

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ 1-СОЛИТОНА ПРОСТРАНСТВЕННО-ДВУМЕРНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ А6

А. В. Алексеева, Г. А. Амирханова*

Институт математики и математического моделирования МОН РК,
050010, Алма-Ата, Казахстан

*Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК,
050010, Алма-Ата, Казахстан

УДК 517.957

В работе представлены пространственно-двумерное эволюционное уравнение А6, иерархия его вспомогательных линейных систем, закон сохранения, его пространственно-двумерная билинейная форма Н2, его N-солитонные решения, визуализация 1-солитонного решения данного уравнения, исследование свойств и качеств 1-солитона, обработка данных, статистические таблицы.

Ключевые слова: уравнение Кортевега-де Фриза, пространственно-двумерное эволюционное уравнение, пространственно-двумерная билинейная форма, вспомогательная линейная система, закон сохранения.

The work presents the spatially two-dimensional evolution A6-equation, the hierarchy of its auxiliary linear systems, conservation relations, its spatial two-dimensional bilinear H2-form, the N-soliton solutions, the visualization of the 1-soliton solution of the equation, analysis of the nature and properties of the 1-soliton, data processing, statistical tables.

Key words: Korteweg-de Vries equation, two-dimensional evolution equation, spatial two-dimensional bilinear form, auxiliary linear system, conservation relation.

Многомерные нелинейные уравнения, обобщающие классическое уравнение Кортевега-де Фриза, являются объектом интенсивных исследований в последнее время [1–7]. Интерес вызван тем, что уравнение Кортевега-де Фриза, как и его многомерные аналоги, является универсальной математической моделью, так как описывает многие нелинейные процессы в океанах, кристаллических телах, магнитных материалах, эфире, атмосфере Земли и других планет, живых организмах, экономике и др.

В 1949 году Ферми, Паста и Улама изучали нелинейные системы, которые позже были названы солитонами. Солитоны запоминали информацию и хранили ее очень долго, как молекула ДНК. Ученые утверждали, что солитоны ведут себя как разумные существа, но объяснить этот феномен не смогли.

В океанологии большое внимание уделяют изучению солитонов в морях и океанах, динамику которых описывает $(2+1)$ -мерное эволюционное уравнение А6. Их называют волны-убийцы, аномальные волны, волны-монстры, блуждающие волны. Они достигают высоты более чем 25–30 метров и представляют большую опасность для судов и морских сооружений. Появление волн-убийц не связано с катастрофическими геофизическими событиями. Они появляются неожиданно и также неожиданно исчезают. Ученые предпо-

лагают, что явление волн-убийц связано с особенностями динамики солитонов и не зависит от внешних факторов. Динамику солитонов в морских и океанских водах описывают пространственно-двумерные обобщения уравнения Кортевега-де Фриза [8].

Ранее Алексеевой А. В. были выведены новые пространственно-двумерные нелинейные уравнения А1–А14 и АI–АХII [1], которые являются обобщениями классического уравнения Кортевега-де Фриза.

В данной работе представлены (2+1)-мерное эволюционное уравнение А6, иерархия его вспомогательных линейных систем, закон сохранения, его (2+1)-мерная билинейная форма Н2, его N-солитонные решения, визуализация 1-солитонного решения данного уравнения, исследование свойств и качеств 1-солитона, обработка данных, статистические таблицы.

Рассмотрим (2+1)-мерное эволюционное уравнение А6 [1]:

$$\Psi_t + \Psi_{xxy} + 3[\Psi V]_x = 0,$$

где $V_x = \Psi_y$, $\Psi = \Psi(x, y, t)$ — достаточно гладкая комплекснозначная функция.

Интегрируемость (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 доказывает наличие высших иерархий его вспомогательных линейных систем уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi, \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi, \\ \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi, \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi, \\ \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi, \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi + \lambda^3 D\varphi, \\ \dots \end{cases}$$

где $\lambda = \lambda(y, t)$, $\lambda_t = \lambda\lambda_y$, $V_x = \Psi_y$,

$$\begin{aligned} U_0 &= \begin{pmatrix} 0 & \Psi \\ \bar{\Psi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & -\Psi_{xy} - 3\Psi V \\ -\bar{\Psi}_{xy} - 3\bar{\Psi}\bar{V} & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\Psi - V \\ -2i\partial_x^{-1}\bar{\Psi} - \bar{V} & -i \end{pmatrix}, \\ C = D = \dots &= \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\Psi \\ 2i\partial_x\bar{\Psi} & -i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\Psi = \Psi(x, y, t)$, $\varphi_i = \varphi_i(x, y, t)$, $i = \overline{1, 2}$ — достаточно гладкие комплекснозначные функции.

Закон сохранения для (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} F = 0,$$

где T — плотность, $F = (F_1, F_2)$ — поток,

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y},$$

$$T = \Psi + C_1, \quad F_1 = 3\Psi V + C_2, \quad F_2 = \Psi_{xx} + C_3, \quad V_x = \Psi_y,$$

$\Psi = \Psi(x, y, t)$ — достаточно гладкая комплекснозначная функция, $C_j, j = \overline{2,3}$ — постоянные.

(2+1)-мерное эволюционное уравнение А6 можно привести к (2+1)-мерной билинейной форме Н2:

$$(D_x D_t + D_x^3 D_y)(\varphi \circ \varphi) = 0,$$

где

$$D_x D_t(\varphi \circ \varphi) = 2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t),$$

$$D_x^3 D_y(\varphi \circ \varphi) = 2(\varphi_{xxxy}\varphi - \varphi_{xxx}\varphi_y - 3\varphi_{xxy}\varphi_x + 3\varphi_{xx}\varphi_{xy}),$$

$\varphi = \varphi(x, y, t)$ — достаточно гладкая комплекснозначная функция.

(2+1)-мерная билинейная форма Н2 является многомерным обобщением классической билинейной формы Хироты Н [8]:

$$(D_x D_t + D_x^4)(f \circ f) = 0,$$

где

$$D_x^m D_t^n (F \circ G) = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n F(x, t) G'(x', t')|_{x'=x, t'=t},$$

$f = f(x, t)$ — достаточно гладкая действительная функция.

Используя метод Хироты, находим солитонные решения (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6.

1-солитонное решение (2+1)-мерного эволюционного уравнения:

$$\Psi = 2(\ln \varphi_1)_{xx},$$

где

$$\varphi_1 = 1 + \exp\{\alpha x + \beta y - \beta\alpha^2 t + \gamma\},$$

$\Psi = \Psi(x, y, t), \varphi_1 = \varphi_1(x, y, t)$ — достаточно гладкие комплекснозначные функции, α, β, γ — постоянные.

2-солитонное решение (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6:

$$\Psi = 2(\ln \varphi_2)_{xx},$$

где

$$\varphi_2 = 1 + \exp\{\eta_1\} + \exp\{\eta_2\} + \exp\{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}\},$$

$$\eta_j = \alpha_j x + \beta_j y - \beta_j \alpha_j^2 t + \gamma_j, \quad j = \overline{1,2},$$

$$\exp\{A_{12}\} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \cdot \frac{-\beta_1 \alpha_1^2 + \beta_2 \alpha_2^2 + (\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{-\beta_1 \alpha_1^2 - \beta_2 \alpha_2^2 + (\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 + \alpha_2)^2}, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2,$$

$\Psi = \Psi(x, y, t), \varphi_2 = \varphi_2(x, y, t)$ — достаточно гладкие комплекснозначные функции, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, j = \overline{1,2}$ — постоянные.

N-солитонное решение (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6:

$$\Psi = 2(\ln \varphi_N)_{xx},$$

где μ^* „пробегают“ все множества $\mu_j = 0, 1, j = \overline{1, N}$,

$$\varphi_N = \sum_{\mu^*=0,1} \exp \left(\sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leq i < j}^N \mu_i \mu_j A_{ij} \right),$$

$$\eta_j = \alpha_j x + \beta_j y - \beta_j \alpha_j^2 t + \gamma_j, \quad j = \overline{1, 2},$$

$$\exp \{A_{ij}\} = \frac{\alpha_j - \alpha_i}{\alpha_j + \alpha_i} \cdot \frac{-\beta_i \alpha_i^2 + \beta_j \alpha_j^2 + (\beta_i - \beta_j)(\alpha_i - \alpha_j)^2}{-\beta_i \alpha_i^2 - \beta_j \alpha_j^2 + (\beta_i + \beta_j)(\alpha_i + \alpha_j)^2},$$

$$\alpha_i \neq \alpha_j, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N},$$

$\Psi = \Psi(x, y, t), \varphi_N = \varphi_N(x, y, t)$ — достаточно гладкие комплекснозначные функции, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, j = \overline{1, N}$ — постоянные.

Запишем 1-солитонное решение (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6:

$$\psi = 2(\ln \varphi)_{xx}, \quad \varphi = 1 + \exp \{ \alpha x + \beta y - \beta \alpha^2 t + \gamma \}$$

в виде

$$\Psi = 2 \frac{\varphi_{xx} \varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2},$$

где

$$\varphi_x^2 = \alpha^2 \exp \{ 2\alpha x + 2\beta y - 2\beta \alpha^2 t + 2\gamma \},$$

$$\varphi_{xx} \varphi = \alpha^2 \exp \{ 2\alpha x + 2\beta y - 2\beta \alpha^2 t + 2\gamma \}.$$

Откуда имеем

$$\Psi = 2\alpha^2 \frac{\exp \{ 2\alpha x + 2\beta y - 2\beta \alpha^2 t + 2\gamma \}}{(1 + \exp \{ 2\alpha x + 2\beta y - 2\beta \alpha^2 t + 2\gamma \})^2}$$

или

$$\Psi = \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{ch^2 \{ \alpha x + \beta y - \beta \alpha^2 t + \gamma \}}.$$

Скорость 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 имеет вид $v = \frac{\alpha^2 \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, а его амплитуда вычисляется по формуле $A = \frac{\alpha^2}{2}$. Видно, что скорость 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 и его амплитуда пропорциональны $v = \frac{2\beta A}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, т.е. чем выше волна, тем быстрее она бежит.

Приведем компьютерную реализацию, анализ свойств и качеств 1-солитонного решения (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6.

1-солитонное решение (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, t = 0$ изображено на рис. 1.

На рис. 2–4 изображено 1-солитонное решение (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 в течение времени, изменяющегося от -10 до 10 при $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$.

На рис. 5–12 показано, что постоянные α и β задают направление $\vec{r} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$, вдоль которого расположен 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6. Далее будем называть вектор \vec{r} вектором направления солитона.

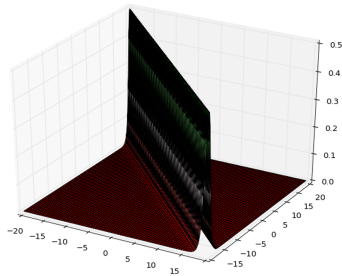


Рис. 1. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, t = 0$

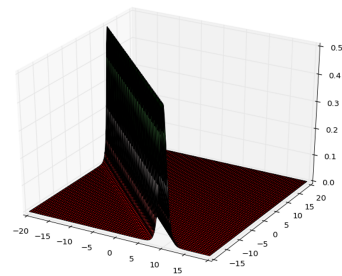


Рис. 2. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, t = -10$

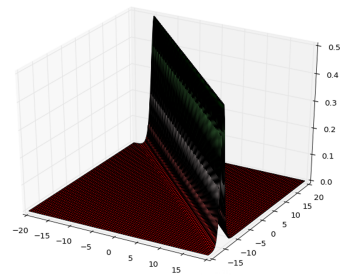


Рис. 3. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, t = 5$

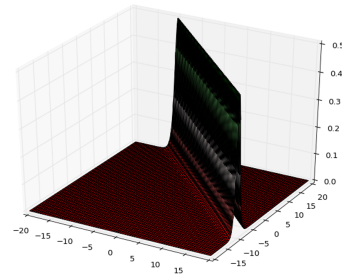


Рис. 4. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, t = 10$

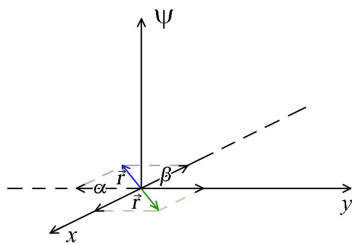


Рис. 5. Направление $\vec{r} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ расположения 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 1$ (или $\alpha = -1, \beta = -1$), $\gamma = 0, t = 0$

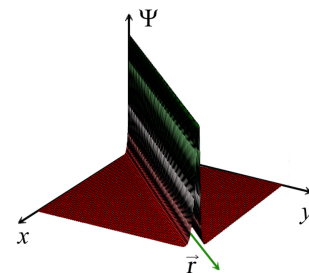


Рис. 6. Расположение 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 1$ (или $\alpha = -1, \beta = -1$), $\gamma = 0, t = 0$

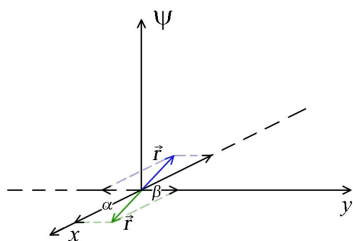


Рис. 7. Направление $\vec{r} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ расположения 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 5, \beta = 1$ (или $\alpha = -5, \beta = -1$), $\gamma = 0, t = 0$

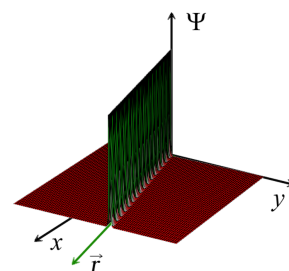


Рис. 8. Расположение 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 5, \beta = 1$ (или $\alpha = -5, \beta = -1$), $\gamma = 0, t = 0$

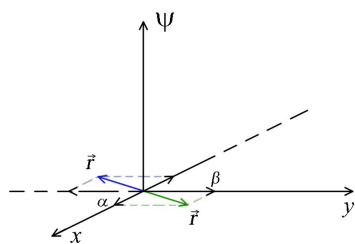


Рис. 9. Направление $\vec{r} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ расположения 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 5$ (или $\alpha = -1, \beta = -5$), $\gamma = 0, t = 0$

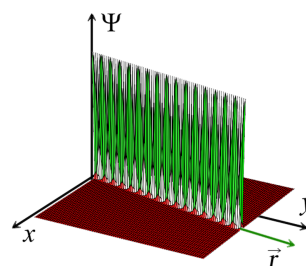


Рис. 10. Расположение 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = 5$ (или $\alpha = -1, \beta = -5$), $\gamma = 0, t = 0$

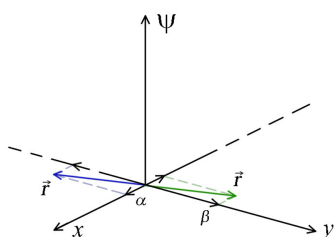


Рис. 11. Направление $\vec{r} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ расположения 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = -5$ (или $\alpha = -1, \beta = 5$), $\gamma = 0, t = 0$

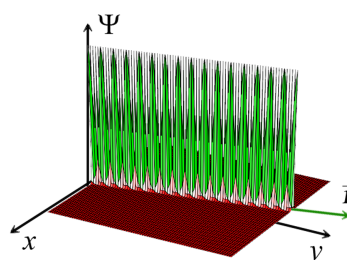


Рис. 12. Расположение 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 1, \beta = -5$ (или $\alpha = -1, \beta = 5$), $\gamma = 0, t = 0$

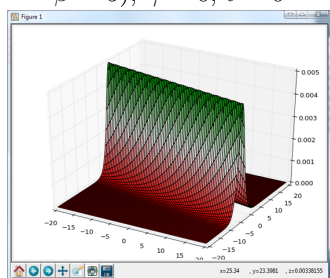


Рис. 13. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 0, 1, \beta = 0, 5, \gamma = 0, t = 0$, основной вид

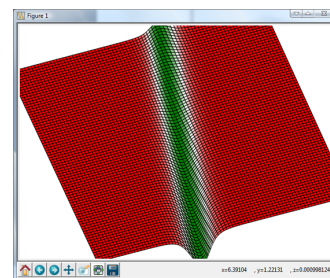


Рис. 14. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 0, 1, \beta = 0, 5, \gamma = 0, t = 0$, вид сверху

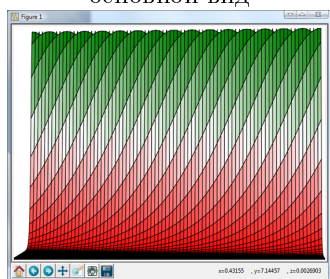


Рис. 15. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 0, 1, \beta = 0, 5, \gamma = 0, t = 0$, вид слева

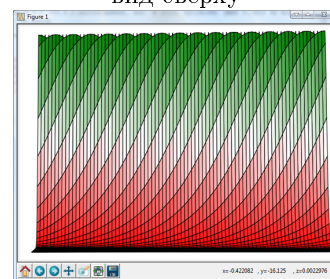


Рис. 16. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = 0, 1, \beta = 0, 5, \gamma = 0, t = 0$, вид справа

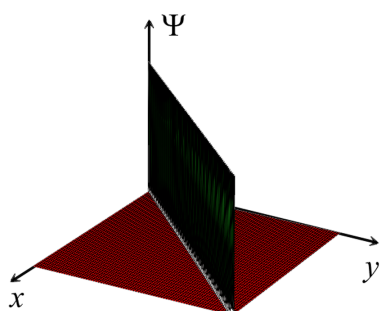


Рис. 17. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = \beta = 5$, $\gamma = 0$, $t = 0$

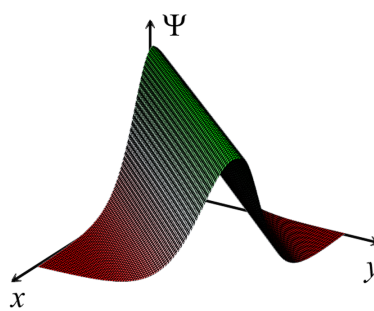


Рис. 18. 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 при $\alpha = \beta = 0, 1$, $\gamma = 0$, $t = 0$

Таблица

Сводная таблица параметров и характеристик 1-солитонов (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 различной амплитуды (α , β — постоянные, A — амплитуда, v — скорость)

α	β	A , м	v , м/с
1	1	0,5	0,7
4,5	β	10	$\frac{20\beta}{\sqrt{20,25 + \beta^2}}$
5	5	12,5	17,6
7,7	β	30	$\frac{60\beta}{\sqrt{59,29 + \beta^2}}$
10	10	50	70,7

Интересно отметить, что гладкий, ровный гребень 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 достигается только тогда, когда $\alpha = \beta$, как показано на рис. 1–4, 6 и далее 17, 18. В случае неравных параметров $\alpha \neq \beta$ наблюдается эффект закручивания 1-солитона против часовой стрелки от вектора направления \vec{r} , при этом гребень 1-солитона становится неоднородным и возникает эффект „морской пены“ на гребне волны, как показано на рис. 8, 10, 12–16.

Амплитуда $A = \frac{\alpha^2}{2}$ 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 всегда положительна. Следовательно, 1-солитон (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 может принимать только форму горы или холма, он не может быть впадиной, чего нельзя сказать о солитонах других пространственно-двумерных нелинейных уравнений А1–А14 и АI–АХII [1].

Направление движения 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 показывает вектор \vec{n} , ортогональный вектору направления \vec{r} , т. е. $\vec{n} \perp \vec{r}$. Далее будем называть вектор \vec{n} вектором движения солитона.

Из табл. видно, что 1-солитоны (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 могут иметь одинаковую амплитуду при разных скоростях. Например, в табл. показано, что скорости волн высотой в 10 и 30 метров, зависят от параметра β . Следовательно, скорость 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6 зависит от вектора направления

$\vec{r} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ или вектора движения \vec{n} , ортогонального вектору \vec{r} .

Таким образом, мы представили (2+1)-мерное эволюционное уравнение А6, получили иерархию его вспомогательных линейных систем, вывели закон сохранения, показали его (2+1)-мерную билинейную форму Н2, нашли его N-солитонные решения, сделали компьютерную реализацию 1-солитонного решения (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6, исследовали свойства и качества 1-солитона данного уравнения, для наглядности собрали в таблицу некоторые данные и характеристики 1-солитона (2+1)-мерного эволюционного уравнения А6.

Список литературы

1. Alexeyeva A. V. (2+1)-dimensional analogs of the Korteweg-de Vries equation // International Journal of Contemporary Mathematics. 2012. V. 3. N 1–2. P. 47–55.
2. Алексеева А. В. (2+1)-мерное солитонное уравнение А9 и его решения / Современные проблемы гуманитарных и естественных наук: матер. XIV Междунар. науч.-практ. конф. Москва, 26–27 марта 2013 г. С. 13–18.
3. Алексеева А. В. (2+1)-мерное нелинейное уравнение А10 и его солитонные решения / Тенденции и перспективы развития современного научного знания: Матер. VI Междунар. науч.-практ. конф. Москва, 29 марта 2013 г. С. 21–27.
4. Alexeyeva A. V. Solution of the (2+1)-dimensional soliton equation A3 by the Hirota's method / Applied Sciences in Europe: tendencies of contemporary development. Proc. of the 6th Internat. scient. conf. Stuttgart, Oct. 18, 2014. Stuttgart: ORTPublishing, 2014. P. 3–7.
5. Alexeyeva A. V. The (2+1)-dimensional soliton equation A7 and its bilinear form / Applied Sciences and technologies in the United States and Europe: common challenges and scientific findings. Proc. of the 7th Internat. scient. conf. N.Y.: CibunetPublishing, 2014. P. 30–34.
6. Alexeyeva A. V. The (2+1)-dimensional soliton equation A11 and its bilinear form / Innovations in Technical and Natural Sciences. Proc. of the 3rd European conf. Vienna: „East West“ Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH, 2014. P. 63–68.
7. Алексеева А. В. (2+1)-мерная модель Кортевега-де Фриза и ее интегрируемость // Вестник МОН РК. 2006. № 3. С. 12–15.
8. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.

*Алексеева Александра Валерьевна —
канд. физ.-мат. наук, PhD,
вед. науч. сотр.*

*Института математики и математического
моделирования МОН РК;
тел.: 8 (727) 375-93-05, 8 (701) 742-22-52;
e-mail: alankritalalita@gmail.com*

*Амирханова Гульшат Аманжоловна —
PhD докторант, науч. сотр.*

*Казахского национального университета
им. аль-Фараби, Института информационных
и вычислительных технологий МОН РК;
тел.: 8 (727) 272-10-00, 8 (707) 636 80 78;
e-mail: gulshat.aa@gmail.com*

Дата поступления — 03.05.2015