

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ОБ УПАКОВКЕ ЕДИНИЧНЫХ КВАДРАТОВ

М. З. Арсланов

Институт информационных и вычислительных технологий,  
050010, Алма-Ата, Казахстан

УДК 519.1:514.17

Одной из известных нерешенных проблем комбинаторной оптимизации является задача 56 в списке открытых проблем вычислительной геометрии The Open Problems Project <http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/P56.html>: Packing Unit Squares in a Simple Polygon, формулировка которой заключается в выяснении вычислительной сложности задачи об упаковке единичных квадратов внутри простого многоугольника (т. е. многоугольника без дырок), когда необходимо разработать эффективные алгоритмы оптимальной упаковки единичных квадратов для различных односвязных областей.

В статье разработаны математические модели, методы и алгоритмы решения задачи об упаковке единичных квадратов внутри различных односвязных областей, обобщающие известные в литературе.

**Ключевые слова:** задача упаковки, математические модели, единичный квадрат.

One of known unsolved problems of combinatorial optimization is Problem 56 in the list of open problems of computational geometry: The Open Problems Project <http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/P56.html>: Packing Unit Squares in a Simple Polygon, which formulation consists in finding the computational complexity of the problem of packing of unit squares into a simple polygon.

In this paper the mathematical models, methods and algorithms of solving the problem of packing unit squares into various simple polygons, generalizing known in the literature are developed.

**Key words:** packing, mathematical models, unit square.

**Введение.** В задачах упаковки целью является размещение некоторого числа меньших объектов без пересечения внутри большего объекта — контейнера, оптимизируя при этом некоторую целевую функцию. Задачи упаковки в такой формулировке чрезвычайно общи, поэтому существует богатое разнообразие объектов и контейнеров, для которых возможны различные формулировки [1, 2, 3]. Одно большое разделение задач упаковки заключается в том, являются ли размещаемые объекты одинаковыми или нет. В случае упаковки одинаковых объектов одним из простейших является нетривиальный вариант, который будем называть упаковкой  $2 \times 2$  квадратов. Как много  $2 \times 2$  квадратов, ориентированных своими сторонами параллельно осям координат, можно разместить внутри многоугольника  $M$  с  $n$  сторонами, параллельными осям координат и целочисленными вершинами, так чтобы каждый  $2 \times 2$  квадрат занимал ровно 4 единичных квадрата внутри многоугольника  $M$ , т. е. имел также целочисленные вершины? Основной объект исследования в данной статье — открытая проблема 56 в списке открытых проблем The Open Problems Project <http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/> Packing Unit Squares in a Simple

Polygon (Упаковка единичных квадратов в простом многоугольнике). Многоугольник будем называть целочисленным, если все его вершины имеют целочисленные координаты, а стороны параллельны осям координат. Как правило, целочисленный многоугольник не будет выпуклым. Известно, что задача об упаковке квадратов  $2 \times 2$  в целочисленном многоугольнике  $M$  является  $NP$ -полной [4, 5]. Поэтому интерес для исследователей представляет задача об упаковке квадратов  $2 \times 2$  в целочисленном простом многоугольнике  $M$ . Является ли эта проблема  $NP$ -полной или она принадлежит классу задач  $P$  (классу задач, решаемых за полиномиальное время), до сегодняшнего дня является открытой проблемой. Для некоторого класса задач известен полиномиальный алгоритм [6].

Нам понадобятся некоторые операции над множествами.

**Определение.** Суммой Минковского (алгебраической суммой) двух множеств  $T_1, T_2$  на плоскости  $R^2$  называется множество, обозначаемое  $T_1 \oplus T_2$  и определяемое по формуле:

$$T_1 \oplus T_2 = \{z \in R^2 | z = x + y, x \in T_1, y \in T_2\}.$$

**Определение.** Разностью Минковского (алгебраической разностью) двух множеств  $T_1, T_2$  на плоскости  $R^2$  называется множество, обозначаемое  $T_1 \ominus T_2$  и определяемое по формуле:

$$T_1 \ominus T_2 = \{z \in R^2 | T_2 + z \subseteq T_1\}.$$

Одно из соотношений, связывающих эти две операции, таково:

$$T_1 \ominus T_2 \oplus T_2 \subseteq T_1.$$

Транслят любого множества  $S$  на вектор  $\mathbf{t}$  будем обозначать  $S + \mathbf{t}$ .

Будем обозначать единичный квадрат, т. е. квадрат со стороной 1 через  $K_1$ :

$$K_1 = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 | 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}.$$

При этом любой транслят единичного квадрата также будем называть единичным квадратом.

Основной метрикой будет метрика  $L_\infty^2$ , порождаемая нормой

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Расстояние между единичными квадратами будет определяться расстоянием между их левыми нижними вершинами.

**1. Основные результаты.** Докажем, что задача об упаковке квадратов  $2 \times 2$  в целочисленном многоугольнике  $M$  эквивалентна задаче о размещении в многоугольнике  $M \ominus K_1$  единичных квадратов, так чтобы расстояние между любыми двумя единичными квадратами в метрике  $L_\infty$  было больше или равно 2. Сформулируем это предложение в виде леммы.

**Лемма 1.** Задача об оптимальной упаковке квадратов  $2 \times 2$  в многоугольнике  $M$  эквивалентна задаче об оптимальном размещении в многоугольнике  $M \ominus K_1$  единичных квадратов, так чтобы расстояние между любыми двумя единичными квадратами в метрике  $L_\infty$  было больше или равно 2.

**Доказательство.** Для доказательства каждой укладке  $2 \times 2$  квадратов сопоставим размещение единичных квадратов по правилу: в каждом  $2 \times 2$  квадрате выберем левый нижний единичный квадрат. Легко видеть, что многоугольник  $M \ominus K_1$  с точностью до параллельного переноса совпадает с множеством левых нижних единичных квадратов у  $2 \times 2$  квадратов, которые размещаются внутри многоугольника  $M$ . Таким образом, каждой укладке  $2 \times 2$  квадратов в многоугольнике  $M$  соответствует размещение единичных квадратов с расстоянием  $L_\infty \geq 2$ . Обратно. Пусть дано размещение в некотором многоугольнике  $M'$  единичных квадратов с расстоянием  $L_\infty \geq 2$ . Сопоставим этому размещению укладку  $2 \times 2$  квадратов по правилу: каждому единичному квадрату размещения сопоставим  $2 \times 2$  квадрат, так чтобы единичный квадрат был левым нижним у этого  $2 \times 2$  квадрата. Легко сообразить, что так полученные  $2 \times 2$  квадраты не пересекаются. При этом они все находятся внутри многоугольника  $M' \oplus K_1$ . Поскольку мы выбираем  $M' = M \ominus K_1$ , то лемма доказана, поскольку  $M \supset M \ominus K_1 \oplus K_1$ .

Рассмотрим двойственную задачу: покрыть как можно меньшим числом  $2 \times 2$  квадратов многоугольник  $M' = M \ominus K_1$ . Обозначим это число  $\bar{N}$ . Значение же задачи об оптимальной упаковке  $2 \times 2$  квадратов в многоугольник  $M$  обозначим  $\underline{N}$ . Справедлива лемма.

**Лемма 2.** Значения прямой задачи об оптимальной упаковке квадратов  $2 \times 2$  в многоугольник  $M$  и двойственной задачи об оптимальном покрытии квадратами  $2 \times 2$  многоугольника  $M' = M \ominus K_1$  удовлетворяют неравенству

$$\bar{N} \geq \underline{N}.$$

**Доказательство.** Пусть дано покрытие квадратами  $2 \times 2$  многоугольника  $M' = M \ominus K_1$ . Легко видеть, что внутри  $2 \times 2$  квадрата нельзя разместить более одного единичного квадрата в силу леммы 1. И в силу же леммы 1 в многоугольнике  $M' = M \ominus K_1$  нельзя разместить более  $\bar{N}$  единичных квадратов, отстоящими друг от друга на расстоянии больше или равным 2. Лемма доказана.

Эта лемма полезна для ситуации, когда  $\bar{N} = \underline{N}$ . В этом случае любое оптимальное покрытие квадратами  $2 \times 2$  многоугольника  $M' = M \ominus K_1$  будет доказательством оптимальности соответствующего размещения в этом многоугольнике единичных квадратов и в силу леммы 1 доказательством оптимальности укладки в многоугольнике  $M$   $2 \times 2$  квадратов.

Рассмотрим в качестве примера задачу Штейнгауза из [7]. В круг радиуса 5 упаковать как можно больше единичных квадратов. Мы аппроксимируем эту задачу задачей упаковки  $2 \times 2$  квадратов в многоугольнике на рис. 1.

Достаточно просто накрыть многоугольник  $M \ominus K_1$  67 квадратами  $2 \times 2$ . Один из способов показан на рис. 2.

Поскольку многоугольника  $M \ominus K_1$  покрыт 67 квадратами  $2 \times 2$ , то в многоугольнике  $M \ominus K_1$  можно разместить не более 67 единичных квадратов. На самом деле в многоугольнике  $M \ominus K_1$  можно разместить 67 единичных квадратов.

Этому размещению соответствует оптимальная упаковка 67 квадратов  $2 \times 2$  в исходном многоугольнике  $M$ , которая представлена на следующем рис. 3.

В процессе построения мы с помощью покрытия на рисунке получили доказательство, что данная укладка является оптимальной. В [7] такого доказательства не было.

Другие оценки можно получить путем раскрашивания единичных квадратов многоугольника  $M$  в 4 цвета, так чтобы любой  $2 \times 2$  квадрат содержал единичные квадраты

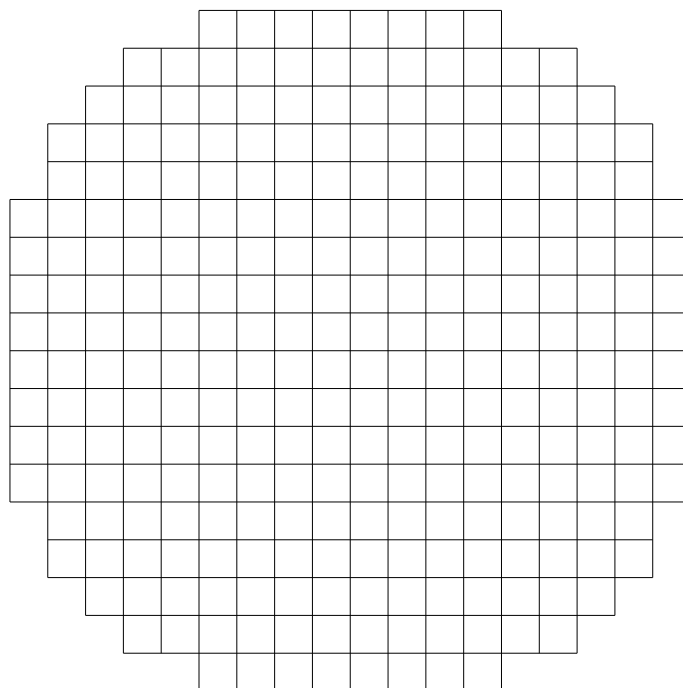


Рис. 1. Многоугольник М

всех 4-х цветов. Поскольку любой квадрат упаковки содержит по одной клетке каждого цвета, то справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.** Для оптимального значения задачи об упаковке в многоугольнике  $M$   $2 \times 2$  квадратов справедлива верхняя оценка

$$\underline{N} \leq \min(N_1, N_2, N_3, N_4),$$

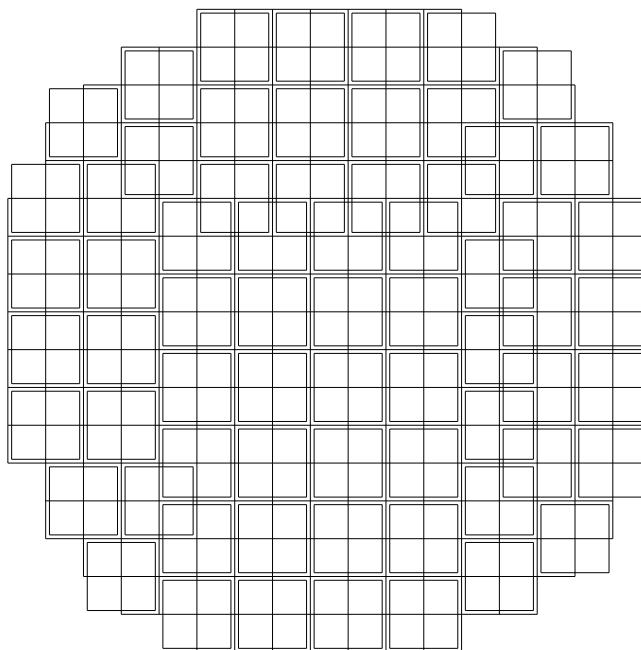
где  $N_i$  обозначает число клеток  $i$ -го цвета в многоугольнике  $M$ .

Раскрасок в 4 цвета, таких что любой  $2 \times 2$  квадрат содержит клетки всех четырех цветов, существует не так много, но подобная раскраска все-таки не одна, и поэтому возникает вспомогательная задача подбора такой раскраски, которая позволяет уменьшить оценку леммы 3. Однако эту задачу в данной статье мы рассматривать не будем. Возьмем в качестве основной раскраски раскраску, при которой у клетки с координатами  $(i, j)$  цвет  $c(i, j)$  определяется по формуле

$$c(i, j) = 1 + i \pmod 2 + j \pmod 2.$$

Выделим в многоугольнике клетки, раскрашенные в цвета 1, 3 (или 2, 4). Тогда любой квадрат  $2 \times 2$  одной из своих диагоналей будет иметь пару клеток, раскрашенных в эти два цвета.

Построим граф задачи об оптимальной укладке в многоугольнике  $M$   $2 \times 2$  квадратов. Вершинами графа будут клетки, раскрашенные в цвета 1, 3. Для лучшей оценки числа укладываемых  $2 \times 2$  квадратов можно выбрать 2 цвета так, чтобы в них присутствовал цвет, дающий значение минимума в лемме 3. Ребра нашего графа будут соединять те

Рис. 2. Покрытие многоугольника  $M \ominus K_1$ 

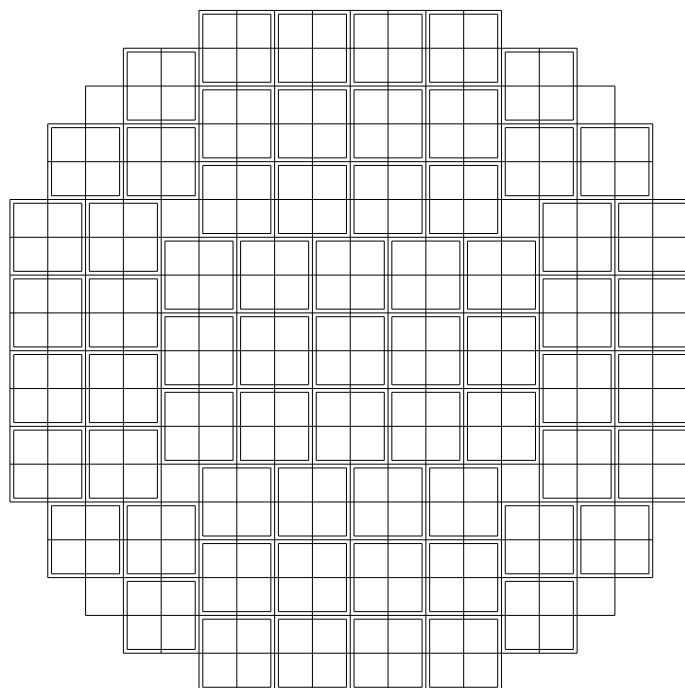
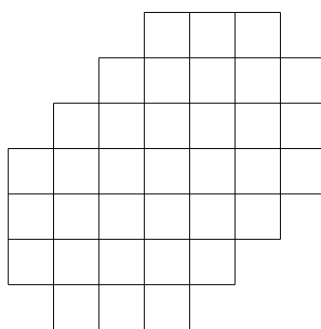
вершины, которые могут быть накрыты  $2 \times 2$  квадратом, лежащим внутри многоугольника  $M$ .

Легко видеть, что если  $2 \times 2$  квадраты, находящиеся внутри многоугольника  $M$ , не пересекаются, то не пересекаются и соответствующие им ребра построенного нами графа. Если бы это соответствие было таково, что непересекающиеся ребра соответствовали бы непересекающимся квадратам, то сразу же можно было бы рассчитывать на существование полиномиального алгоритма для исходной задачи об оптимальной упаковке в многоугольнике  $M$   $2 \times 2$  квадратов. Дело в том, что задача о максимальном числе непересекающихся ребер в двудольном графе является известной задачей теории графов, существует обширная литература по этой задаче и разработано много полиномиальных алгоритмов ее решения.

Таким образом, наша задача эквивалентна задаче о максимальном числе непересекающихся ребер в двудольном графе, причем ребра, принадлежащие одному квадрату, не могут быть в одном паросочетании. Геометрически это означает, что каждое ребро замечает две клетки, стороной которых оно является. Это позволяет уточнить оценку леммы 3.

Рассмотрим пример. Пусть в многоугольнике, изображенном на рис. 4, необходимо упаковать как можно большее число  $2 \times 2$  квадратов. Раскрасим этот многоугольник как на рис. 5.

Из этого рисунка видно, что больше 7 квадратов  $2 \times 2$  упаковать в многоугольник  $M$  невозможно, поскольку внутри прямоугольника  $M$  только 7 клеток цвета 3. По двум цветам 1, 3 построим граф задачи об оптимальной укладке в многоугольнике  $M$   $2 \times 2$  квадратов. После поворота на  $45$  градусов он будет выглядеть как на рис. 6:

Рис. 3. Оптимальная укладка в многоугольнике  $M$  квадратов  $2 \times 2$ Рис. 4. Многоугольник  $M'$ 

Разделим ребра на внутренние и граничные. Граничные ребра замечают один квадрат, внутренние ребра замечают два квадрата. Отсюда следует, что внутреннее ребро в паросочетании может быть только одно, если у нас в паросочетании 7 ребер. То есть граничных ребер в искомом паросочетании должно быть ровно 6. Но в нашем графе 12 граничных ребер, образующих простой цикл. Поэтому граничные ребра в паросочетании могут быть либо как на рис. 7, либо как на рис. 8.

В обоих случаях они замечают все квадраты одного цвета, если их раскрасить в два цвета в шахматном порядке. Поэтому поскольку внутреннее ребро замечает два квадрата разного цвета, то внутреннего ребра для обоих паросочетаний не найдется. Поэтому

2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4
2	3	2	3	2	3	2	3
1	4	1	4	1	4	1	4

Рис. 5. Раскраска многоугольника  $M$

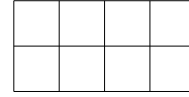


Рис. 6. Граф задачи об оптимальной укладке

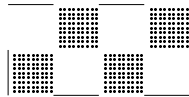


Рис. 7. Первое паросочетание

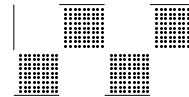


Рис. 8. Второе паросочетание

максимальное паросочетание для нашей задачи содержит не более 6 ребер. То есть в многоугольник на рис. 4 помещается не более 6 квадратов  $2 \times 2$ .

Сформулируем задачу об оптимальной упаковке квадратов  $2 \times 2$  в виде задачи целочисленного линейного программирования. Каждому положению квадрата  $2 \times 2$  поставим в соответствие целочисленную переменную  $x_{i,j}$ , где  $i, j$  — координаты левой нижней вершины. Тогда каждая клетка  $i, j$  должна принадлежать только одному квадрату, что соответствует ограничению

$$x_{i,j} + x_{i-1,j} + x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1} \leq 1.$$

Поскольку левая нижняя клетка  $i, j$  квадрата  $2 \times 2$  соответствует клетке из  $M \ominus K_1$ , то задача целочисленного линейного программирования будет формулироваться следующим образом:

$$\sum_{(i,j) \in M \ominus K_1} x_{i,j} \rightarrow \max$$

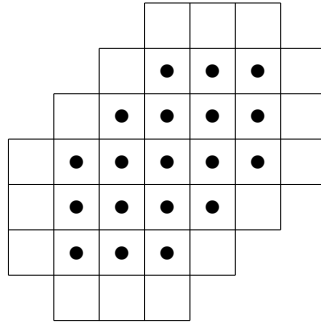
при ограничениях

$$x_{i,j} + x_{i-1,j} + x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1} \leq 1,$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}.$$

В этих ограничениях мы не следим, чтобы все 4 квадрата  $2 \times 2$  в ограничениях были внутри многоугольника  $M$ , поскольку квадраты  $2 \times 2$  вне многоугольника  $M$  могут только усилить ограничения, но никак не повлиять на целевую функцию, и потому, приняв их значения равными нулю, мы получим задачу с тем же оптимальным значением. Но с точки зрения канонического представления задачи об оптимальной упаковке важно в неравенствах выписывать только те переменные, которым соответствуют квадраты  $2 \times 2$ , лежащие внутри многоугольника  $M$ . Тогда появляется возможность ввести понятие доминирования одной клетки многоугольника  $M$  над другой.

**Определение.** Скажем, что единичная клетка (квадрат)  $C_1 \in M$  целочисленного многоугольника  $M$  доминирует над клеткой  $C_2 \in M$  (обозначение  $C_1 \succ C_2$ ), если множество

Рис. 9. Многоугольник  $M'$ 

содержащих ее квадратов  $2 \times 2$ , лежащих внутри  $M$ , содержит в себе множество квадратов  $2 \times 2$ , лежащих внутри  $M$  и содержащих клетку  $C_2$ .

Это определение связано с тем, что если  $C_1 \succ C_2$ , то неравенство, соответствующее клетке  $C_2$ , следует из неравенства, соответствующего клетке  $C_1$ , и таким образом становится избыточным. В этой связи в многоугольнике  $M$  можно выделить доминирующие клетки и соответствующие им неравенства, тем самым уменьшить размер задачи целочисленного линейного программирования для задачи об оптимальной упаковке.

В качестве примера выпишем задачу целочисленного линейного программирования для задачи об оптимальной упаковке в многоугольнике, показанном на рис. 6, квадратов  $2 \times 2$ . На следующем рис. 9 показаны доминирующие клетки.

Задача целочисленного линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

$$\max\{x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{3,5} + \\ x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} + x_{4,5} + x_{4,6} + x_{5,3} + x_{5,4} + x_{5,5} + x_{5,6} + x_{6,4} + x_{6,5}\}$$

при ограничениях

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{2,1} + x_{2,2} \leq 1; \quad x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 1; \quad x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,3} + x_{2,4} \leq 1;$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{3,1} + x_{3,2} \leq 1; \quad x_{2,2} + x_{2,3} + x_{3,2} + x_{3,3} \leq 1;$$

$$x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq 1; \quad x_{2,4} + x_{2,5} + x_{3,4} + x_{3,5} \leq 1;$$

$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{4,1} + x_{4,2} \leq 1; \quad x_{3,2} + x_{3,3} + x_{4,2} + x_{4,3} \leq 1;$$

$$x_{3,3} + x_{3,4} + x_{4,3} + x_{4,4} \leq 1; \quad x_{3,4} + x_{3,5} + x_{4,4} + x_{4,5} \leq 1; \quad x_{3,5} + x_{3,6} + x_{4,5} + x_{4,6} \leq 1;$$

$$x_{4,2} + x_{4,3} + x_{5,2} + x_{5,3} \leq 1; \quad x_{4,3} + x_{4,4} + x_{5,3} + x_{5,4} \leq 1;$$

$$x_{4,4} + x_{4,5} + x_{5,4} + x_{5,5} \leq 1; \quad x_{4,5} + x_{4,6} + x_{5,5} + x_{5,6} \leq 1;$$

$$x_{5,3} + x_{5,4} + x_{6,3} + x_{6,4} \leq 1;$$

$$x_{5,4} + x_{5,5} + x_{6,4} + x_{6,5} \leq 1;$$

$$x_{5,5} + x_{5,6} + x_{6,5} + x_{6,6} \leq 1;$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}.$$

Решение этой задачи с помощью свободно распространяемой программы LPSolve дает решение 6.

**Заключение.** В статье приведены результаты разработки и исследования моделей, методов и алгоритмов для решения задачи 56 в списке открытых проблем вычислительной геометрии The Open Problems Project <http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/P56.html>: Packing Unit Squares in a Simple Polygon.

Получено значительное продвижение к решению известной открытой проблемы вычислительной геометрии, разработаны математические модели, методы и алгоритмы решения задачи об упаковке единичных квадратов внутри различных односвязных областей, обобщающие известные в литературе.

## Список литературы

1. ДУСКНОФФ Н. A typology of cutting and packing problems // European Journal of Operational Research. 1990. V. 44. P. 145–160.
2. ARSLANOV M. Z. A polynomial algorithm for one problem of guillotine cutting // Oper. Res. Let. 2007. V. 35. № 5. P. 636–644.
3. ARSLANOV M. Z. Continued fractions in optimal cutting a rectangular sheet into equal small rectangles // European Journal of Operational Research. 2000. V. 125. P. 239–248.
4. FOWLER R. J., PATERSON M. S. AND TANIMOTO S. L. Optimal packing and covering in the plane are NP-complete // Information Processing Letters. 1981. V. 12(3). P. 133–137.
5. НОСНВАУМ Д. S. AND МААС W. Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI // Journal of Association of Computer Machinery. 1985. V. 32. P. 130–136.
6. EL-КНАСЧЕН D. Decomposing and Packing Problems. 2009. PhD thesis. Concordia University.
7. ШТЕЙНГАУЗ Г. Задачи и размышления. М.: Мир, 1974.
8. The Open Problems Project. [Electron. res.]: <http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/>. A project to record open problems of interest to researchers in computational geometry and related fields. 2011.

*Арсланов Марат Зуфарович — д-р физ.-мат. наук,  
заведующий лабораторией в Институте  
информационных и вычислительных технологий МОН РК,  
e-mail: mzarlanov@hotmail.com*

*Дата поступления — 10.07.2015*