

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРУППОВЫХ ОТКАЗОВ В АНАЛИЗЕ НАДЕЖНОСТИ СЕТЕЙ

А. С. Родионов, С. А. Хапугин*

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

*Новосибирский государственный университет,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.9

Рассматриваются некоторые вопросы моделирования групповых отказов в сетях при анализе их надежности. Предложены реалистичные модели отказов с ограничением распространения. В рамках предложенных моделей исследуются способы снижения вычислительной сложности при решении задач анализа надежности сетей.

Ключевые слова: случайный граф, надежность, групповые отказы, алгоритм.

New models of dependent failures in communication networks are discussed in the paper. These models allows analyze situations with successive dependent failures with limited range of spreading and with simultaneous failures of several elements, as channels, as nodes. Formal models' descriptions are presented along with proofs of their correctness.

Key words: network, reliability, dependent failures.

Введение. Задача определения или оценивания надежности сети является одной из важнейших при их проектировании. Эта задача исследовалась на протяжении многих десятилетий и продолжает оставаться предметом исследований. Используются различные модели, методы и показатели надежности, выбор которых обуславливается спецификой и назначением конкретных сетей [1, 2].

Чаще всего в качестве модели рассматривается неориентированный граф, реже ориентированный граф или гиперграф. Наиболее исследована задача так называемой k -терминальной надежности, т.е. определения вероятности k выделенных узлов сети, где k может меняться от двух ($s - t$ связность) до общего количества вершин. При этом чаще всего рассматриваются графы с надежными вершинами и независимо выходящими из строя ребрами и/или вершинами [3, 4]. Иногда на связность накладываются дополнительные ограничения, например, на длину связующих цепей [5]. Причиной подобных предположений является относительная простота моделей и их анализа. Однако, предположение независимости отказов часто приводит к результатам, далеким от реальности, и, соответственно, к ложным решениям.

В более реалистичных моделях во внимание принимается возможность распространения отказа, т.е. отказ одного элемента может привести к цепочке отказов, как протяженной во времени, так и происходящей одновременно. Примерами таких отказов могут быть отказ базовой телефонной станции, при котором от сети отключается сразу множество телефонов, зашумление радиочастотного диапазона, при котором прерывается много

соединений, использующих этот диапазон, природная или антропогенная катастрофа, разрушающая инфраструктуру связи в некоторой области, и т. д.

Известны публикации по моделям сетей с зависимыми отказами. В [6] рассмотрена модель коррелированных отказов. Корреляционная зависимость определялась исходя из евклидова расстояния между узлами, что вполне объяснимо в случае отказов, связанных с природными или антропогенными факторами, например ураганом или обильным снегопадом. Однако такая модель применима лишь к сетям, обслуживающим достаточно большие территории масштаба страны или региона.

В [7] для моделирования зависимых отказов специального вида используется метод Монте-Карло, но для получения значимых результатов для больших сетей требуется проведение слишком большого количества экспериментов.

Упрощенная марковская модель отказов предложена в [8]. В этой модели все переходные вероятности равны между собой. Модель удобна для получения красивых аналитических результатов, но абсолютно не имеет практического смысла.

В нашей статье мы предлагаем новые модели зависимых отказов, более подходящие для описания некоторых реальных ситуаций и в то же время довольно простые, математически корректные и позволяющие дальнейшее развитие.

1. Постановка задачи.

Неформальная постановка задачи. В качестве модели рассматриваются случайные графы. Как ребра, так и вершины могут выходить из строя без восстановления. Отказ ребра приводит к его удалению из графа, тогда как отказ вершины приводит к ее удалению вместе со всеми инцидентными ей ребрами.

Главное предположение связано с последовательным характером отказов, т. е. мы выбираем такие маленькие интервалы времени, что на них не может произойти более одного отказа. Также мы предполагаем наличие правила останова процесса распространения отказа, например по допустимому количеству последовательных отказов в сети или ее части. В реальных сетях это соответствует наличию некоторого механизма безопасности, блокирующего дальнейшее распространение отказа, в частности отключением фрагмента сети.

Нас интересует моделирование зависимых отказов в графе. Однако, в самом общем случае модель зависимых отказов является весьма громоздкой структурой, поскольку необходимо рассматривать события для каждой последовательности отказов и вводить условные вероятности отказов при условии реализации каждого из этих событий. Этот подход не только неудобен для изучения, но и не применим на практике, так как сбор статистики для изучения сети в рамках такой модели не представляется возможным.

В качестве модели зависимых отказов мы будем использовать модель каскадных отказов, в которой вероятность выхода из строя элемента на i -ом шаге процесса отказов зависит только от того, какой элемент вышел из строя на $(i - 1)$ -ом шаге. При этом на первом шаге элементы считаются отказывающимися независимо. Такой подход видится применимым, например, к таким ситуациям, как отказ подстанций при скачке напряжения в электрической сети или перекрытие дорог вследствие снегопада. В дальнейшем будет проиллюстрирована применимость этой модели и к другим практическим ситуациям.

Для оценки надежности сети будут рассмотрены некоторые известные показатели надежности. Будут приведены алгоритмы расчета математического ожидания таких показателей в рамках модели каскадных отказов. В силу того, что в общем случае задача расчета какого-либо показателя надежности сводится к полному перебору, будут предло-

жены некоторые способы ускорения расчетов. В частности, будут рассмотрены некоторые частные случаи регулярных структур, для которых в явном виде будут получены формулы расчета показателей.

Итак, основной целью данной работы является изучение модели каскадных отказов, ее применимости к реальным ситуациям, а также составление алгоритмов расчета математического ожидания различных показателей надежности сети, заданной графом, в рамках этой модели и оптимизация данных алгоритмов для ускорения расчетов на практике.

Формальная постановка задачи. Пусть заданы граф $G = (V, E)$, а также множество $L \subset V \cup E$ ненадежных компонентов графа. Будем обозначать элементы L как l_1, l_2, \dots .

Введем формальное вероятностное пространство. В качестве множества элементарных исходов ω будем использовать множество всех неповторяющихся последовательностей из номеров ненадежных элементов L , оканчивающихся остановкой отказов (обозначим их Stop).

Для удобства будем пользоваться следующими обозначениями: последовательность отказов элементов $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}$, оканчивающаяся остановкой, будем обозначать как $e = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, и будем обозначать $e_j = i_j$. Введем также следующие обозначения событий: $S(i) = e \in \omega | e_1 = i$ — все исходы, отказы в которых начинаются с элемента l_i .

Таким образом, каждый элементарный исход обозначает одну реализацию графа после корректной завершенной последовательности отказов. В качестве сигма-алгебры событий возьмем множество всех подмножеств элементарных исходов. Осталось лишь определить вероятностную меру. Обозначим $H := (L \cup \{\text{Stop}\})$ Для этого пусть заданы следующие функции:

$$p_0 : H \rightarrow R^+,$$

$$p : L \times H \rightarrow R^+,$$

такие, что $\exists \hat{l} \in H | p_0(\hat{l}) > 0$ и

$$\forall l_k \in L \exists \hat{l} \in H | p(l_k, \hat{l}) > 0.$$

Наконец, введем функцию

$$p^* : L \times H \times 2^H \rightarrow (0, 1),$$

заданную следующим соотношением: для любого подмножества $E = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset L$ и для $l, m \in H \setminus E$ положим:

$$p^*(l, m, E) := \frac{p(l, m)}{\sum_{r \in H \setminus E} p(l, r)},$$

и в точках, где $\sum_{r \in H \setminus E} p(l, r) = 0$, доопределим ее нулем.

Перейдем, наконец, к определению (1) вероятностной меры. Достаточно определить ее на всех элементарных исходах, то есть для произвольного $e = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \omega$. Зададим ее следующим образом:

- 1) немедленное вырождение отказов:

$$P(\{\emptyset\}) := \frac{p_0(\text{Stop})}{\sum_{l \in H} p_0(l)};$$

2) один независимый отказ:

$$P(\{i\}) := \frac{p_0(i)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} \cdot p^*(i, \text{Stop}, \emptyset);$$

3) последовательность зависимых отказов:

$$P(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) := \frac{p_0(i_1)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} \cdot p^*(i_1, i_2, \emptyset) \cdot p^*(i_2, i_3, i_1) \cdot p^*(i_3, i_4, i_1, i_2) \cdot \dots \cdot p^*(i_k, \text{Stop}, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}).$$

Легко проверить, что по построению тройка $(\omega, 2^\omega, P)$ задает вероятностное пространство. Остановимся, однако, на том факте, что $\sum_{e \in \omega} P(e) = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \omega} P(e) &= P(\emptyset) + \sum_{i \in G} P(i) + \sum_{i_1, i_2 \in G} P(\{i_1, i_2\}) + \dots + \\ &\quad \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \in G} P(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) = \frac{p_0(\text{Stop})}{\sum_{l \in H} p_0(l)} + \sum_{i \in G} \frac{p_0(i)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} \cdot \\ &\quad \cdot p^*(i, \text{Stop}, \emptyset) + \sum_{i_1, i_2 \in G} \frac{p_0(i_1)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} \cdot p^*(i_1, i_2, \emptyset) \cdot p^*(i_2, \text{Stop}, i_1) + \dots + \\ &\quad + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \in G} \frac{p_0(i_1)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} \cdot p^*(i_1, i_2, \emptyset) \cdot p^*(i_2, i_3, i_1) \cdot p^*(i_3, i_4, i_1, i_2) \cdot \dots \\ &\quad \cdot p^*(i_n, \text{Stop}, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}) = \frac{p_0(\text{Stop})}{\sum_{l \in H} p_0(l)} + \sum_{i \in G} \frac{p_0(i)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{p(i, \text{Stop})}{\sum_{r \in H} p(i, r)} + \sum_{j \in G} \frac{p(i, j)}{\sum_{r \in H} p(i, r)} \cdot \left(\frac{p(j, \text{Stop})}{\sum_{r \in H \setminus i} p(j, r)} + \dots \right) \right) = \\ &\quad \frac{p_0(\text{Stop})}{\sum_{l \in G} p_0(l)} + \sum_{i \in H} \frac{p_0(i)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} \cdot \left(\frac{p(i, \text{Stop})}{\sum_{r \in H} p(i, r)} + \sum_{j \in G} \frac{p(i, j)}{\sum_{r \in H} p(i, r)} \cdot 1 \right) = \\ &\quad = \frac{p_0(\text{Stop})}{\sum_{l \in H} p_0(l)} + \sum_{i \in G} \frac{p_0(i)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} \cdot \left(\sum_{j \in H} \frac{p(i, j)}{\sum_{r \in H} p(i, r)} \right) = \\ &\quad = \frac{p_0(\text{Stop})}{\sum_{l \in G} p_0(l)} + \sum_{i \in G} \frac{p_0(i)}{\sum_{l \in H} p_0(l)} = 1. \end{aligned}$$

Наша первая задача состоит в том, чтобы для некоторой функции от графа $f(G)$ (показатель надежности) рассчитывать $\mathbb{E}f(G \setminus e)$, то есть математическое ожидание показателя надежности в рамках данной модели.

2. Алгоритм расчета математического ожидания показателя надежности графа. Пусть задана некая функция графа $f(G)$ — показатель надежности, например,

размер максимальной связной компоненты. Ниже предложен алгоритм расчета $\mathbb{E}f(G \setminus e)$, по сути являющийся полным перебором:

```

function func( $l, l', \{l_1, \dots, l_k\}, k$ )
  for  $m \in H \setminus \{l_1, \dots, l_k, l\} | p(l', m, \{l_1, \dots, l_k\}) > 0$  do
    if  $m = Stop$  then
      |  $S := S + kf(G \setminus \{l_1, \dots, l_k, l\})$ 
    else
      | func( $l', m, \{l_1, \dots, l_k\}, k \cdot p(l', m, \{l_1, \dots, l_k\})$ )
    end
  end
function main()
   $S := 0$ ; for  $l \in H | p_0(l) > 0$  do
    if  $l = Stop$  then
      |  $S := S + p_0(l)f(G)$ ;
    else
      | for  $m \in H \setminus \{l\} | p(l, m, \emptyset) > 0$  do
        | func( $l, m, \emptyset, p_0(l), p(l, m, \emptyset)$ )
      end
    end
  end

```

Немедленно возникает вопрос: возможно ли каким-либо образом улучшить этот алгоритм? Ведь полный перебор всех реализаций графа не представляется жизнеспособным подходом. Ответ дает следующая простая

Лемма 1. В общем случае задача подсчета $\mathbb{E}f(G \setminus e)$ для произвольного показателя сводится к полному перебору.

Доказательство. В [14] показано, что задача подсчета $\mathbb{E}f(G \setminus e)$ для функции связности

$$f_1(G) = \{1, \text{если } G \text{ связан}; 0, \text{иначе}\}$$

в случае независимых отказов элементов графа сводится к полному перебору. Если в модели каскадных отказов использовать показатель $f_1(G)$ и положить

$$p(l, m, \{l_1, \dots, l_k\}) := p_0(l),$$

то, очевидно, эта задача эквивалентна задаче с независимыми отказами.

Модель с ограничением на глубину отказа. В некоторых реально существующих сетях используются специальные предохранительные механизмы, способные остановить распространение отказа, в частности, автоматические предохранители. В модели каскадного отказа этот факт можно отразить следующим образом: пусть заданы функции p_0, p, p^* как в модели каскадных отказов. Зададим функцию

$$p^{**}(l, m, E) = p^*(l, m, E) \cdot I\{|E| < d\},$$

где I — индикаторная функция, а $d > 0$ — максимально допустимая глубина отказа. Заменив p^* на p^{**} в определении (1), получим определение вероятностной меры для вероятностного пространства модели с ограничением на глубину отказа.

Такое ограничение представляет значительный интерес при практических расчетах, так как ограничение на глубину отказа позволяет соответственно ограничить глубину рекурсии в алгоритме 1, что приводит к значительному ускорению расчетов.

3. Граф зависимостей. В некоторых случаях для представления зависимых каскадных отказов вместо функций p_0, p , задающих их распределение, удобнее использовать *граф зависимостей*:

Пусть задан граф $G = (V, E)$ с ненадежными элементами $L \subset (V \cup E)$ и распределением каскадных отказов, заданным функциями p_0, p . Направленный граф $G' = (V', E')$, где $V' = L$, а E состоит из направленных ребер $(l_1, l_2) \in E' \iff \exists A \subset L \mid p(l_1, l_2) > 0$ с весами $w(e = (l_1, l_2)) := p(l_1, l_2)$, будем называть графом зависимостей графа G .

Оперировать таким графом удобно для иллюстрации зависимости отказов элементов графа. Особенно удобным этот граф становится в случае, когда вершины G могут отказывать, а ребра — абсолютно надежны, то есть $L \cap E = \emptyset$. Далее в этом параграфе будем рассматривать только такие сети.

Ниже будет показано, что при такой постановке задачи и дополнительных условиях на целевую функцию, возможно редуцировать граф зависимостей и тем самым ускорить расчет некоторых показателей надежности путем уменьшения количества элементов для полного перебора.

При проведении редукции графа зависимостей целью являются замена некоторых подграфов графа G' подграфами меньшей размерности за счет введения дополнительных весовых коэффициентов элементов и изменение алгоритма расчета показателя надежности таким образом, чтобы, учитывая дополнительные веса, получить тот же показатель надежности. То есть,

$$G \rightarrow (G_{\text{reduced}}, f), \text{ где } |G_{\text{reduced}}| < |G|, f : G_{\text{reduced}} \rightarrow \mathbb{R},$$

где f — весовая функция.

3.1. Рассматриваемые целевые функции. Получение универсального алгоритма редукции графа, позволяющего рассчитывать абсолютно любые целевые функции, невозможно. Однако в некоторых частных случаях решение существует.

Например, можно показать, что для функции $f_v(G) = |V| - |\omega|$ (количество отказавших вершин) можно производить редукцию подграфов, в частности, удаление висячих вершин и редукцию цепей. Возможно производить некоторые виды редукции и для таких показателей надежности, как $f_v(G) = |E| - |\omega|$ — число отказавших ребер; 2-терминальная связность; величина потока, проходящего через данное ребро, и некоторых других показателей. Далее ограничимся рассмотрением только показателя f_v .

3.2. Рассматриваемые распределения отказов. Наложим следующее условие на функции p_0 и p :

$$p(i, j) > 0 \Rightarrow \{l_i, l_j \text{ — смежны}\}.$$

Такое ограничение возможностей распределения отказов несколько сужает круг возможных приложений методов редукции, однако значительно упрощает выкладки. Заметим, что эти условия не претендуют на наименьшую общность. Невозможность проведения редукции в случае более мягких условий на распределение отказов в рамках данной работы не доказано.

3.3. Редукция графа зависимостей. Пусть в графе зависимостей G' присутствует подграф $G_R \subset G'$, такой, что в нем нет независимо отказывающих элементов, а зависимые

отказы входят в него через единственную вершину $s \in G_R$ и выходят через единственную вершину $f \in G_R$. Покажем, что этот граф вместе с вершинами s, f можно заменить на одну вершину v_r с некоторым весом, который мы будем специально учитывать при подсчете математического ожидания числа отказавших вершин таким образом, что итоговое расчетное значение от этого не изменится.

Для этого рассмотрим все возможные последовательности отказов. В силу того, что внутри G_R нет независимо отказывающихся вершин и последовательность отказов может войти в него только через s и выйти только через f , можно разбить все последовательности отказов с ненулевой вероятностью на следующие три категории:

- 1) последовательности, которые не включают ни одной вершины из G_R ;
- 2) последовательности, которые заходят в G_R через s и останавливаются внутри G_R ;
- 3) последовательности, которые заходят в G_R через s , проходят через него и выходят через f .

Понятно, что замена графа G_R на вершину не повлияет на отказы первой категории. Последовательности же второй и третьей категорий содержат подпоследовательность отказов из G_R , поэтому будут затронуты при редукции. Рассмотрим какую-нибудь последовательность отказов из второй категории:

$$A = (i_1, i_2, \dots, i_k, s, v_1, \dots, v_l, \text{Stop}).$$

Понятно, что $f(G \setminus A) = |A| = k + (l + 1)$. Заметим также, что

$$P(A) = P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot P((s, v_1, \dots, v_l, \text{Stop})),$$

где второй множитель зависит лишь от структуры G_R в силу условий, наложенных на этот подграф и распределение отказов; а первый множитель, напротив, не зависит от структуры G_R .

Рассмотрим теперь какую-нибудь последовательность отказов из третьей категории:

$$B = (i_1, i_2, \dots, i_k, s, v_1, \dots, v_l, f, i_{k+1}, \dots, i_n, \text{Stop}).$$

Легко увидеть, что $f(G \setminus B) = |B| = k + (l + 1) + (n - k - 1) = n + (l + 1)$. Распишем теперь вероятность $P(B)$:

$$P(B) = P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot P((s, v_1, \dots, v_l, f)) \cdot P((f, i_{k+1}, \dots, i_n, \text{Stop})).$$

Мы видим, что опять лишь второй сомножитель зависит от структуры G_R , в то время как первый и последний зависят лишь от структуры $(G \setminus G_R)$. Кроме того, мы видим также и какой вклад в расчетный показатель вносит подпоследовательность отказов, лежащая в G_R — длину этой самой подпоследовательности.

Рассмотрим граф G_R отдельно от графа G' . Для этого добавим к нему вершину v_e — выходную вершину для всех последовательностей отказа, и все направленные ребра, выходящие через f , заменим на одно ребро (f, v_e) с весом, равным сумме весов всех этих ребер. В качестве распределения зависимых отказов возьмем сужение функции p^* на G_R , однако для задания распределения исходных независимых отказов воспользуемся функцией:

$$p(v) = \{1, \text{если } v = s; 0 \text{ иначе}\}.$$

Продолжим также p^* на v_e следующим образом: $p^*(v_e, \text{Stop}) := 1; \forall l \in H \neq \text{Stop } p^*(v_e, l) := 0$. Обозначим математическое ожидание числа отказавших вершин G_R с этими параметрами за $w(G_R)$. Назовем также величину $P_{\text{Exit}}(G_R) := P((s, \dots, f, v_e, \text{Stop}))$ вероятностью выхода, а ее дополнение $P_{\text{Stop}}(G_R) := 1 - P_{\text{Exit}}(G_R)$ — вероятностью остановки внутри G_R .

Теперь модифицируем алгоритм расчета математического ожидания функции надежности для взвешенных графов. По умолчанию будем считать, что каждая вершина имеет вес $w(v) = 1$. Будем отныне рассчитывать $\mathbb{E}P(\omega)f'(\omega)$, где $f'(\omega) := \sum_{v \in \omega} w(v)$, то есть не число отказавших вершин, а их суммарный вес.

Рассмотрим граф G_{red} , являющийся графом G' , в котором G_R заменен на вершину v_r с весом $w = w(G_R)$ следующим образом: все ребра, входящие в s , заменяются на ребра с теми же весами, входящими в v_r ; ребра, выходящие из f , заменяются на ребра, выходящие из v_r , и их веса домножаются на $P_{\text{Exit}}(G_R)$; функция же p^* изменяется следующим образом: $p^*(v_r, \text{Stop}) := P_{\text{Stop}}(G_R)$.

Для доказательства корректности перечисленных действий, докажем следующую теорему:

Теорема 1 о корректности редукции графа. Пусть графы $G, G', G_R, G_{\text{red}}$ заданы так, как описано выше, и заданы соответствующие распределения зависимых отказов; $f = f_v$. Тогда

$$\mathbb{E}_{G_{\text{red}}} f'(\omega) = \mathbb{E}_G f(\omega).$$

Доказательство.

Так как по определению

$$\mathbb{E}_{G_{\text{red}}} f'(\omega) = \sum_{G_{\text{red}}} P(\omega) f'(\omega);$$

$$\mathbb{E}_G f(\omega) = \sum_G P(\omega) f(\omega),$$

достаточно найти однозначное соответствие между слагаемыми в суммах, стоящих в правых частях равенств. Воспользуемся описанными выше тремя категориями последовательностей отказов. Очевидно, что для отказов из первой категории слагаемые слева и справа равны. Достаточно показать, что они равны и для остальных отказов.

Зададимся каким-нибудь отказом второй категории:

$$A = (i_1, i_2, \dots, i_k, s, v_1, \dots, v_l, \text{Stop}).$$

Зафиксируем цепочку отказов, не входящую в G_R : $(i_1, i_2, \dots, i_k, s)$. Возьмем все отказы второй категории, имеющие такое же начало, и обозначим их как $S(A)$. Распишем:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in S(A)} P(e) f(e) &= \sum_{e \in S(A)} P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot P((s, v_1, \dots, v_l, \text{Stop})) \cdot f(e) = \\ &P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \sum_{e \in S(A)} P((s, v_1, \dots, v_l, \text{Stop})) f(e) = \\ &P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \sum_{e \in S(A)} P((s, v_1, \dots, v_l, \text{Stop})) (k + l + 1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k \cdot P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot \sum_{e \in S(A)} P((s, v_1, \dots, v_l, \text{Stop})) + \\
& P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot \sum_{e \in S(A)} P((s, v_1, \dots, v_l, \text{Stop}))(l+1) = \\
& P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot P_{\text{Stop}}(G_R)(w(G_R) + k).
\end{aligned}$$

Правая часть совпадает со слагаемым в $\sum_{G_{\text{red}}} P(\omega) f'(\omega)$, соответствующим отказу с началом $(i_1, i_2, \dots, i_k, v_r)$ и остановкой в v_r .

Аналогичным образом можно провести рассуждения и для отказов третьей категории. Возьмем в ней какую-нибудь последовательность:

$$B = (i_1, i_2, \dots, i_k, s, v_1, \dots, v_l, f, i_{k+1}, \dots, i_n, \text{Stop}).$$

Возьмем все отказы третьей категории с таким же началом и концом, то есть фиксируем пути отказов вне G_R и берем все возможные пути через G_R . Обозначим это множество $F(B)$. Распишем:

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in F(B)} P(e) f(e) &= \sum_{e \in F(B)} P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot P((s, v_1, \dots, v_l, f)) \cdot \\
&= \cdot P((f, i_{k+1}, \dots, i_n, \text{Stop})) f(e) = P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot \\
&= \cdot P((f, i_{k+1}, \dots, i_n, \text{Stop})) \cdot \sum_{e \in F(B)} P((s, v_1, \dots, v_l, f)) f(e) = \dots
\end{aligned}$$

Обозначим для компактности записи:

$$P_1 := P((i_1, i_2, \dots, i_k, s)) \cdot P((f, i_{k+1}, \dots, i_n, \text{Stop})).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in F(B)} P(e) f(e) &= P_1 \sum_{e \in F(B)} P((s, v_1, \dots, v_l, f)) f(e) = P_1 \sum_{e \in F(B)} P((s, v_1, \dots, v_l, f)) \cdot \\
&= \cdot (l+2+n) = P_1 \cdot P_{\text{Exit}}(G_R) w(G_R) + P_1 \cdot P_{\text{Exit}}(G_R) n \\
&= P_1 \cdot P_{\text{Exit}}(G_R) (w(G_R) + n).
\end{aligned}$$

Правая часть совпадает со слагаемым в $\sum_{G_{\text{red}}} P(\omega) f'(\omega)$, соответствующим отказу $(i_1, i_2, \dots, i_k, v_r, i_{k+1}, \dots, i_n)$.

Таким образом, слагаемые второй и третьей категории переходят при редукции в какое-либо одно слагаемое в подсчете взвешенного показателя редуцированного графа, а слагаемые первой категории остаются неизменными. Очевидно, что дополнительных слагаемых не добавляется. Теорема доказана.

Несложно заметить, что аналогичные рассуждения можно провести и для графа G_R , такого, что последовательность отказов заходит в него ровно через одну вершину, но никогда не выходит, так как при этом всего лишь исчезают все слагаемые третьего вида. Доказательство этого представляется очевидным, поэтому будет опущено.

3.4. Следствия редукции графа. Доказанная теорема позволяет нам эффективно редуцировать подграфы специального вида в вершину с весом. Известны эффективные алгоритмы расчета характеристик надежности при обнаружении цепей, висящих вершин,

мостов. Сама по себе редукция графов позволяет сократить количество вершин в полном переборе всех реализаций отказавшего графа, сокращая временную сложность расчетов.

4. Точные формулы для специальных графов. В литературе часто прибегают к еще одному способу ускорения расчетов на практике — использованию точных формул для графов специального вида, таких как цепи, решетки, деревья, циклы; а также формул для полных графов малой размерности. В рамках данной работы были получены следующие формулы.

Лемма 2 (формула для цикла). Для графа G , являющегося циклом длины n , если зависимые отказы происходят только между смежными вершинами, верна следующая формула:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(G \setminus e) = & P(\emptyset)f(G) + \sum_{i \in G} [P(\{i\})f(G \setminus i) + P(\{i\})P(\{i, i+1\}) \cdot \\ & f(G \setminus i, i+1) + \dots + P(\{i\})P(\{i, i+1\})P(\{i, i+2\}) \cdot \\ & \dots \cdot P(\{i, i+1, \dots, i-1\})f(\emptyset) + P(\{i\})P(\{i, i-1\})f(G \setminus i, i-1) + \dots + \\ & P(\{i\})P(\{i, i-1\})P(\{i, i-1, i-2\}) \cdot \dots \cdot P(\{i, i-1, \dots, i+1\})f(\emptyset)]. \end{aligned}$$

В частности, в случае, когда $\forall l \in H p_0(l) = \frac{1}{(n+1)}$;

$$\forall l, m \in G, p(l, m) = \begin{cases} p_1, & \text{если } l, m \text{ смежны.} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и $\forall l \in G p(l, \text{Stop}) = p_2$, и целевой функцией f , зависящей только от структуры графа, то эта формула имеет вид:

$$\mathbb{E}f(G \setminus e) = \frac{q}{n+1}f(G) + nq + \sum_{i=1}^n p^{i-1}f_i, \quad (1)$$

где $p = \frac{p_1}{(p_1+p_2)}$; $q = \frac{p_2}{(p_1+p_2)}$; $f_i = f(G \setminus (k_1, k_2, \dots, k_i))$.

Доказательство 2 очевидно. Доказательство 1 получается подстановкой новых обозначений в 2 и заменой $f(G \setminus i_1, \dots, i_k) = f_k$ в силу симметрии f .

Лемма 3 (формула для цепи).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(G \setminus e) = & P(\emptyset)f(G) + \sum_{i=1}^n P(i) (F^+(i) + F^-(i)), \text{ где} \\ F^+(i) = & f(G \setminus i)P(\text{Stop}) + P(i, i+1)f(G \setminus (i, i+1))P(\text{Stop}) + \dots + \\ & P(i, i+1, \dots, n, 1, \dots, i-2, i-1)f(\emptyset)P(\text{Stop}); \\ F^-(i) = & f(G \setminus i)P(\text{Stop}) + P(i, i-1)f(G \setminus (i, i-1))P(\text{Stop}) + \dots + \\ & P(i, i-1, \dots, 1, n, \dots, i+2, i+1)f(\emptyset)P(\text{Stop}), \\ F^-(0) = & F^+(n) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство тривиально — достаточно расписать $\mathbb{E}f(G \setminus e)$ по определению.

5. Экспериментальное исследование модели отказов. Для исследования предложенной модели была разработана программа на языке Objective-C. Программа состоит из двух частей — генерации различных случайных графов и соответствующих совместных

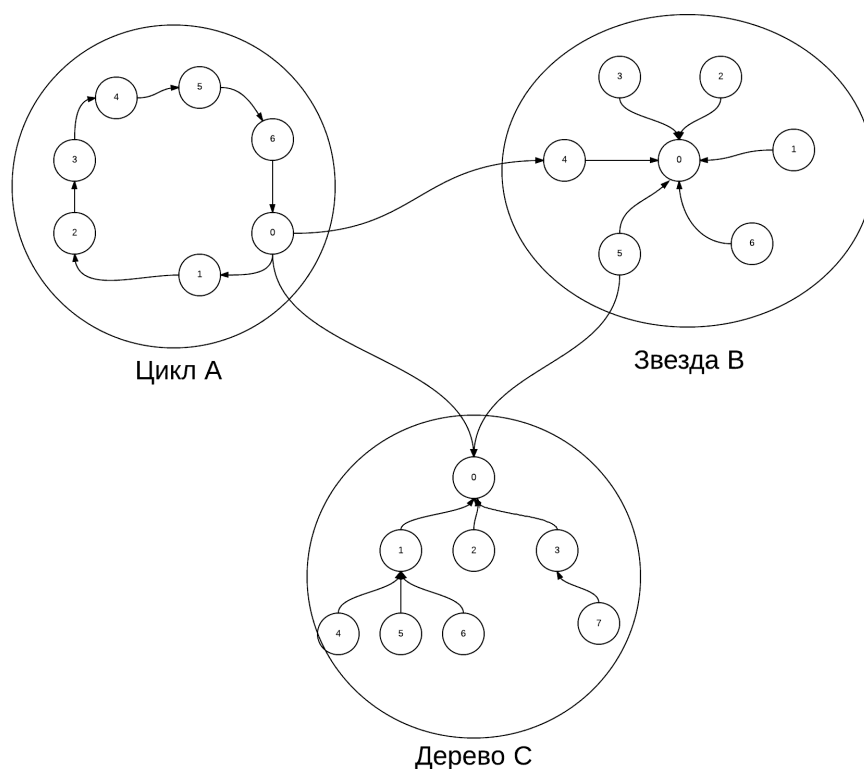


Рисунок. Моделируемая сеть

распределений зависимых отказов и непосредственно расчета показателей надежности в рамках модели каскадных отказов.

В качестве генерируемых случайных структур были выбраны классические регулярные графы: решетки, кольца, цепи, деревья, звезды; а также случайные геометрические графы. Помимо этого, была реализована возможность создавать граф, состоящий из нескольких регулярных графов, соединенных абсолютно надежными ребрами.

Распределение вероятностей зависимых отказов подбиралось так, чтобы для каждой вершины отказ каждой из существующих соседних вершин был равновероятен, и с такой же вероятностью последовательность отказов останавливалась в этой вершине. Кроме этого, была реализована возможность помечать некоторые подграфы как защищенные, то есть такие, что последовательность отказов не может покинуть подграф.

В качестве целевых функций было выбрано несколько показателей надежности, в частности количество уцелевших вершин и размер максимальной связной компоненты.

Для проверки правильности расчетов был реализован подсчет методом Монте-Карло. Для ускорения расчетов, полный перебор возможных исходов производился параллельно (многопоточность обеспечивалась параллельной очередью `NSOperationQueue` из стандартной библиотеки `Foundation`).

5.1. *Исследование влияния защиты подсети на надежность сети.* Рассматривается граф, моделирующий некоторую небольшую абстрактную компьютерную сеть, состоящую из трех подсетей: цикла А длины 7, звезды В из 7 вершин и дерева С на 8 вершинах (см. рис.).

В качестве рассматриваемого показателя будет рассматриваться размер максимальной

Таблица

Надежность защищенных сетей

Защищенные подсети	Максимальная связная компонента
нет	17,54287955714198687929
А	18,57495085212022090104
В	18,16249735809181586887
С	18,00202907237274274621
А и В	19,15114470108692401595
А и С	19,02846429649757098446
В и С	19,03473102858287901995
А, В, С	19,20421573067633715937

связной компоненты. Были проведены расчеты, исследующие влияние наличия защиты подсети от вхождения внешних отказов на надежность сети в целом. Для этого был подсчитан средний взвешенный размер максимальной связной компоненты в случае зависимых отказов, передающихся по всему графу, а затем каждая из подсетей помечалась как защищенная. В таблице приведены расчетные значения.

Как видно, защита подсетей увеличивает надежность всей сети в целом, что вполне соответствует здравому смыслу.

Мы можем сделать вывод, что предложенная в данной работе модель каскадных отказов применима к различным ситуациям в реальной жизни и действительно позволяет выполнять расчеты надежности, полезные при проектировании и анализе сетей.

Заключение. Показано, что задача расчета надежности сетей в случае зависимых отказов элементов является актуальной в настоящее время. Существует множество различных моделей, учитывающих различные особенности структуры сетей, однако только небольшое число моделей принимает в расчет возможность зависимости между отказами элементов сети.

В рамках работы была предложена формальная модель каскадных отказов, позволяющая моделировать зависимые отказы элементов в различных сетях. Были проверены аксиомы вероятностного пространства для такой модели. Для сетей с предохранительными механизмами предусмотрена модель с ограничением на глубину отказа.

Дальнейшие исследования связаны как с рассмотрением других показателей надежности для предложенной модели отказов, так и с расширением этой модели.

Список литературы

1. XIE M., DAI Y., AND POH K. Computing systems reliability — models and analysis. Kluwer, 2004.
2. Jereb. L. Network reliability: models, measure and analysis / In Proceedings of the 6th IFIP Workshop on Performance Modeling and Evaluation of ATM Networks. 1998. P. T02/1–T02/10.
3. COLBOURN C. J. The Combinatorics of Network Reliability. N.Y.: Oxford University Press, 1987.
4. SHOUMAN M. L. Reliability of Computer Systems and Networks: Fault Tolerance, Analysis, and Design. N.Y.: John Wiley & Sons, 2002.

5. CANCELA H. AND PETINGI L.. Diameter constrained network reliability: exact evaluation by factorization and bounds / Proceedings of the International Conference on Industrial Logistics (Japan). 2001. P. 359–366.
6. RAHNAMAY-NAEINI M., PEZOA J., AZAR G., GHANI N., AND HAYAT M. Modeling stochastic correlated failures and their effects on network reliability. In Computer Communications and Networks (ICCCN) / Proceedings of 20th International Conference, July 2011. P. 1–6.
7. BOTEV Z., L'ECUYER P., AND TUFFIN B. Dependent failures in highly reliable static networks / In Simulation Conference (WSC). Proceedings of the 2012 Winter, Dec. 2012. P. 1–12.
8. WEICHENBERG G. E., CHAN V. W. S., AND MÉDARD M. High-reliability architectures for networks under stress. Technical report / Proceedings of the Fourth International Workshop on the Design of Reliable Communication Networks, 2003.
9. COLBOURN CH. J. The combinatorics of network reliability. N.Y.: Oxford Univ. press, 1987.
10. PYLVANAINEN J., VERHO P., JARVINEN J., KUNTTU S. Advanced failure rate and distribution network reliability modelling as part of network planning software / 18th International Conference and Exhibition on Electricity Distribution, 2005.
11. XIE M., DAI Y. S., ПОИ K. L. Computing Systems Reliability: Models and Analysis. / Springer Publishers, 2004.
12. WEICHENBERG G. E., CHAN V. W. S., MEDARD M. High-reliability architectures for networks under stress / INFOCOM 2004. Twenty-third Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, 2004.
13. JEREB L. Network reliability: Models, measures and analysis / In Proceedings of the Sixth IFIPATM'98 Workshop, 1998.
14. SHAKHOV V., SOKOLOVA O., YURGENSON A. An efficient method for pseudo-random UDG graph generating / Seventh International Workshop on Simulation, Rimini, Italy, 2013. Book of Abstracts, Serie Ricerche 2013. N 3. P. 325–326.
15. RODIONOV A. S., HYUNSEUNG C. On. Generating Random Network Structures: Trees.

*Родионов Алексей Сергеевич — д-р техн. наук,
зав. лабораторией Института вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН,
e-mail: alrod@sscc.ru*

Ханугин Степан Андреевич — магистрант НГУ, e-mail: st.khanugin@gmail.com

Дата поступления — 6.05.2015