МОДЕЛИ ИМИТАЦИИ В НЕАРХИМЕДОВОМ ВРЕМЕНИ: ВРЕМЯ, СИСТЕМНЫЕ ДИНАМИКИ

М. И. Нечепуренко*

УДК 510.23:519.681

Предлагается специальная структура ньютонова неархимедова модельного времени, позволяющая рассматривать имитационные модели в рамках общей теории систем (в терминах временных функций) и являющаяся естественной формой синхронизации процессов в структурированных имитационных моделях.

Ключевые слова: имитационные модели, синхронизация процессов.

The special structure of Newton's non-Archimedean model time is proposed. This structure allows consider simulation models in the scope of general theory of systems (in terms of time functions) and is a natural form of synchronization of processes in structural simulation models.

Key words: simulation models, synchronization of processes.

Введение. Широкое применение имитационного моделирования (simulation) к исследованию сложных технических, биологических, экономических и социальных систем привело к развитию теории имитации и, в частности, к формулировке ряда классов систем [1–7] со специфической структурой и сингулярной динамикой поведения. Под сингулярностью динамики здесь понимается патологическая возможность появления в одной реализации эволюции системы последовательности событий, относящихся к одному и тому же моменту модельного времени, но упорядоченных по выполнению (можно было бы говорить о неординарности динамики).

Теория имитации [6, 7] развивается независимо от общей теории систем [8], так как системы с сингулярной динамикой не являются временными (в вещественном времени) и их поведение обычно описывается пособытийно с помощью конструкций, адекватных механизму упорядочения в программах имитации.

Один из возможных путей сближения теории имитации и общей теории динамических систем состоит в обобщении понятия временного объекта, в частности, в рассмотрении последовательностей вида

$$(a_0, t_0), (a_1, t_1), (a_2, t_2), \dots \tag{1}$$

как кусочно-постоянных „обобщенных функций“ времени. В (1) t_i — моменты модельного времени, в которые происходят события $a_{i-1} \to a_i$ изменения состояний объекта; $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots$ Не более чем счетность числа элементов последовательности (1) обеспечивает ее имитируемость — возможность рекуррентного воспроизведения любого ее начального отрезка некоторой имитационной программой за конечное время. Последовательность (1) может быть записана в виде слова

*Статья была опубликована в сб. науч. трудов „Эффективность и структурная надежность информационных систем“ (Системное моделирование — 7). Новосибирск, 1982. С. 43–68.

$$(t_0)a_0^{\sigma_0}a_1^{\sigma_1}a_2^{\sigma_2}\ldots, \tag{2}$$

где $\sigma_i = t_{i+1} - t_i$, интерпретируемого следующим образом.

В начальный момент t_0 объект находится в состоянии a_0. В момент $t_1 = t_0 + \sigma_0$ состояние объекта изменилось на a_1 и т. д. Ограничившись рассмотрением стационарных объектов, можно в (2) опустить элемент (t_0). Для последовательностей такого типа естественно определяется понятие отрезка последовательности, а также операции: сочленения двух последовательностей, первая из которых конечна; сокращения последовательностей, например, $a^\sigma a^\tau = a^{\sigma+\tau}$ при $\sigma,\tau > 0$, но $a^\sigma a^\tau \neq a^\sigma$; внешнего объединения двух последовательностей, например,

$$\begin{pmatrix} a_0^{\sigma_0}a_1^{\sigma_1} \\ b_0^{\tau_0}b_1^{\tau_1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}^{\sigma} \begin{pmatrix} a_1^{\sigma_1}\ldots \\ b_1^{\tau_1}\ldots \end{pmatrix} & \text{при } \sigma_0 = \tau_0, \\ \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}^{\sigma_0} \begin{pmatrix} a_1^{\sigma_1}\ldots \\ b_0^{\tau_0-\sigma_0}b_1^{\tau_1}\ldots \end{pmatrix} & \text{при } \quad \sigma_0 < \tau_0. \end{cases}$$

Сокращенное сочленение отрезков сокращенной последовательности восстанавливает эту последовательность. Сокращенные последовательности совпадают с соответствующими сокращенными проекциями их внешнего объединения. В терминах последовательностей вида (2) могут быть определены стационарные динамические системы с сингулярностями в динамике, в частности, кусочно-линейные агрегаты [1, 2].

В данной работе развивается другой подход, предложенный в сообщении [9]: определяется специальная структура модельного времени, позволяющая, в частности, давать описания имитационных моделей в терминах временных функций.

1. Имитационные программы и имитируемые системы.

1.1. *Общая модель имитации.*

1.1.1. Имитацией называют воспроизведение на цифровых вычислительных машинах отдельных реализаций эволюции в модельном времени исследуемой замкнутой динамической системы (включая среду) и вычисление функционалов, определенных на этих реализациях.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением детерминированных стационарных динамических систем, эволюционирующих на конечных или бесконечных справа интервалах модельного времени. Обобщение на стохастические системы может быть проведено обычным образом.

С процессом имитации связаны две системы: имитируемая система (точнее, ее модельное представление в имитационной программе) и имитационная программа в целом, рассматриваемая как динамическая система. Обе системы замкнуты (автономны). Имитационная программа рекуррентно воспроизводит фазовую траекторию имитируемой системы (изменение во времени ее состояния). При этом за одну реализацию процесса имитации вычисляются значения состояния имитируемой системы лишь для конечного числа моментов модельного времени. Поведение имитируемой системы между этими моментами фактически не рассчитывается имитационной программой, хотя оно должно быть однозначно определено и заложено в алгоритмы имитации таким образом, чтобы подобный расчет мог быть выполнен для произвольного промежуточного момента. Кроме собственно воспроизведения фазовой траектории имитируемой системы, имитационная программа выполняет ряд вспомогательных функций, связанных непосредственно с организацией имитации (продвижение модельного времени, проверка условий окончания имитации и др.), а также с документированием эволюции имитируемой системы. Текущее модельное время и состояние системы являются проекциями вектора состояния программы.

1.1.2. В детерминированном стационарном случае *имитационная программа* может быть описана шестеркой $\mathcal{I} = (P,\ C,\ T,\ f,\ g,\ h)$, где $P \times C \times T$ — множество состояний программы, C — множество состояний имитируемой системы, T — множество моментов модельного времени, функции $f : P\times C \to P$ и $g : C \to C$ определяют переходы (события) в программе, функция $h : C \to T$ продвигает модельное время. Обычно предполагается вещественность и неотрицательность модельного времени, то есть $T = \mathbb{R}^+$. Здесь и далее $\mathbb{R}^+ = [0; \infty]$.

Для заданного начального состояния $a_0 = (p_0,\ c_0,\ t_0) \in P\times C\times T$ программа $\mathcal{I}$ при своем выполнении порождает последовательность (1), в которой $a_i = (p_i,\ c_i,\ t_i)$ и $P_{i+1} = f(p_i,\ c_i)$, $c_{i+1} = g(c_i)$, $t_{i+1} = t_i + h(c_i)$ для всех $i \in \mathbb{N} = (0; 1; 2; \ldots)$. Переход $a_i \to a_{i+1}$ называется i-м событием в реализации программы G с начальным состоянием a_0. Величина $t_{i+1} = \mathrm{pr}_3(a_{i+1})$ интерпретируется как момент модельного времени i-го события в программе. Значение t_i для каждого $i \in \mathbb{N}$ обычно называется текущим модельным временем, соотносимым функцией

$$\mathrm{time} = \mathrm{pr}_3 : P \times C \times T \to T, a_i \mapsto \mathrm{time}(a_i)$$

каждому состоянию a_i программы. Значение $h(c_i)$ определяет текущий шаг имитации:

$$\mathrm{time}(a_{i+1}) = \mathrm{time}(a_i) + h(\mathrm{pr}_2(a_i)).$$

1.1.3. Последовательность (1), порождаемая программой $\mathcal{I} = (P,\ C,\ T,\ f,\ g,\ h)$, определяет пособытийную эволюцию имитируемой системы $\mathcal{I} = (C,\ T,\ f,\ g,\delta)$, где семейство функций

$$\delta = \{\delta^t : C \to C | t \in T\}$$

задает динамику системы между событиями в программе. Семейство δ удовлетворяет для всех $c \in C$ и $\sigma, \tau \in T$ условиям $\delta^0 A = A$, $\delta^\sigma(\delta^\tau A) = \delta^{\sigma+\tau} A$.

Событие $a_i \mapsto a_{i+1}$ в программе порождает событие $A_i \mapsto A_{i+1}$ в системе, соотносимое моменту t_{i+1} модельного времени; состояние c_i отнесено моменту t_i. Если $t_i < t_{i+1}$, то для каждого $t \in [t_i,\ t_{i+1}]$ системе приписывается состояние $\delta^{t-t_i} c_i$.

Так как рассматриваются стационарные динамические системы, то δ и h должны удовлетворять дополнительному условию

$$h(c) = h(\delta^\sigma c) + \sigma \text{ для } 0 \leqslant \sigma \leqslant h(c).$$

В данную модель имитации, относящуюся к так называемым системам с дискретными событиями, вкладываются более структурированные модели, в частности, кусочно-линейные агрегаты [2], концептуальные модели языков моделирования [4, 5] и математические модели теории имитации [6, 7].

1.2. *Временные сингулярности в имитации.* Имеются две основные причины появления в имитационных моделях событий, разделенных временными интервалами нулевой длины: квазипараллелизм имитации событий и допустимость нулевых (мгновенных) реакций в компонентах моделируемых систем [7, 9].

1.2.1. Первая из этих причин — чисто технологическая и присуща только имитационному моделированию. Необходимость введения механизма квазипараллельного выполнения событий возникает в случае, когда число процессоров в вычислительной системе, на которой производится имитация, меньше максимально возможного числа одновременных событий, назначенных на один и тот же момент модельного времени. Обычно семантика языков автоматизации программирования имитационных моделей ориентирована на однопроцессорное выполнение программы имитации. Исключение составляет лишь язык моделирования ДИС [5, 10, 11], допускающий (с точки зрения наблюдателя) параллельную имитацию одновременных событий.

1.2.2. Вторая причина выходит за рамки имитационного моделирования и присуща математическому моделированию в широком смысле. Нулевые времена реакции систем и временные интервалы нулевой длины появляются при описании явлений, разномасштабных по протяженности во времени. Интервалы нулевой длины являются не менее естественной абстракцией, чем разрывные временные функции. Существенно также, что при математическом моделировании на ЦВМ с использованием вещественного модельного времени разномасштабные интервалы в одной модели практически нереализуемы: если значения текущего модельного времени t и интервала Δt очередного продвижения модельного времени отличаются на несколько десятков десятичных порядков, то, хотя они и могут быть одновременно представлены в памяти машины, тем не менее, продвижение времени не будет выполнено, так как результат операции $t + \Delta t$ из-за округления будет равен t. Дело не спасает использование вычислений с многократной точностью, если в продвижении модельного времени будут участвовать интервалы, значительно различающиеся по порядку.

1.3. *Об адекватности модельного времени.* Вопрос о целесообразности (с точки зрения адекватности моделирования) присутствия разномасштабных величин в одной математической модели выходит за рамки данной работы, примыкающей к существенно более узкой проблематике — „миру имитации“ как таковому, вне связи его с реальным „имитируемым миром“.

Тем не менее, представляется уместным привести здесь следующие высказывания, относящиеся к общей проблеме формализации понятия времени.

1.3.1. Разномасштабные объекты и дискретные модели. „...Какого бы взгляда ни придерживаться относительно строения материи, не подлежит сомнению то, что она расчленена на ряд больших, хорошо отграниченных групп с относительно различными размерами масс, так что члены каждой отдельной группы находятся со стороны своей массы в определенных, конечных отношениях друг к другу, а к членам ближайших к ним групп относятся как к бесконечно большим или бесконечно малым величинам...“ „...Мы имеем здесь количества, столь колоссально отличные друг от друга, что между ними прекращается всякое рациональное отношение, всякое сравнение, и что они становятся количественно несоизмеримы...“ (Ф. Энгельс, [12]).

„Особенности всевозможного рода, разрывы и т. д. появляются, помимо воли исследователя, в таких проблемах, где он охотно бы от них отказался“. „...При математическом описании явлений природы постоянно имеют дело, смотря по обстоятельствам, то с непрерывной средою, то с дискретными моментами. Разумеется, речь идет только о приближениях; но в том-то и дело, что такого рода приближения с одинаковым успехом дают нам в одних случаях — сплошную среду, в других — отдельные моменты“ (Р. Бэр, [13]).

„Что можно сказать об еще более коротких интервалах времени? Имеет ли смысл вообще говорить о них, если невозможно не только измерить, но даже разумно судить о процессах, происходящих в течение столь коротких интервалов? Возможно, нет. Это один из тех вопросов, на которые нет ответа“ (Р. Ф. Фейнман, [14]).

1.3.2. Понятие времени. Имеется два различных подхода к определению времени как формы координации материальных явлений. При одном из них время предполагается актуально заданным. Этот подход (И. Ньютона) реализуется в математических моделях. „Время — нечто абсолютное, ни от чего не зависящая чистая длительность, как таковая, равномерно текущая от прошлого к будущему. Оно является пустым „вместилищем событий“, которые могут его заполнять, но могут и не заполнять; ход событий не влияет на течение времени. Время универсально, одномерно, непрерывно, бесконечно однородно (везде одинаково)“ (здесь цитируется статья [15], компактно излагающая ньютоновские и лейбницевские подходы — *прим. авт.*).

При другом подходе время рассматривается лишь в связи с эволюцией наблюдаемых процессов. Этот подход (Г. Лейбница) по сути дела реализуется в имитационном моделировании. „Время — порядок сменяющих друг друга явлений или состояний тел“.

„Время... есть <u>созерцаемое</u> становление“. „...Не во времени все возникает и проходит, а само время есть это становление, есть возникновение и прехождение, сущее абстрагирование, всепорождающий и уничтожающий свои порождения <u>Кронос</u>“. „Если бы все остановилось..., то... времени не было бы“ (Г. Б. Ф. Гегель, [16]).

„...Время — это то, что отделяет два последовательных события“ (Р. Ф. Фейнман, [14]).

1.3.3. Архимедовость времени. „...Так как говорить о неархимедовом <u>времени</u> не представляется целесообразным ни с какой точки зрения, то отсюда вытекает, что употребление „переменного“ x, развертывающего перед нами все элементы последовательности и в порядке <u>реального времени</u> (не фиктивного, то есть архимедова), сильно ограничивает класс рассматриваемых последовательностей M(Н. Н. Лузин, [17]).

„Что касается аксиомы (имеется в виду аксиома Архимеда — *прим. авт.*), то она может быть рассматриваема как „экстраполяция“ факта, экспериментально проверяемого для величин „не слишком малых“ (Н. Бурбаки, [18]).

Наконец отметим, что в общей теории стационарных динамических систем [8] о множестве моментов времени предполагается лишь, что оно является правым интервалом некоторой линейно-упорядоченной абелевой группы (вообще говоря, неархимедовой).

2. Модельное время.

2.1. *Цепь модельного времени.*

2.1.1. Далее, $\mathbb{R} =]-;\infty[$, $\mathbb{Z} = (0; \pm 1; \pm 2; \dots)$. Множество $\mathbb{R}^2$ с обычной операцией сложения векторов

$$(\xi_1, \eta_1) + (\xi_2, \eta_2) = (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) \tag{3}$$

и лексикографическим линейным отношением порядка

$$(\xi_1, \eta_1) \leqslant (\xi_2, \eta_2) \Leftrightarrow (\xi_1 < \xi_2) \text{ или } (\xi_1 = \xi_2, \eta_1 \leqslant \eta_2) \tag{4}$$

образует линейно-упорядоченную, абелеву группу.

Сложение (3) порождает операцию умножения на целые числа

$$n(\xi,\,\eta) = (n\xi,\,n\eta) \tag{5}$$

В связи с этим $\mathbb{R}^2$ можно также рассматривать как линейно-упорядоченное линейное векторное пространство над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Как обычно, будем использовать обозначения $\mathbb{O} = (0,\,0)$; $-(\xi,\,\eta) = (-\xi,\,-\eta)$; $t_1 - t_2 = t_1 + (-t_2)$.

Здесь и в (3)–(5) $\xi,\,\xi_i,\,\eta,\,\eta_i \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}$; $t_i \in \mathbb{R}^2$.

Таким образом, для всех $m,\,n \in \mathbb{Z}$ и $t,\,t_i \in \mathbb{R}^2$ выполняются следующие определяющие свойства линейно-упорядоченного линейного векторного пространства:

$$\begin{aligned}
&t_1 + t_2 = t_2 + t_1; \quad t_1 + (t_2 + t_3) = (t_1 + t_2) + t_3;\\
&t + \mathbb{O} = t; \quad t - t = \mathbb{O};\\
&(mn)t = m(nt); \quad 1 * t = t;\\
&m(t_1 + t_2) = mt_1 + mt_2; \quad (m+n)t = mt + nt\\
&\text{или} t_1 = t_2,\ \text{или}\ t_1 < t_2,\ \text{или}\ t_2 < t_1;\\
&t_1 \leqslant t_2, t_2 \leqslant t_3 \Rightarrow t_1 \leqslant t_3;\\
&t_1 \leqslant t_2, t_2 \leqslant t_1 \Rightarrow t_1 = t_2;\\
&t_1 < t_2 \Leftrightarrow t_2 - t_1 > 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{O}t = \mathbb{O}, \quad (-m)t = -mt;\\
&t > \mathbb{O} \Leftrightarrow -t < \mathbb{O};\\
&t_1 < t_2, \quad t_3 \leqslant t_4 \Rightarrow t_1 + t_3 < t_2 + t_4;\\
&t_1 < t_2,\ \Leftrightarrow mt_1 < mt_2\ \text{при}\ m > 0;\\
&t_1 < t_2,\ \Leftrightarrow nt_2 < mt_1\ \text{при}\ n < 0.
\end{aligned}$$

2.1.2. Множество $\mathbb{T} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ с индуцируемыми на нем из $\mathbb{R}^2$ операциями векторного сложения и умножения и умножения на целые числа является подпространством пространства $\mathbb{R}^2$.

Далее для проекций вектора $t \in \mathbb{T}$ будут использоваться обозначения, определяемые равенством $t = (\mathrm{Re}\,t, \mathrm{In}\,t)$.

Очевидно, что не вызывает недоразумений использование записи ξ для обозначения элементов вида $(\xi,\,0) \in \mathbb{T}$. В этих обозначениях имеет место представление

$$t = \mathrm{Re}\,t + \mathrm{In}\,t \cdot \theta,$$

где символ θ резервируется за элементом $\theta = (0,\,1) \in T$. Очевидно также, что не вызывает недоразумений использование единого символа 0 для обозначения нулевых элементов $0 \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{O} \in \mathbb{T}$.

Множество $\mathbb{T}$ будем называть цепью модельного времени или $\mathbb{T}$-временем, а его элементы — моментами (времени) или $\mathbb{T}$-моментами. В [9] аналогичная конструкция была названа сингулярным временем.

Для конечных интервалов $\mathbb{T}$-времени ($\mathbb{T}$-интервалов) будем использовать обычные обозначения:

$$[\alpha;\beta] = \{t | \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},\ [\alpha;\beta] = \{t | \alpha \leqslant t < \beta\},$$

$$]\alpha;\beta] = \{t | \alpha < t \leqslant \beta\},\ ]\alpha;\beta[= \{t | \alpha < t < \beta\}.$$

Очевидно, что

$$[\alpha;\beta] = 0 \text{ при } \alpha < \beta;$$

$$[\alpha;\beta[=]\alpha;\beta] =]\alpha;\beta[= 0 \text{ при } \alpha \geqslant \beta;$$

$$[\alpha;\beta[= [\alpha;\beta-\theta], \quad]\alpha;\beta] = [\alpha+\theta;\beta], \quad]\alpha;\beta[= [\alpha+\theta;\beta-\theta].$$

Сечения и склеивания интервалов задаются равенствами

$$[\alpha;\gamma] = [\alpha;\beta[\cup[\beta;\gamma] \text{ при } \alpha < \beta \leqslant \gamma,$$

$$[\alpha;\gamma] = [\alpha;\beta[\cup]\beta;\gamma] \text{ при } \alpha \leqslant \beta < \gamma.$$

Для любого множества $T \in \mathbb{T}$ и $t \in \mathbb{T}$ через $T + t$ будем обозначать сдвиг T на t, то есть $T + t = \{s|s - t \in T\}$.

При $t > 0$ будем говорить о сдвиге множества T вправо, а при $t < 0$ — влево. Очевидно, что $[\alpha;\beta] + t = [\alpha + t;\beta + t]$.

2.1.3. Для дальнейшего целесообразно также рассматривать цепь $\overline{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ модельного времени, где бесконечный момент ∞ есть единица решетки $\overline{\mathbb{T}}$, то есть $\infty = \sup \mathbb{T}$. Можно положить $\infty = (+\infty, 0)$ и (в соответствии с принятой договоренностью) не различать $\infty \in \overline{\mathbb{T}}$ и $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}^+$. Элемент ∞ обладает для любых $t \in \overline{\mathbb{T}}$ и $m \in \mathbb{Z}$ следующими свойствами:

$$t + \infty = \infty + t = \infty;$$

$$m\infty = \infty m = \infty \text{ при } m > 0.$$

Очевидно, что $\mathbb{T}$ не является группой.

Для $\alpha \in \mathbb{T}$ полагаем

$$[\alpha;\infty[= \{t|\alpha \leqslant t < \infty\}, [\alpha;\infty] = \{t|\alpha \leqslant t \leqslant \infty\}.$$

Такие интервалы будем называть бесконечными (справа).

Далее будут рассматриваться только конечные или бесконечные интервалы цепи $\overline{\mathbb{T}}$. Только такие интервалы будут временными, $\overline{\mathbb{T}}$-интервалами. Интервалы вида

$$]-\infty;\alpha[= \{t|t < \alpha\}, \quad]-\infty;\alpha] = \{t|t \leqslant \alpha\}$$

как области определения функций $\overline{\mathbb{T}}$-времени не будут рассматриваться. Это не мешает записать:

$$\mathbb{T} =]-\infty;+\infty[, \overline{\mathbb{T}} =]-\infty;+\infty[.$$

Отметим, что при имитации момент $t = \infty$ и бесконечные приращения модельного времени $\vartriangle t = \infty$ реализуются большим (но еще представимым в памяти машины) числом, причем выход имитационной программы на $t = \infty$ влечет окончание имитации.

Далее запись $t_k \to \infty$ используется в обычном смысле: последовательность $t_k \in \overline{\mathbb{T}}$ не ограничена.

2.1.4. Множество $T \subseteq \overline{\mathbb{T}}$ будем называть финитным на интервале $I \subseteq \overline{\mathbb{T}}$, если на каждом конечном подынтервале $J \subseteq \overline{\mathbb{T}}$ имеется лишь конечное число элементов множества $T \cap J < +\infty$.

Очевидно, что множество финитно на конечном интервале тогда и только тогда, когда оно конечно.

2.2. *Характеристика модельного времени.*

2.2.1. Введенная структура модельного $\overline{\mathbb{T}}$-времени обладает следующими свойствами.

Время **актуально** задано (ньютоново). Каждое событие в модели имитации привязывается к определенному $\overline{\mathbb{T}}$-моменту. События в модели, назначенные на один и тот же $\overline{\mathbb{T}}$-момент, с точки зрения наблюдателя одновременны. Поэтому в моделях имитации для большинства систем автоматизации программирования имитационных моделей на каждый $\overline{\mathbb{T}}$-момент приходится не более одного события. В ДИС-моделях [5] $\overline{\mathbb{T}}$-время обеспечивает синхронизацию параллельных процессов.

Время всюду **дискретно**, то есть для любого $\mathbb{T}$-момента t существуют покрывающий его элемент (момент $t+\theta$, последующий за t) и элемент, который t покрывает (момент $t-\theta$, предшествующий t).

Время всюду **однородно** в том смысле, что для любых $T \subseteq \mathbb{T}$, $\sigma \in \mathbb{T}$ отображение $T \to T+\sigma$, $t \to t+\sigma$ является изоморфизмом. Однородность времени обеспечивает возможность имитации когерентных процессов. В [9], кроме данной структуры модельного времени, рассмотрена также иная, не обладающая свойством однородности.

Время **неархимедово**, так как, например, $m\theta < 1$ для любых $m \in \mathbb{Z}$; то есть θ является слабой единицей [19]. Генератор вида $t \to t+\theta$ не порождает всю временную цепь $\mathbb{T}$ и поэтому не может служить целям измерения временных интервалов (то есть не является часами).

2.2.2. Вообще говоря, ничего не мешает рассматривать более тонкие структуры модельного времени, обеспечивающие большие описательные возможности синхронизации параллельных когерентных процессов.

Например, в качестве цепи модельного времени можно взять пространство $\mathbb{R}^2$ или даже множество числовых последовательностей $t = (\xi_1,\ \xi_2, \dots),\ \xi_i \in \mathbb{R}$ с операциями

$$(\xi_i) + (\eta_i) = (\xi_i + \eta_i), (\xi_i)(\eta_i) = (\sum_{j=1}^{i} \xi_j \xi_{i-j})$$

и отождествлением $\xi = (\xi, 0, 0, \dots)$.

В данной работе эти варианты не рассматриваются.

3. Временные объекты и системные динамики. Далее используются стандартные терминология и обозначения категорий (см., например, [8, 20]). В частности, $\mathcal{K}(A, B)$ — множество морфизмов из объекта A в объект B категории $\mathcal{K}$, id_A — единичный морфизм в $\mathcal{K}(A, A)$, $Ob\mathcal{K}$ — класс $\mathcal{K}$-объектов, Set — категория множеств с морфизмами-отображениями. Ряд определений и результатов в данном разделе формируется лишь для категории Set, хотя большинство из них перенесено на произвольные категории однотипных алгебраических систем [21] с морфизмами — гомоморфизмами систем.

При описании временных объектов и системных динамик не обойтись понятиями и терминологией, сложившимися в теории систем [8, 21]. Например, из-за неархимедовости цепи модельного времени вместо морфизмов, определяющих системные динамики, пришлось рассматривать однопараметрические полугруппы морфизмов.

Далее вместо временных функций [8] (то есть функций, определенных на подмножествах множества $\overline{\mathbb{T}}$) в основном используются конструкции, аналогичные счетным степеням объектов [20]. Такой подход естественен при рассмотрении стационарных динамических систем.

Так как в дальнейшем рассматривается только положительная полуось модельного времени, то для упрощения обозначений положено:

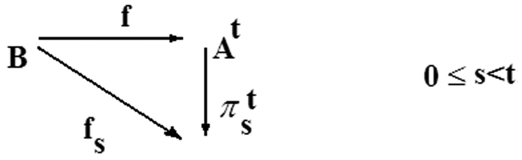

Рис. 1.

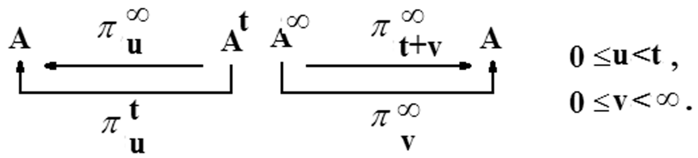

Рис. 2.

$$T = \mathbb{T}^+, \overline{T} = \overline{\mathbb{T}}^+.$$

3.1. *Степени объектов категорий.*

3.1.1 *Определение.* Будем говорить, что объект A категории $\mathcal{K}$ является объектом с бесконечной степенью, если выполняются следующие условия:

1) для каждого $t \in \overline{T}, t \neq 0$ определены $\mathcal{K}$ -объект A^t, называемый t-й степенью объекта A, и семейство таких A-морфизмов,

$$\{\pi_s^t : A^t \to A | 0 \leqslant s < t\},$$

что для любого семейства $\mathcal{K}$-морфизмов $\{f_s : B \to A | s < t\}$ с общей областью определения B существует единственный $\mathcal{K}$-морфизм $f : B \to A^+$, для которого коммутативны все диаграммы (рис. 1);

2) определена ассоциативная операция умножений (сочленения) степеней: $A^s \cdot A^t = A^{s+t}$ для всех $0 < s < \infty$, $0 < t \leqslant \infty$, причем коммутативны все диаграммы (рис. 2).

Последние диаграммы согласуют семейство морфизмов π_s^t с порядком записи сомножителей в произведении степеней объектов, а также, очевидно, однозначно определяют морфизмы π_s^t по морфизмам π_s^∞. Далее верхний индекс в обозначениях морфизмов π_s^t будет опускаться, так как их область определения всегда будет ясна из контекста.

Степень A^t является естественным аналогом понятия счетной степени A (в обозначениях [20]). Каждый объект A^t, если он существует, определяется с точностью до изоморфизма, в частности,

$$A^\theta \simeq A.$$

<u>Пример.</u> В Set имеет место представление $A^\infty = \{(a_s)_{s \in T} | a_s \in A \text{ для всех } s \in T\}$ с покоординатными операциями, индуцируемыми из A. Морфизм π_t является t-й проекцией, то есть

$$\pi_t (a_s)_{s \in T} = a_t.$$

Имеют место изоморфизмы

$$A^\infty \simeq A^{[t;\infty[} \text{ при любом } t \in T$$

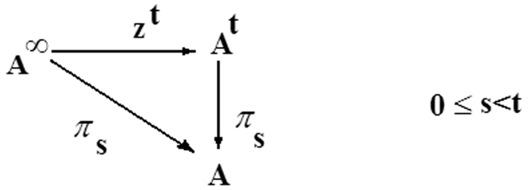

Рис. 3.

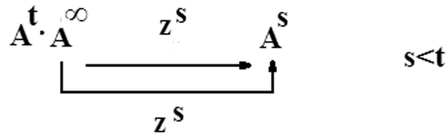

Рис. 4.

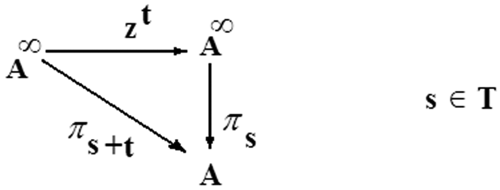

Рис. 5.

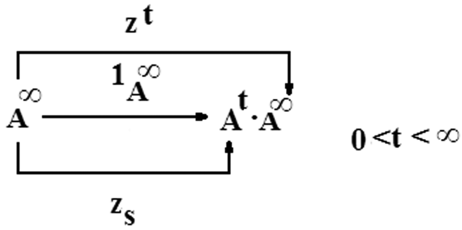

Рис. 6.

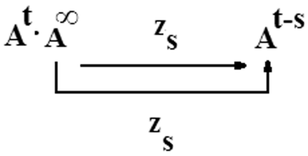

Рис. 7.

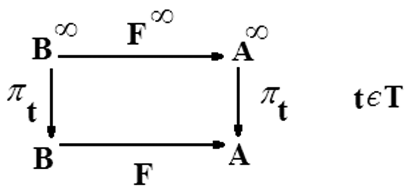

Рис. 8.

$$A^2 \simeq A^{[0;2[}, \text{ но } A^2 \not\simeq A \times A \simeq A^{2\theta}.$$

3.1.2. *Определение.* Пусть существует $\mathcal{K}$-объект для A^∞. Для $0 < t \leqslant \infty$ левым сужением до t объекта A^∞ будем называть единственный $\mathcal{K}$-морфизм $z^t : A^\infty \to A^t$, для которого коммутативны все диаграммы (рис. 3).

Морфизм z^s продолжается на каждый объект A^t для $s < t \leqslant \infty$ как единственный $\mathcal{K}$-морфизм $z^s : A^t \to A^s$, для которого коммутативна диаграмма (рис. 4).

3.1.3. *Определение.* Пусть существует $\mathcal{K}$-объект A^∞. Для $t \in T$ левым сдвигом на t объекта A^∞ будем называть единственный $\mathcal{K}$-морфизм $z_t : A^\infty \to A^\infty$, для которого коммутативны все диаграммы (рис. 5).

Отметим коммутативность диаграмм (рис. 6).

Морфизм z_s продолжается на каждый объект A^t для $0 \leqslant s < t$ как единственный $\mathcal{K}$-морфизм $z_s : A^t \to A^{t-s}$, для которого коммутативна диаграмма (рис. 7).

Лемма. $z_0 = id_{A^\infty}$; $z_s 0 z_t = z_{s+t}$ для всех $s, t \in T$.

3.1.4. Определения и свойства морфизмов сужений, левых сдвигов и умножений степеней приводят к следующим аналогиям между морфизмами в общих категориях и преобразованиями временных функций:

$$z_t A^\infty \leftrightarrow \text{ сужение функций } c[0; \infty \text{ на } \infty[;$$

$$z_t A^\infty \leftrightarrow \text{ сужение функций } \infty \text{ на } [0; t[;$$

$$z^t A^\infty \cdot z_t A^\infty \leftrightarrow \text{ сочленение двух функций с точкой сочленения } t.$$

3.1.5. *Лемма.* Пусть существуют $\mathcal{K}$-объекты A^∞ и B^∞.

Для любого морфизма $F : B \to A$ существует единственный морфизм $F^\infty : B^\infty \to A^\infty$, для которого коммутативны все диаграммы (рис. 8).

Доказательство непосредственно следует из определения 3.1.1, если выбрать $f_t = F{\cdot}\pi_t : B^\infty \to A$.

3.2. *Потоки.* В данном подразделе без оговорок рассматривается категория *Set*.

3.2.1. *Определение.* Пусть A — множество, $|A| \geqslant 2$, и выделен элемент $O_A \in A$. Элемент $x \in A^\infty$ будем называть финитным (A, O_A)-потоком, если множество $\{t|\pi_t x \neq O_A\}$ финитно на T.

Каждую пару $(\pi_t x, t)$, такую, что $t \in T$ и $\pi_t x \neq O_A$, будем называть событием в потоке x в момент t.

Не исключается, что поток x может быть неординарным потоком событий в вещественном времени: два его события могут относиться к моментам $s \neq t$, таким, что $Res = Ret$.

3.2.2. *Определение.* Пусть A и B — множества, а x и y — финитные (A, O_A)- и (B, O_B)-потоки соответственно. Внешним объединением потоков x и y будем называть финитный $(A \times B, (O_A, O_B))$-поток $x * y$, определяемый равенствами

$$\pi_t(x * y) = (\pi_t x, \pi_t y), t \in T.$$

Отметим, что события в потоке $x * y$ могут иметь вид $((a,\ O_B),\ t)$ и $((O_A,\ b),\ t)$, где $a \neq O_A$ и $b \neq O_B$.

3.2.3. *Определение.* Пусть x и y — финитные $(\mathbb{2}, 0)$-потоки, где $\mathbb{2} = \{0; 1\}$ (булевы потоки). Слиянием потоков x и y будем называть финитный $(\mathbb{2}, 0)$-поток $x \wedge y$, определяемый для $t \in T$ равенствами

$$\pi_t(x \wedge y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \pi_t x = \pi_t x = 1; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

3.2.4. *Определение.* Пусть A и B — множества. Отображениие $d_F : A^\infty \to B^\infty$ будем называть морфизмом F-дифференцирования, а $(B,\ O_B)$-поток $y = d_F x$ F-дифференциалом элемента $x \in A^\infty$ (функции $x : T \to A$), если выполняются условия:

1) сюръекция $F : A{\times}A \to B$ такова, что $F^{-1}(\{O_B\}) = \Delta_A$, где $\Delta_A \subseteq A{\times}A$ — диагональ;

2) морфизм d_F определен равенствами $\pi_t \circ d_F x = F(\pi_t x,\ \pi_{t+1} x)$ для всех $x \in A^\infty$ и $t \in T$.

Если $x : T \to A$ — кусочно-постоянная временная функция с не более чем счетным числом скачков и моменты скачков образуют финитное множество на T, то условие 1 гарантирует финитность потока $d_F x$. В этом смысле можно говорить, что F-дифференциал отфильтровывает скачки. В общем случае F-дифференциал не является финитным потоком.

3.2.5. Для дальнейшего важен следующий частный случай дифференциала.

Определение. Для каждого множества A существует единственная сюрьекция $F : A \times A \to 2$ со свойством $F^{-1}(\{O\}) = \Delta_A$, то есть дифференциал d_F определяется единственным образом. В этом случае для элемента $\mathrm{x} \in \mathrm{A}^\infty$ будем писать dx вместо $d_F x$ и называть морфизм d индикатором скачков.

3.2.6. *Теорема.* Для любых $x \in A^\infty$, $y \in B^\infty$ и морфизмов дифференцирования $d_F : A^\infty \to C$ и $d_G : B^\infty \to C$ выполняются равенства:

1) $d_F \circ z_t = z_t \circ d_F, \quad t \in T;$

2) $d_F(z^t x \cdot z_t y) = (z^t d_F x) \cdot (z_t d_F x), \quad t \in T;$

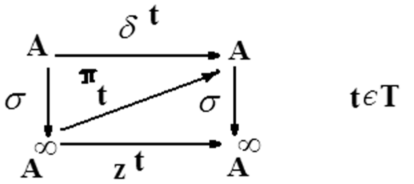

Рис. 9.

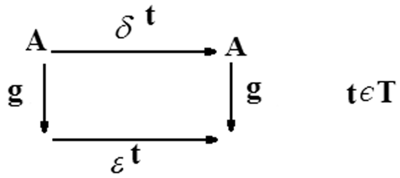

Рис. 10.

3) $d_{F\times G}(x * y) = d_F x * d_G y, \quad t \in T.$

3.3. *Автономные динамики.*

3.3.1. *Определение.* Автономной динамикой в категории $\mathcal{K}$ будем называть пару $(A,\,\delta)$, где A — объект в $\mathcal{K}$, а однопараметрическая полугруппа морфизмов

$$\delta = \{\delta^t : A \to A | t \in \overline{T}\}$$

удовлетворяет условиям:

1) $\delta^s \circ \delta^t = \delta^{s+t}$ для всех $s \in T$, $t \in T$;

2) $\delta^o = id_A$.

Последнее означает, что δ^o является не только единицей полугруппы δ, как это следует из условия 1, но также и единичным морфизмом в $\mathcal{K}(A,\,A)$.

Следующий пример показывает, что из-за неархимедовости T-времени морфизм δ^θ, вообще говоря, не определяет однозначно динамику $(A,\,\delta)$.

<u>Пример</u>. $\mathcal{K} = Set,\ A = \mathbb{R},\ \delta_1^t a = a + \mathrm{Re}\,t,\ \delta_2^t a = a + 2\,\mathrm{Re}\,t$. Здесь $\delta_1^t \neq \delta_2^t$ при $\mathrm{Re}\,t > 0$, хотя $\delta_1^\theta = \delta_2^\theta = 1_A$.

Так как $\delta^t = \delta^{\mathrm{Re}\,t} \circ (\delta^\theta)^{\mathrm{In}\,t}$, то каждый морфизм δ^t допускает факторизацию на морфизмы, описывающие движение в вещественном времени ($t = \mathrm{Re}\,t$) и микровремени ($t = \theta \cdot \mathrm{In}\,t$). Тем самым справедлива следующая

Теорема. Произвольная автономная динамика (A, δ) допускает факторизацию (представление) $(A, \delta_{\mathrm{Re}}, \delta_{\mathrm{In}})$, где

$$\delta_{\mathrm{Re}} = \{\delta_{\mathrm{Re}}^t : A \to A | t \in \mathbb{R}^+\},\ \delta_{\mathrm{In}}^m = \{\delta_{\mathrm{Re}}^t : A \to A | m \in \mathbb{N}\},$$

так, что $\delta^t = \delta_{\mathrm{Re}}^{\mathrm{Re}\,t} \circ \delta_{\mathrm{In}}^{\mathrm{In}\,t}$ для всех $t \in T$; $\delta_{\mathrm{Re}}^t = \delta^t$, $\delta_{\mathrm{In}}^m = \delta^{m\theta}$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$.

3.3.2. *Теорема.* Пусть (A, δ) — автономная динамика в категории $\mathcal{K}$, и существует A^∞. Тогда существует единственный $\mathcal{K}$-морфизм $\sigma : A \to A^\infty$, такой, что коммутативны все диаграммы (рис. 9).

Не вызывает недоразумений использовать символ δ вместо σ для обозначения такого морфизма.

Пусть $(A,\,\delta)$ — автономная динамика в Set. Образ x элемента $a \in A$ в кообласти A^∞ морфизма δ будем называть автономной траекторией в A. Множество автономных траекторий, определяемых динамикой $(A,\,\delta)$ для различных начальных состояний $a \in A$, изоморфно множеству $\{(\delta^t a)_{t\in T} | a \in A\}$, а значит, и множеству временных функций $\{x_a : m \to A | a \in A\}$, определяемых равенствами $x_a(t) = \delta^t a$ для всех $t \in T$. Каждую из этих реализаций также можно называть автономной траекторией.

3.3.3. *Определение.* Обозначим через $Dyn\mathcal{K}$ класс автономных динамик в категории $\mathcal{K}$. Динаморфизмом $g : (A,\,\delta) \to (B,\,\varepsilon)$ будем называть каждый морфизм, индуцируемый на $Dyn\mathcal{K}$ теми $\mathcal{K}$-морфизмами $g : A \to B$, для которых коммутативны все диаграммы (рис. 10).

Теорема. $Dyn\mathcal{K}$ является категорией с объектами — автономными динамиками в категории $\mathcal{K}$ и с морфизмами — динаморфизмами.

3.3.4. *Определение.* Автономную динамику $(A,\ \delta)$ в категории Set будем называть кусочно-непрерывной и записывать четверкой $(A,\ f,\ G,\ h)$, если функция $h : \mathrm{A} \to \overline{\mathrm{T}}$, однопараметрическое семейство $f = \{f^t | t \in \overline{\mathrm{T}}\}$ морфизмов

$$f^t : \{\mathrm{a} \in \mathrm{A} | h(a) \geqslant t\} \to \mathrm{A} \tag{6}$$

и морфизм

$$G : \{\mathrm{a} \in A | h(a) = 0\} \to \mathrm{A} \tag{7}$$

удовлетворяют для всех $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ и $s, t \in \overline{\mathrm{T}}$ следующим условиям:

1) $h(a) = \infty \to f^t a = a$;
2) $f^\circ a = a$;
3) $s + t \leqslant h(a) \to f^s \cdot f^t a = f^{s+t} a$;
4) $t \leqslant h(a) \to h(a) = h(f^t a) + t$;
5) $h(a)0 \to h(Ga) > 0,\ \delta^\theta a = f^\theta G a$;
6) $h(a) > 0 \to \delta^t a$ для $t < h(a)$;
7) $\sum\limits_{n \geqslant 0} h(a_n) = \infty$, где $a_0 = a$, $a_{n+1} = G \circ f^{h(a_n)} a_n$ для $n \geqslant 0$.

Замечание 1. Определения (6) и (7) предполагают „измеримость“ функции h в категории $\mathcal{K}$ в следующем слабом смысле:

$$h^{-1}\{(0)\}, \quad h^{-1}([t;\infty]) \in Ob\mathcal{K} \text{ для всех } t \in \mathbb{T}.$$

Замечание 2. Условие 7 является необходимым и достаточным для рекуррентного определения δ по f и G. По сути дела, это означает возможность пособытийной имитации на ЭВМ за конечное время сколь угодно длинных отрезков кусочно-непрерывных автономных динамик.

Пример. Опишем начальный отрезок автономной траектории, определяемой кусочно-непрерывной динамикой $(A,\ f,\ G,\ h)$ с начальным состоянием $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, таким, что $h(\mathrm{a}_0) > 0$, $h(a_1) = \theta$ и $h(\mathrm{a}_2) > 0$, где a_n определены по (8). Тогда

$$\delta^t a_0 = f^t a_0,\ h(\delta^t a_0) = h(a_0) - t \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant h(a_0);$$

$$\delta^t a_0 = f^\theta a_1,\ h(\delta^t a_0) = 0 \text{ при } t = h(a_0) + \theta;$$

$$\delta^t a_0 = f^{t - h(a_0) - 2\theta},\ h(\delta^t a_0) = h(a_2) - t \text{ при } \theta \leqslant t - h(a_0) - \theta \leqslant h(a_2).$$

3.3.5. *Определение.* Прямым произведением $(\mathrm{A}, \delta) \times (B, \varepsilon)$ автономных динамик (A, δ) и (B, ε) в категории Set будем называть единственную автономную динамику $(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$, $(\delta \times \varepsilon)$, для которой коммутативны все диаграммы (рис. 11).

Лемма. Если $D_1 = (A_1, f_1, G_1, h_1)$, $D_2 = (A_2, f_2, G_2, h_2)$ — кусочно-непрерывные автономные динамики в категории Set, то автономная динамика $D_1 \times D_2$ также кусочно-непрерывна, причем $D_1 \times D_2 = (A, f, G, h)$, где $A = A_1 \times A_2$, функция $h : \mathrm{A} \to \overline{T}$ определяется равенствами

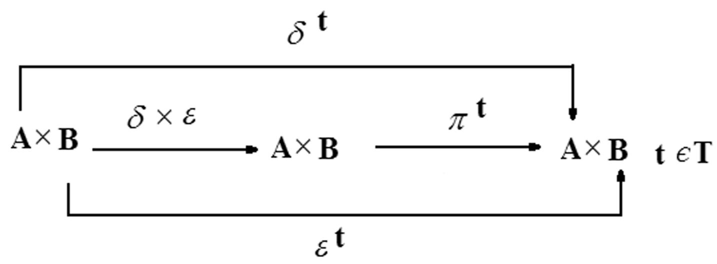

Рис. 11.

$$h(a,b) = \min(h_1(a), h_2(a)) \text{ для } a \in A,\ b \in B;$$

а морфизмы f_t и G — отображениями

$$f^t(a,b) = (f_1^t a, f_2^t b) \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant h(a,b);$$

$$G(a,b) = \begin{cases} (a,G_2(b)), \text{ при } h_1(a) > 0,\ h_2(b) = 0 \\ (G_1(a),b) \text{ при } h_1(a) = 0,\ h_2(b) > 0 \\ (G_1(a),G_2(b)) \text{ при } h_1(a) = 0,\ h_2(b) = 0 \end{cases}$$

Заключение. Введенный в предыдущих разделах формализм позволяет вложить исследование систем с сингулярной динамикой в общую теорию систем [8], [22].

Остановимся кратко на последовательностном подходе к определению и исследованию стационарных динамических систем, эволюционирующих в $\mathbb{T}$-времени.

Такие системы могут быть описаны как специальный класс сетей синхронных автоматов. Описание однозначно характеризует отношение входных и выходных функций. Неархимедовость времени исключает возможность говорить при этом о рекуррентной эволюции системы с шагом θ. Подобная эволюция со счетным числом шагов не обеспечивает потенциальную наблюдаемость системы на интервалах ненулевой вещественной протяженности хотя бы потому, что в $\mathbb{T}$ нет момента, непосредственно следующего за моментами $t + n\theta$, где значение $t \in \mathbb{T}$ фиксировано, а $n \in \mathbb{Z}$ (цепь модельного времени $\mathbb{T}$ не является совершенно упорядоченной).

В связи с этим последовательностный подход, потенциально реализующий эволюцию системы в $\mathbb{T}$-времени, возможен лишь при имитации системы в финитной последовательности моментов. В частности, имитируемость предполагает финитность потоков и кусочно-непрерывных траекторий эволюции системы.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $\mathrm{A} \backslash \{0_A\} = \{2^{-i} | i \in \mathbb{N}\}$, $0_A = 0$. Поток $\mathrm{x} : [0;1] \to A$ такой, что $x(t) = a_1 = 2^{-1}$ при $t = t_i = 1 - 2^{-i-1}$, где $i \in \mathbb{N}$, и $x(t) = 0$ при других $t \in [0;1]$, является финитным потоком на любом интервале $[0;\alpha], 0 < \alpha < 1$ и не является таковым на $[0;1]$. События в потоке x имитируют поведение наблюдателя в апории Зенона „Ахиллес и черепаха“. Значение a_i события (a_i, t_i) равно расстоянию между Ахиллесом и черепахой в момент t_i; начальное событие $(a_0, t_0) = (1; 0)$; скорости Ахиллеса и черепахи равны, соответственно, $+2$ и $+1$. Интервал $t_{i+1} - t_i$ между событиями (a_i, t_i) и (a_{i+1}, t_{i+1}) равен времени, необходимому Ахиллесу, чтобы пробежать расстояние a_i. Поток x не имитируем на интервале $[0;1]$ (Ахиллес не догонит черепаху за конечное время имитации). Парадокс порожден свойствами модели, а не свойствами реального (моделируемого) движения.

Во второй части данной работы будет сформулирован класс динамических систем, названных дискретными динамическими системами (ДДС). Определение ДДС будет дано в терминах их специальной схемной реализации. Определение основывается на известных понятиях сети [1, 23–27], автоматов [26, 28–29] и динамических систем [8, 22]. Базовая модель ДДС реализует функции асинхронных автоматов.

ДДС при определенных значениях параметров их динамики имитируемы, то есть их эволюция может быть воспроизведена на ЭВМ за конечное время. Если в имитацию эволюции сетей ДДС заложить механизм синхронизации параллельных процессов, идентичный механизму, принятому в языке моделирования ДИС [5, 8], то будет обеспечена независимость результатов имитации сети от порядка последовательной имитации совпадающих (в модельном времени) событий.

Список литературы

1. Бусленко Н. П. К теории сложных систем // Изв. АН СССР: Техническая кибернетика. 1963. № 5. С. 7–18.

2. Коваленко И. Н. О некоторых классах сложных систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1964. № 6. С. 3–9; 1965. № 1. С. 14–20; № 3. С. 3–11.

3. Бусленко Н. П., Осетинский Н. И. О динамических системах с последействием // Кибернетика. 1972. № 5. С. 123–132.

4. Dahl O.-J., Nygaard K. SIMULA — an ALGOL based simulation of discrete information systems // Comm. of ACM. 1966. V. 9. N 9. P. 671–678.

5. Netchepurenko M. I., Hairutdinov A. H., Shaboov G. V. Simulation of discrete information systems // Simulation programming languages. N.-H. 1968. P. 117–129.

6. Kindler E. Dynamic systems and theory of simulation // Kybernetika. 1979. V. 15. N 2. P. 77–87.

7. Barnden J. A. Nonsequentialyty and concrete activityphases in discrete-event simulation languages // ACM Trans. on programming languages and systems. 1981. V. 3. N 3. P. 293–317.

8. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.

9. Нечепуренко М. И. Сингулярное время в имитации. В сб.: Вычислительная техника и системный анализ. Новосибирск, 1982, С. 9–12.

10. Нечепуренко М. И., Хайрутдинов А. Х., Шабров Г. В. Язык моделирования ДИС / Докл. V-й Межвуз. конф. по физическому и математическому моделированию. М., 1968.

11. Дробышевич С. Г., Хайрутдинов А. Х., Чинин Г. Д. Язык моделирования дискретных информационных систем ДИС-68 / Первая всесоюз. конф. по программированию. Алгоритмические языки. Киев, 1968, С. 89–109.

12. Энгельс Ф. Диалектика природы. М.: ГИПЛ, 1948.

13. Бэр Р. Теория разрывных функций. М.-Л.: ГТТИ, 1932.

14. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1. М.: Мир, 1965.

15. Штейнман Р. Я. Пространство и время. БСЭ (3-е изд.). Т. 21. М.: Советская энциклопедия, 1975, С. 117–120.

16. Гегель Г. В. Ф. Энциклопедия философских наук. Т. 2. Философия природы. М.: Мысль, 1975.

17. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного. М.: Учпедгиз, 1948.

18. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.

19. Бирхгоф Г. Теория структур. М.: ИЛ, 1952.

20. Arbib M. A., Manes E. G. Foundation of system theory: decomposable systems //Automatica. 1974. V. 10. P. 285–302. Перевод в [22]: С. 7–48.

21. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

22. Математические методы в теории систем: сб. статей. М.: Мир, 1979.

23. Бусленко В. Н., Лукьянов А. Н., Осетинский Н. И. Сложные системы с обобщенным оператором сопряжения. Теория сложных систем и методы их моделирования: Тр. семинара. М., 1980, С. 4–11.

24. Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики. Проблемы кибернетики. М., 1959, вып. 2., С. 7–38.

25. Лупанов О. Б. О возможностях синтеза схем из произвольных элементов. Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, 1958, Т. 51, С. 158–173.

26. Айзерман М. А., Гусев Л. А. и др. Логика, автоматы, алгоритмы. М.: ГИФМЛ, 1963.

27. Нечепуренко М. И. Модели структурного резервирования систем. Прикладные задачи на графах и сетях. Новосибирск, 1981, С. 57–86.

28. Лазарев В. Г., Пийль В. Г. Синтез асинхронных конечных автоматов. М.: Наука, 1964.

29. Астрахановский А. Г., Варшавский В. И. и др. Апериодические автоматы. М.: Наука, 1976.

Дата поступления — 5.05.2015