определяется главным образом прочностью адгезии или прочностью материала матрицы, имеем

$$\Pi_2^+ / \Pi_1^+ \ll 1, 0. \quad (21)$$

В соответствии с результатами экспериментальных исследований для армированных стеклопластиков $\Pi_2^+ / \Pi_1^+ = 0, 055 - 0, 10$, что согласуется с неравенством (21). В результате приповерхностное разрушение рассматриваемого материала имеет место, когда выполняются соотношения, и это отношение удовлетворяет неравенству (14). Следовательно, вблизи поверхности отказ от рассмотренного материала происходит тогда, когда отношения

$$\sigma_{nn} = \Pi_2^+, \sigma_{11}^{(1),0} < \Pi_1^+.$$

Заключение. Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

Абсолютные значения самоуравновешенного нормального напряжения уменьшаются при приближении локально искривленного упругого слоя к свободной поверхности рассматриваемого тела.

Абсолютные значения самоуравновешенного нормального напряжения увеличиваются (уменьшаются) с ростом абсолютного значения внешней сжимающей (растягивающей) силы, что обусловлено влиянием геометрической нелинейности.

Список литературы

1. XIAO K. Q., ZHANG L. C., AND ZARUDI I. Mechanical and rheological properties of carbon nanotube-reinforced polyethylene composites // Compos. Scien. Technol. 2007. N 67, P. 77–182.
2. GUZ A. N. Fracture Mechanics of composites in Compression. Kiev: Naukova Dumka, 1990.
3. АКВАРОВ S. D. AND GUZ A. N. Mechanics of curved composites. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht-Boston-London, 2000.
4. АКВАРОВ S. D. AND GUZ A. N. Mechanics of curved composites and some related problems for structural members // Mech. Adv. Mater. Struct. 2004. V. 11. N 6. P. 445–515.

5. AKBAROV S. D., SISMAM T., AND YAHNIOĞLU N. On the fracture of the unidirectional composites in compression // *Int. J. Eng. Sci.* 1997. N 35. P. 1115–1135.
6. AKBAROV S. D. AND KOSKER R. Internal stability loss of two neighboring fibers in a viscoelastic matrix // *Int. J. Eng. Sci.* 2004. N 42. P. 1847–1873.
7. AKBAROV S. D. AND TEKERCIOĞLU R. Near-surface buckling instability of a system consisting of a moderately rigid substrate, a viscoelastic bond layer, and an elastic covering layer // *Mech. Compos. Mater.* 2006. V. 42. N 4. P. 363–372.
8. AKBAROV S. D. AND TEKERCIOĞLU R. Surface undulation instability of the viscoelastic half-space covered with the stack of layer in bi-axial compression // *Int. J. Mech. Scien.* 2007. N 49. P. 778–789.
9. SCHAPERY R. A. Approximate method of transform inversion for viscoelastic stress analysis / *Proc. US. Nat. Cong. Appl. ASME.* 1966. N 4. P. 1075–1085.
10. RABOTNOV YU. N. *Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies.* Moskow: Nauka, 1977.
11. AKBAROV S. D., CILLI A., AND GUZ A. N. The theoretical strength limit in compression of viscoelastic layered composite materials // *Composites Part B: Engineering.* 1999. N 30. P. 365–472.
12. ALIYEV E. A. Local near-surface buckling of a system consisting of elastic (viscoelastic) substrate, a viscoelastic (elastic) bond layer, and an elastic (viscoelastic) covering layer // *Mechanics of Composite Materials.* 2007. V. 43. N 6. P. 521–534.
13. AKBAROV S. D., ALIYEV E. A. On the near-surface failure of the layered viscoelastic Materials // *Mechanics of Composite Materials.* 2009. V. 45. N 5. P. 477–488.
14. BIOT M. A. *Mechanics of Incremental Deformations.* New York, 1965.
15. GUZ A. N. *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies.* Berlin: Springer-Verlag, 1999.
16. HOFF N. J. A survey of the theories of creep buckling / In *proc. of the Third US National Congress of the Applied Mechanics, ASME.* New York, 1958.
17. BABICH I. YU., GUZ A. N. AND CHEKOV V. N. The Three-Dimensional Theory of Stability of fibrous and laminated materials // *Int. Appl. Mech.* 2001. V. 37. N 9. P. 1103–1141.
18. CILLI A. *Fracture of the uni-directed fiber-layered composites in compression / PhD. Thesis, The Yildiz Technical University, Turkey, Istanbul, 1998.*
19. GUZ A. N. Three-Dimensional Theory of Stability of Carbon Nanotube in a Matrix II // *Int. Appl. Mech.* 2006. V. 42. N 1. P. 19–31.
20. GUZ A. N. AND GUZ I. A. On Models in the theory of stability of Multiwalled carbon nanotubes in matrix // *Int. Appl. Mech.* 2006. V. 42. N 6. P. 617–628.
21. ZHUK YA. A. AND GUZ I. A. Influence of prestress on the velocities of waves propagating normally to the layers of nanocomposites // *Int. Appl. Mech.* 2006. V. 42. N 7. P. 729–743.
22. AKBAROV S. D., KOSKER R., SIMSEK K. Stress distribution in an infinite elastic body with a locally curved fiber in a geometrically non-linear statement // *Mech. of Composite Mat.* 2005. V. 41. N 4. P. 291–302.
23. TARNOPOLSKY YU. M., ROSE A. V. *Special feature of design of parts fabricated from reinforced plastics.* Riga.
24. GUZ A. N., RUSHCHITSKY J. J., GUZ I. A. Establishing fundamentals of the mechanics of Nanocomposites // *Int. Appl. Mech.* 2007. V. 43. N 3. P. 247–271.
25. ZHUK YU. A., GUZ I. A. Features of plane wave propagation along the layers of a pre-strained nanocomposites // *Int. Appl. Mech.* 2007. V. 43. N 3. P. 361–379.
26. ARGATOV I. I. Averaging of a finely laminated elastic medium with roughness or adhesion on the contact surfaces of the layers // *J. Appl. Math. Mech.* N 73. P. 734–746.

Эльман Али Хазар — доц. Киргизско-турецкого университета Манас, Бишкек, Киргизия; e-mail: ealiyev@sakarya.edu.tr, elmanaliyev@hotmail.com

Дата поступления — 13.11.2014