

THE RULES FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ESTIMATION OF HEAT PROPAGATION IN A ROD USING QUADRATIC FIT WITH AN INCREASE IN THE NUMBER OF ELEMENTS

A. K. Kudaiykulov, A. A. Tashev

Institute of Information and Computational Technologies
050010, Almaty, Republic of Kazakhstan

This paper considers the method of producing system of linear differential equations for solution of non-stationary problem of heat propagation in a rod. For receiving system of linear differential equations variation method is used. At this, the square approximation of temperature elements of a rod is performed on all its length. To achieve the goal firstly are investigated cases, when the rod is consists of two or three elements. It is assumed that from the left end face of rod is fed a constant flow of heat and the right end face of rod is not thermal insulated. Further, it is obtains systems of linear differential equations for different options thermal insulation of side surface of two and three rod elements. Analyzing the structure of obtained systems of linear differential equations, are obtained rules of making the systems of linear differential equations for the solution of non-stationary heat distribution problem in a rod consisting of any quantity of elements. These rules are obtained for any combination of heat isolation elements side surface of a rod. The developed rules allow to receive stationary and non-stationary, and also right parts of system of linear differential equations for the solution of problem of heat distribution in a rod.

Based on the proposed method has developed program using instrumental programming of Delphi which allows to obtain system of linear differential equations.

And also for the research of thermo physical characteristics of a rod the program is developed, which allows

- to solve stationary and non-stationary problems of heat distribution in a rod;
- to define thermo-mechanical characteristics of a rod: elongation of a rod; axial thermal effort; thermo-elastic voltage; thermo-elastic deformation; temperature deformation; temperature voltage; elastic deformation and movement.

Programs allow to set necessary basic data for the solution of a task and to receive estimates of above-mentioned characteristics in an evident graphical form for both stationary and for non-stationary processes.

The specific examples of solution of non-stationary heat distribution problem in the rod, confirming the correctness of the proposed method are considered.

Key words: energy, functional, temperature, heat flow, heat exchange, thermal isolation.

References

1. Larry J., Segerlind L. Applied Finite Element Analysis, 2nd Edition. 448 p. February 1985, ©1984. 653 p.
2. Zienkiewicz O. C., Moran K. Finite Elements and Approximation, 1983.

ПРАВИЛА ПОЛУЧЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАДРАТИЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ

А. К. Кудайкулов, А. А. Ташев

Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК
050010, Алма-Ата, Республика Казахстан

УДК 539.3 (075)

В работе рассматривается методика получения системы линейных дифференциальных уравнений для решения нестационарной задачи распространения тепла в стержне с использованием вариационного подхода с привлечением квадратичной аппроксимации температуры элементов стержня. При этом сначала исследуются случаи, когда стержень разбивается на два и три элемента, когда с левого торца стержня подается поток тепла, правый торец стержня не теплоизолирован, а элементы боковой поверхности стержня теплоизолированы в различной комбинации. Далее, анализируя системы линейных дифференциальных уравнений, полученные для различных вариантов теплоизоляции боковой поверхности элементов стержня, определены правила составления систем линейных дифференциальных уравнений для решения нестационарной задачи распространения тепла в стержне, состоящей из любого количества элементов стержня с использованием квадратичной аппроксимации, когда элементы стержня теплоизолированы произвольным образом. При этом сформулированы правила получения стационарной и нестационарной части, а также правой части системы линейных дифференциальных уравнений.

Разработано программное обеспечение с использованием инструментального программирования Delphi для получения системы линейных дифференциальных уравнений для решения нестационарной задачи распространения тепла в стержне. Рассмотрены конкретные примеры решения нестационарной задачи распространения тепла в стержне, когда левая половина стержня теплоизолирована, а правая нет, и наоборот.

Ключевые слова: внутренние источники тепла, внутренняя энергия, нестационарность, тепловой поток, вариационный подход.

Введение. Большинство из несущих элементов устройств нагревается под воздействием трения, различных тепловых воздействий. Чтобы исследовать степень нагревания этих элементов с любой заданной точностью, необходимо уметь составлять систему линейных дифференциальных уравнений для квадратичной аппроксимации температуры стержня, состоящей из любого числа элементов. В данной работе рассматриваются правила получения таких систем линейных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (грант № ГФ4 3322 (2015–2017 гг.)) по теме „Теоретические основы математического моделирования установившихся нелинейных, теплофизических процессов в жаропрочных сплавах“.

1. Постановка задачи и численный алгоритм. Общая постановка вариационного подхода для решения нестационарной задачи теплопроводности в стержне рассмотрена в [1]. Согласно этому подходу, определяется аппроксимация температур T и вычисляется выражение:

$$X = \int_V \left[\frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - QT + \lambda \frac{dT}{dt} T \right] dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2} h(T - T_\infty)^2 \right] dS,$$

где $I_1 = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV$ — часть тепла, которая уходит на повышение внутренней энергии;

$I_2 = \int_S qT dS$ — количество поступающего тепла на стержень;

$I_3 = \int_S \frac{1}{2} h(T - T_\infty)^2 dS$ — количество тепла, уходящего через поверхность стержня;

$I_4 = \int_V \lambda \frac{dT}{dt} T dV$ — член, учитывающий нестационарность задачи;

$I_5 = \int_V QT dV$ — внутренние источники энергии.

Для дальнейших исследований введем следующие обозначения: q — тепловой поток ($\text{Вт}/\text{см}^2$);

T — температура ($^\circ\text{C}$);

S — площадь поперечного сечения стержня (см^2);

T_∞ — температура окружающей среды ($^\circ\text{C}$);

$\lambda = \rho c$ — коэффициент температуропроводности ($\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$);

h — коэффициент теплоотдачи; ($\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$) (heat-transfer coefficient)

K_{xx} — коэффициент теплопроводности материала ($\frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot ^\circ\text{C}}$);

Q — источник тепла внутри тела ($\frac{\text{Вт}}{\text{см}^3 \cdot ^\circ\text{C}}$);

ρ — плотность ($\frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$);

c — удельная теплоемкость ($\frac{\text{Вт}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$);

r — радиус стержня;

L, S — длина и площадь поперечного сечения стержня соответственно;

n — число элементов аппроксимации;

$l = L/n$ — число узлов.

Проблема заключается в нахождении правил составления системы дифференциальных уравнений для решения нестационарной задачи теплопроводности в стержне для любого заданного количества элементов стержня.

2. Решение задачи. Рассмотрим стержень с температурой 0 в начальный момент времени, с левого конца которого подается поток тепла q . Квадратичная аппроксимация температуры некоторого отрезка стержня длиной l есть:

$$T = \left(\frac{2x^2 - 3dx + l^2}{l^2} \right) T_1 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) T_2 + d \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) T_3, \quad (1)$$

где T_1, T_2 и T_3 — температура стержня на левом конце, посередине и на правом конце отрезка стержня соответственно.

Если введем векторы

$$\mathbf{N}^T = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2}, \frac{4lx - 4x^2}{l^2}, \frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{T}^T = (T_1, T_2, T_3),$$

то (1) можно написать в виде $T = \mathbf{N}^T \mathbf{T}$.

Возьмем производное от T по x :

$$T_x = \frac{dT}{dx} = \left(\frac{4x-3l}{l^2} \right) T_1 + \left(\frac{4l-8x}{l^2} \right) T_2 + \left(\frac{4x-l}{l^2} \right) T_3 \quad (2)$$

или в матричной форме $T_x = \mathbf{N}_x^T \mathbf{T}$.

Рассмотрим функционал:

$$X = \int_V \left[\frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \right] dV - \int_V Q T dV + \int_V \lambda \frac{dT}{dt} T dV + \int_{S_1} q T dS + \int_{S_2} \frac{1}{2} h (T - T_\infty)^2 dS + \int_{S_3} \frac{1}{2} h (T - T_\infty)^2 dS, \quad (3)$$

где S_1 , S_2 и S_3 — площадь поперечного сечения левой части стержня, боковая поверхность и площадь поперечного сечения правой части стержня ($S_1 = S_3 = S$), соответственно.

Подставляя (1) и (2) в (3), получим

$$X = \frac{K_{xx}}{2} \int_V \mathbf{T}^T \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \mathbf{T} dV - \int_V Q \mathbf{N}^T \mathbf{T} dV + \int_V \lambda \mathbf{N}^T \frac{d\mathbf{T}}{dt} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dV + \int_{S_1} q \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS + \frac{h}{2} \int_{S_2} \mathbf{T}^T \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS - h \int_{S_2} \mathbf{N}^T \mathbf{T} T_\infty dS + \frac{h}{2} \int_{S_2} T_\infty^2 dS + \frac{h}{2} \int_{S_3} \mathbf{T}^T \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS - h \int_{S_3} \mathbf{N}^T \mathbf{T} T_\infty dS + \frac{h}{2} \int_{S_3} T_\infty^2 dS \quad (4)$$

Берем производное X по \mathbf{T} . Имеем:

$$\frac{d}{d\mathbf{T}} X = K_{xx} \int_V \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \mathbf{T} dV - \int_V Q \mathbf{N}^T dV + \int_V \lambda \mathbf{N} \mathbf{N}^T \frac{d\mathbf{T}}{dt} dV + \int_{S_1} q \mathbf{N}^T dS + h \int_{S_2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS - h \int_{S_2} \mathbf{N}^T T_\infty dS + h \int_{S_3} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS - h \int_{S_3} \mathbf{N}^T T_\infty dS = 0. \quad (5)$$

Вычислим каждый член выражения (5) в отдельности для трех узлов (один элемент, $n=1$):

$$\begin{aligned} K_{xx} \int_V \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \mathbf{T} dV &= \\ &= \frac{K_{xx}}{L^4} \int_V \begin{pmatrix} (4x-3l)(4l-8x) & (4x-3l)(4l-8x) & (4x-3l)(4x-3l) \\ (4l-8x)(4l-8x) & (4l-8x)(4l-8x) & (4l-8x)(4x-3l) \\ (4x-l)(4l-8x) & (4x-l)(4l-8x) & (4x-l)(4x-3l) \end{pmatrix} dV \mathbf{T} = \\ &= \frac{SK_{xx}}{6l} \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}. \quad (6) \end{aligned}$$

$$\int_V Q \mathbf{N}^T dV = \frac{SQ}{l^2} \int_0^L \begin{pmatrix} 2x^2 - 3lx + l^2 \\ 4lx - 4x^2 \\ 2x^2 - lx \end{pmatrix} dx = \frac{SQl}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

$$\lambda \int_V \mathbf{N} \mathbf{N}^T \frac{d\mathbf{T}}{dt} dV = \frac{\lambda}{l^4} \int_V \begin{pmatrix} (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - 3lx + l^2) & (2x^2 - 3lx + l^2)(4lx - 4x^2) \\ (4lx - 4x^2)(2x^2 - 3lx + l^2) & (4lx - 4x^2)(4lx - 4x^2) \\ (2x^2 - lx)(2x^2 - 3lx + l^2) & (2x^2 - lx)(4lx - 4x^2) \\ (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - lx) & \\ (4lx - 4x^2)(2x^2 - lx) & \\ (2x^2 - lx)(2x^2 - lx) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \end{pmatrix} dV = \frac{S\lambda l}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

На левом конце стержня имеем:

$$\int_{S_1} q \mathbf{N} \mathbf{N} dS = qS \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$h \int_{S_2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS = \frac{2\pi r h}{l^4} \int_V \begin{pmatrix} (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - 3lx + l^2) & (2x^2 - 3lx + l^2)(4lx - 4x^2) \\ (4lx - 4x^2)(2x^2 - 3lx + l^2) & (4lx - 4x^2)(4lx - 4x^2) \\ (2x^2 - lx)(2x^2 - 3lx + l^2) & (2x^2 - lx)(4lx - 4x^2) \\ (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - lx) & \\ (4lx - 4x^2)(2x^2 - lx) & \\ (2x^2 - lx)(2x^2 - lx) & \end{pmatrix} dV \mathbf{T} = \frac{2\pi r h}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$h \int_{S_2} \mathbf{N}^T T_\infty dS = \frac{2\pi r h}{l^2} \int_0^l \begin{pmatrix} 2x^2 - 3lx + l^2 \\ 4lx - 4x^2 \\ 2x^2 - lx \end{pmatrix} dx = \frac{\pi r h l}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

На правом конце стержня имеем:

$$h \int_{S_3} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS = hS \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ hST_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$$h \int_{S_3} \mathbf{N}^T T_\infty dS = hST_\infty \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Подставляя все полученные выражения (без учета внутренних источников энергии (7)) в (5), получим следующую систему дифференциальных уравнений для нестационарного, нетеплоизолированного случая:

$$H^1 \bar{T}_t + K_1^1 q \bar{T} = B_1^1 q, \quad (14)$$

где

Таблица 1

Исходные данные

K_{xx}	$\lambda=\rho c$	H	T_∞	Q	T_0	R	S
75	15	10	40°C	150	100°C	1	πr^2

$$K_1^{1q} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{14K_{xx}S}{6L} + \frac{4\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6L} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{2K_{xx}S}{6L} + \frac{\pi rhl}{15} \\ -\frac{16K_{xx}S}{6L} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{32K_{xx}S}{6L} + \frac{16\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6L} + \frac{2\pi rhl}{15} \\ \frac{2K_{xx}S}{6L} + \frac{\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6L} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{14K_{xx}S}{6L} + \frac{4\pi rhl}{15} + hS \end{array} \right) = \frac{K_{xx}S}{6L} \times$$

$$\times \left(\begin{array}{ccc} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & hs \end{array} \right) + \frac{\pi rhl}{15} \left(\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) = F^{1q} + O^{1q} + G_1^{1q},$$

$$\bar{T}_t = \left(\begin{array}{c} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \end{array} \right), \quad T = \left(\begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right), \quad H^1 = \frac{\lambda S l}{15} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array} \right),$$

$$B_1^{1q} = \left(\begin{array}{c} -qS + \frac{\pi rhl T_\infty}{3} \\ \frac{4\pi rhl T_\infty}{3} \\ hS T_\infty + \frac{\pi rhl T_\infty}{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -qS \\ 0 \\ hS T_\infty \end{array} \right) + \frac{\pi rhl T_\infty}{3} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 1 \end{array} \right) = B^{1q} + \tilde{B}_1^{1q}.$$

и для стационарного случая имеем:

$$K_1^{1q} \bar{T} = B^{1q}, \quad (15)$$

Здесь нижние индексы означают нетеплоизолированные элементы, а верхний — общее количество элементов и начальные условия для левого конца стержня, куда подается поток тепла q .

Подставляя исходные данные из табл. 1, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc} 3375 & 1687,5 & -843,75 \\ 1687,5 & 13500 & 1687,5 \\ -843,75 & 1687,5 & 3375 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 9750 & -3750 & -375 \\ -3750 & 30000 & -3750 \\ -375 & -3750 & 12000 \end{array} \right) \times$$

$$\times \left(\begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 258750 \\ 90000 \\ 315000 \end{array} \right). \quad (16)$$

Решение этой системы линейных дифференциальных уравнений представлено на рис. 1.

Стационарными решениями являются $T_1 = 43,66^\circ C$, $T_2 = 40,49^\circ C$, $T_3 = 40,26^\circ C$. В случае, когда боковая поверхность теплоизолирована, не учитываются члены (10) и (11). В этом случае (14) имеет вид

$$H^1 \bar{T}_t + K_1^{1q} \bar{T} = B^{1q}, \quad (17)$$

где $K^{1q} = F^{1q} + O^{1q}$. В этом случае имеем:

$$K^{1q} \bar{T} = B^{1q}. \quad (18)$$

Подставляя исходные данные из табл. 1, получим следующую систему дифференциальных уравнений для нестационарного случая:

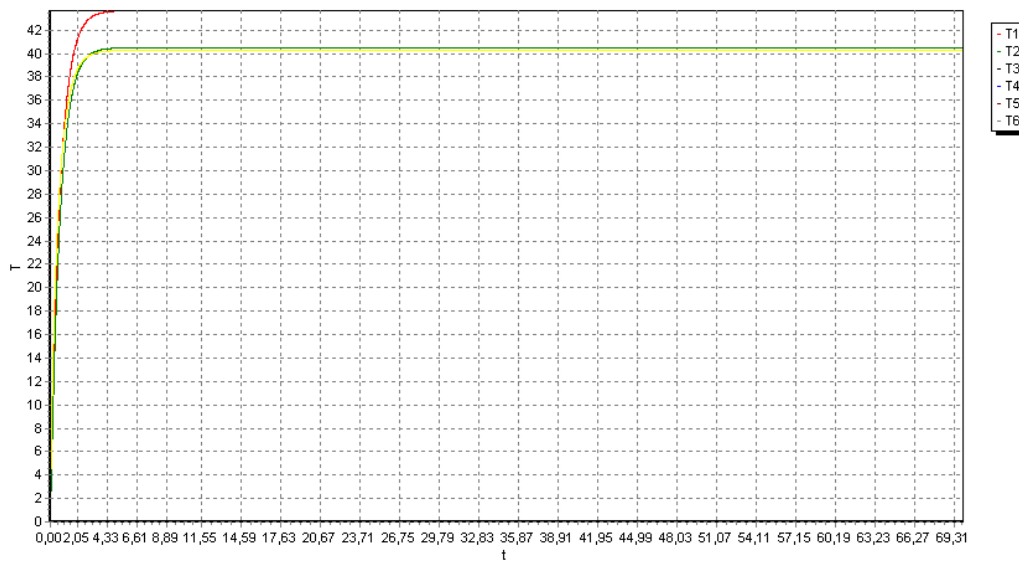


Рис. 1. Изменение температуры в трех узлах для нетеплоизолированного случая (слева приложен поток тепла $q = -150 \text{ Вт/см}^2$)

$$\begin{pmatrix} 675 & 337,5 & -168,75 \\ 337,5 & 2700 & 337,5 \\ -168,75 & 337,5 & 675 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1050 & -1200 & 150 \\ -1200 & 2400 & -1200 \\ 150 & -1200 & 1500 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6750 \\ 0 \\ 18000 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

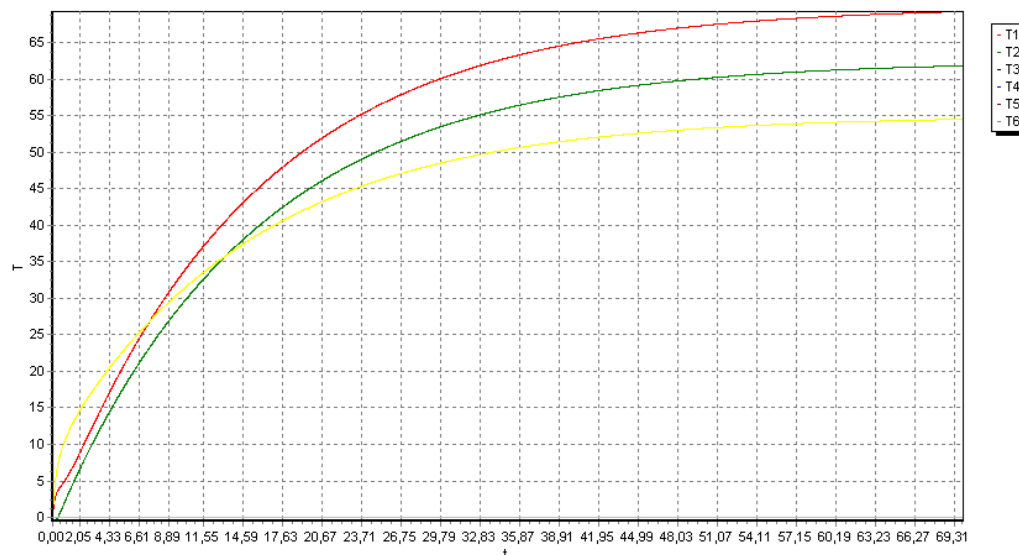


Рис. 2. Изменение температуры в трех узлах для теплоизолированного случая (слева приложен поток тепла $q = -150 \text{ Вт/см}^2$)

Нестационарное решение этой системы представлено на рис. 2.

Стационарным решением является $T_1 = 70^\circ\text{C}$, $T_2 = 62,5^\circ\text{C}$ и $T_3 = 55^\circ\text{C}$. Вычислим теперь каждый член выражения (5) в отдельности для пяти узлов (два элемента, $n = 2$). Имеем

$$\begin{aligned}
& K_{xx} \int_V \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T \mathbf{T} dV = \\
& = \frac{K_{xx}}{l^4} \int_V \begin{pmatrix} (4x-3l)(4l-8x) & (4x-3l)(4l-8x) & (4x-3l)(4x-3l) & 0 & 0 \\ (4l-8x)(4l-8x) & (4l-8x)(4l-8x) & (4l-8x)(4x-3l) & 0 & 0 \\ (4x-l)(4l-8x) & (4x-l)(4l-8x) & (4x-l)(4x-3l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
& \quad \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} dV + \frac{K_{xx}}{l^4} \int_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (4x-3l)(4l-8x) & (4x-3l)(4l-8x) \\ 0 & 0 & (4l-8x)(4l-8x) & (4l-8x)(4l-8x) \\ 0 & 0 & (4x-l)(4l-8x) & (4x-l)(4l-8x) \end{pmatrix} \\
& \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (4x-3l)(4x-3l) \\ (4l-8x)(4x-3l) \\ (4x-l)(4x-3l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} dV = \frac{SK_{xx}}{6l} \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 & 0 & 0 \\ -16 & 32 & -16 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 28 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 32 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & -16 & 14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix}. \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_V Q \mathbf{N}^T dV = \frac{SQ}{l^2} \int_0^L \begin{pmatrix} 2x^2 - 3lx + l^2 \\ 4lx - 4x^2 \\ 2x^2 - lx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \frac{SQl}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
& \lambda \int_V \mathbf{N} \mathbf{N}^T \frac{d\mathbf{T}}{dt} dV = l \frac{\lambda}{L^4} \int_V \begin{pmatrix} (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - 3lx + l^2) \\ (4lx - 4x^2)(2x^2 - 3lx + l^2) \\ (2x^2 - lx)(2x^2 - 3lx + l^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} (2x^2 - 3lx + l^2)(4lx - 4x^2) & (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - lx) & 0 & 0 \\ (4lx - 4x^2)(4lx - 4x^2) & (4lx - 4x^2)(2x^2 - lx) & 0 & 0 \\ (2x^2 - lx)(4lx - 4x^2) & (2x^2 - lx)(2x^2 - lx) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \\ \frac{dT_4}{dt} \\ \frac{dT_5}{dt} \end{pmatrix} dV + \\
& + \frac{\lambda}{l^4} \int_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - 3lx + l^2) & (2x^2 - 3lx + l^2)(4lx - 4x^2) \\ 0 & 0 & (4lx - 4x^2)(2x^2 - 3lx + l^2) & (4lx - 4x^2)(4lx - 4x^2) \\ 0 & 0 & (2x^2 - lx)(2x^2 - 3lx + l^2) & (2x^2 - lx)(4lx - 4x^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - lx) \\ (4lx - 4x^2)(2x^2 - lx) \\ (2x^2 - lx)(2x^2 - lx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \\ \frac{dT_4}{dt} \\ \frac{dT_5}{dt} \end{pmatrix} dV = \frac{S\lambda l}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 4 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \\ \frac{dT_4}{dt} \\ \frac{dT_5}{dt} \end{pmatrix}.$$

На левом конце стержня имеем:

$$\int_{S_1} q \mathbf{N} dS = qS \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Член, учитывающий теплообмен по боковой поверхности стержня, равен:

$$h \int_{S_2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS = \frac{2\pi r h}{l^4} \int_V \begin{pmatrix} (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - 3lx + l^2) & (2x^2 - 3lx + l^2)(4lx - 4x^2) \\ (4lx - 4x^2)(2x^2 - 3lx + l^2) & (4lx - 4x^2)(4lx - 4x^2) \\ (2x^2 - lx)(2x^2 - 3lx + l^2) & (2x^2 - lx)(4lx - 4x^2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} dV + \frac{2\pi r h}{l^4} \int_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - 3lx + l^2) \\ 0 & 0 & (4lx - 4x^2)(2x^2 - 3lx + l^2) \\ 0 & 0 & (2x^2 - lx)(2x^2 - 3lx + l^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} dV \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (2x^2 - 3lx + l^2)(4lx - 4x^2) & (2x^2 - 3lx + l^2)(2x^2 - lx) \\ (4lx - 4x^2)(4lx - 4x^2) & (4lx - 4x^2)(2x^2 - lx) \\ (2x^2 - lx)(4lx - 4x^2) & (2x^2 - lx)(2x^2 - lx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} dV = \frac{2\pi r h}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 4 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

$$h \int_{S_3} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS = hS \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ hST_5 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$h \int_{S_2} \mathbf{N}^T T_\infty dS \frac{2\pi r h}{l^2} \left[\begin{pmatrix} (2x^2 - 3lx + l^2) \\ 4lx - 4x^2 \\ 2x^2 - lx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x^2 - 3lx + l^2 \\ 4lx - 4x^2 \\ 2x^2 - lx \end{pmatrix} dx \right] = \frac{\pi r h l T_\infty}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

$$h \int_{S_3} \mathbf{N}^T T_\infty dS = hST_\infty \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Подставляя полученные значения (без учета внутренних источников энергии (7)) в (5), получим следующую систему дифференциальных уравнений для нестационарного случая:

$$H^2 \bar{T}_t + K_{1,2}^{2q} \bar{T} = B_{1,2}^{2q}, \quad (28)$$

где

$$K_{1,2}^{2q} = \begin{pmatrix} \frac{14K_{xx}S}{6l} + \frac{4\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{32K_{xx}S} + \frac{2\pi rhl}{16\pi rhl} & \frac{2K_{xx}S}{16K_{xx}S} + \frac{\pi rhl}{2\pi rhl} \\ -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{32K_{xx}S}{6l} + \frac{16\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} \\ \frac{2K_{xx}S}{6l} + \frac{\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{28K_{xx}S}{6l} + \frac{8\pi rhl}{15} \\ 0 & 0 & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} \\ 0 & 0 & \frac{2K_{xx}S}{6l} + \frac{\pi rhl}{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{2K_{xx}S}{6l} + \frac{\pi rhl}{15} & 0 \\ \frac{32K_{xx}S}{6l} + \frac{16\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & 0 \\ -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{14K_{xx}S}{6l} + \frac{4\pi rhl}{15} & \frac{2K_{xx}S}{6l} + \frac{\pi rhl}{15} \end{pmatrix} = \frac{K_{xx}S}{6l} \begin{pmatrix} 14 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 16 & 32 & 16 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 28 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 14 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & hs \end{pmatrix} + \frac{\pi rhl}{15} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = F^{2q} + O^{2q} + G_{1,2}^{1q}.$$

$$H^2 = \frac{S\lambda l}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 4 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}, \bar{T}_t = \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \\ \frac{dT_4}{dt} \\ \frac{dT_5}{dt} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix},$$

$$B_{1,2}^{2q} = \begin{pmatrix} -qS + \frac{\pi rhl T_\infty}{3} \\ \frac{4\pi rhl T_\infty}{3} \\ \frac{2\pi rhl T_\infty}{3} \\ \frac{4\pi rhl T_\infty}{3} \\ hST_\infty + \frac{\pi rhl T_\infty}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qS \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ hST_\infty \end{pmatrix} + \frac{\pi rhl T_\infty}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{2q} + \tilde{B}_{1,2}^{2q}.$$

А для стационарного случая имеем

$$K_{1,2}^{2q} \bar{T} = B_{1,2}^{2q}. \quad (29)$$

Подставляя исходные данные из табл. 1, получим для нестационарного случая следующую систему дифференциальных уравнений:

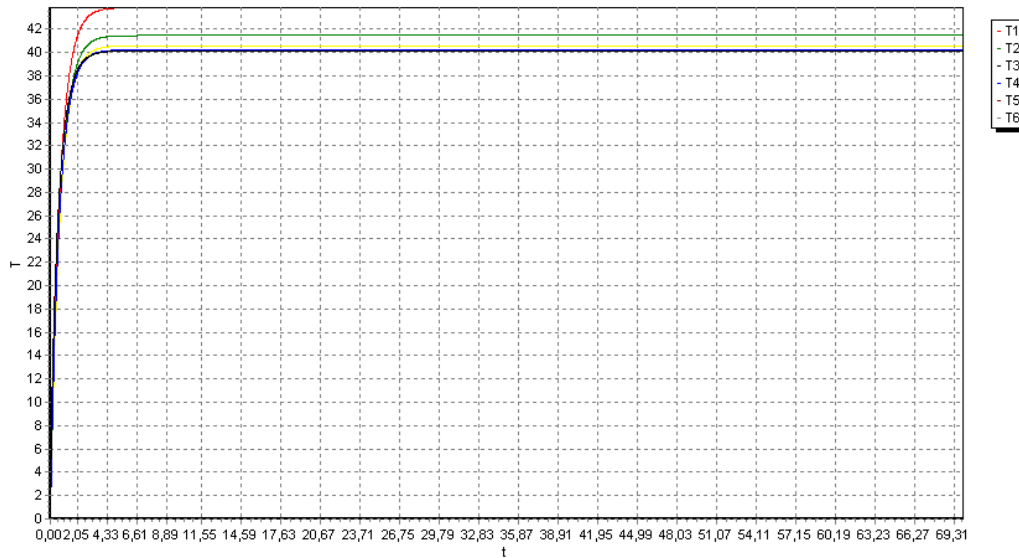


Рис. 3. Изменение температуры в пяти узлах для нетеплоизолированного случая (слева применен поток тепла $q = -150 \text{ Вт/см}^2$)

$$\begin{pmatrix} 843,75 & 421,875 & -210,9375 & 0 & 0 \\ 421,875 & 3375 & 421,875 & 0 & 0 \\ -210,9375 & 421,875 & 1687,75 & 421,875 & -210,9375 \\ 0 & 0 & 421,875 & 3375 & 421,875 \\ 0 & 0 & -210,9375 & 421,875 & 843,75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \\ \frac{dT_4}{dt} \\ \frac{dT_5}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6375 & -5434,5 & 468,75 & 0 & 0 \\ -5437,5 & 16500 & -5437,5 & 0 & 0 \\ 468,75 & -5437,5 & 12750 & -5437,5 & 468,75 \\ 0 & 0 & -5437,5 & 16500 & -5437,5 \\ 0 & 0 & 468,75 & -5437,5 & 7500 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73125 \\ 225000 \\ 112500 \\ 225000 \\ 101250 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы линейных дифференциальных уравнений представлено на рис. 3.

Стационарными решениями являются $T_1 = 43,84^\circ\text{C}$, $T_2 = 41,45^\circ\text{C}$, $T_3 = 40,57^\circ\text{C}$, $T_4 = 40,23^\circ\text{C}$ и $T_5 = 40,13^\circ\text{C}$. Если сравнить температуру в крайних точках и в середине стержня, то есть решения T_1 , T_3 и T_5 с решениями T_1 , T_2 и T_3 , полученными для трех узлов, видим, что отклонения незначительны: $\Delta T_1 = 0,18^\circ\text{C}$, $\Delta T_2 = 0,08^\circ\text{C}$, $\Delta T_3 = 0,13^\circ\text{C}$. В случае, когда боковая поверхность теплоизолирована, (27) имеет вид

$$H^2\bar{T}_t + K^{2q}\bar{T} = B^{2q}, \quad (30)$$

где $K^{2q} = F^{2q} + O^{2q}$.

А для стационарного случая имеем

$$K^{2q}\bar{T} = B^{2q}. \quad (31)$$

Подставляя исходные данные из табл. 1, для нестационарного случая получим следующую систему дифференциальных уравнений:

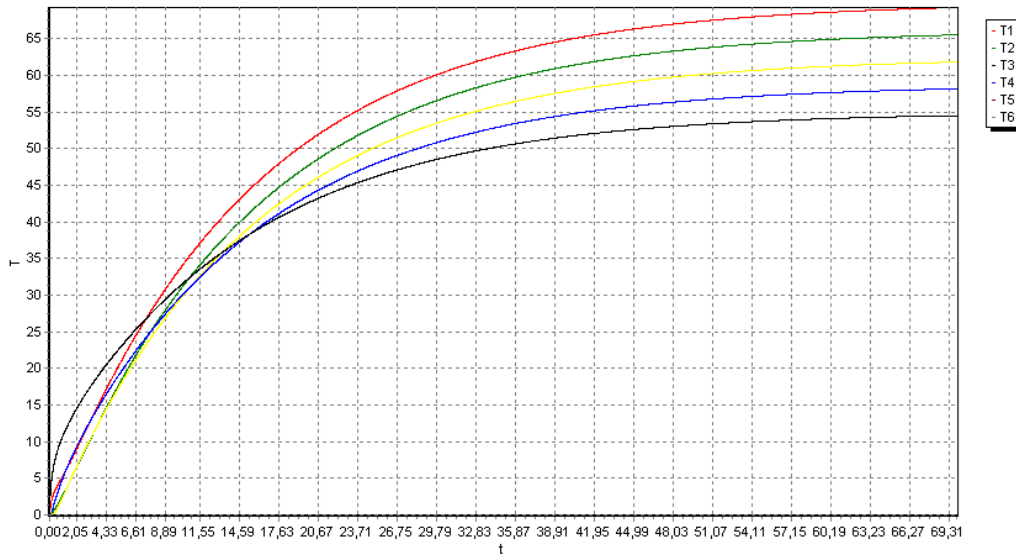


Рис. 4. Изменение температуры в пяти узлах для теплоизолированного случая (слева приложен поток тепла $q = -150 \text{ Вт/см}^2$)

$$\begin{pmatrix} 843,75 & 421,875 & -210,9375 & 0 & 0 \\ 421,875 & 3375 & 421,875 & 0 & 0 \\ -210,9375 & 421,875 & 1687,75 & 421,875 & -210,9375 \\ 0 & 0 & 421,875 & 3375 & 421,875 \\ 0 & 0 & -210,9375 & 421,875 & 843,75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \\ \frac{dT_4}{dt} \\ \frac{dT_5}{dt} \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} 5250 & -6000 & 750 & 0 & 0 \\ -6000 & 12000 & -6000 & 0 & 0 \\ 750 & -6000 & 10500 & -600 & 750 \\ 0 & 0 & -6000 & 12000 & -6000 \\ 0 & 0 & 750 & -6000 & 6375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16875 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 45000 \end{pmatrix}$$

Нестационарное решение данной системы представлено на рис. 4.

Стационарным решением полученной системы является $T_1 = 70^\circ\text{C}$, $T_2 = 67^\circ\text{C}$, $T_3 = 64^\circ\text{C}$, $T_4 = 61^\circ\text{C}$, $T_5 = 58^\circ\text{C}$ и $T_6 = 55^\circ\text{C}$. Если сравнить температуру в крайних точках и в середине стержня, то есть решения T_1 , T_3 и T_5 с решениями T_1 , T_2 и T_3 , полученными для трех узлов, видим, что отклонения незначительны: $\Delta T_1 = 0,18^\circ\text{C}$, $\Delta T_2 = 0,08^\circ\text{C}$, $\Delta T_3 = 0,13^\circ\text{C}$. Для удобства дальнейшего изложения введем операторы U и V

$$U_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, U_1^0 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_2^1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_2^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$U_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{12} & 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = U_2^1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} +$$

$$+ U_2^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

и т. д.

$$V_1^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_1^1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, V_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = V_1^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + V_1^1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$V_2^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2^1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$V_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = V_2^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + V_2^1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + V_2^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix},$$

$P(U, b)$ прибавляет последнему диагональному элементу матрицы P выражение b . Например,

$$P \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, b \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} + b \end{pmatrix}.$$

Анализируя (14) и (27), можно выявить следующие правила получения системы дифференциальных уравнения при аппроксимации произвольным количеством элементов.

1. Формирование матрицы K при \mathbf{T} для нетеплоизолированного случая.

Анализируя матрицу K для трех (14) и пяти узлов (27), можно выявить следующие правила определения элементов матрицы K для n элементов:

(а) — для одного элемента

$$K_1^{1q} = \frac{K_{xx}S}{6L} \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{hs} \end{pmatrix} + \frac{\pi rhl}{15} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= P \left(\frac{K_{xx}S}{6L} U_1 \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{pmatrix}, \text{hs} \right) + \frac{\pi rhl}{15} U_1 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -16 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

(б) — для двух элементов

$$K_{1,2}^{2q} = \frac{K_{xx}S}{6l} \begin{pmatrix} 14 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 16 & 32 & 16 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 28 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{hs} \end{pmatrix} + \frac{\pi rhl}{15} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= P \left(\frac{K_{xx}S}{6L} U_2 \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{pmatrix}, \text{hs} \right) + \frac{\pi rhl}{15} U_2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -16 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

(в) — для n элементов имеем

$$K_{1,2,\dots,n}^{nq} = P \left(\frac{K_{xx}S}{6L} U_n \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{pmatrix}, \text{hs} \right) + \frac{\pi rhl}{15} U_n \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -16 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

2. Формирование матрицы Н.

Анализируя матрицу Н для трех (14) и для пяти узлов (27), можно выявить следующие правила определения элементов матрицы Н для n элементов:

(а) — для одного элемента

$$H^1 = \frac{\lambda Sl}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda Sl}{15} U_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

(б) — для двух элементов:

$$H^2 = \frac{\lambda Sl}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 4 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda Sl}{15} U_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

(в) — для n элементов имеем

$$H^n = \frac{\lambda Sl}{15} U_n \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Формирование матрицы В.

Анализируя вектор В для трех (14) и для пяти узлов (27), можно выявить следующие правила определения элементов матрицы В для n элементов:

(а) — для одного элемента:

$$B_{13}^{1q} = \begin{pmatrix} -qS \\ 0 \\ hST_{\infty} \end{pmatrix} + \frac{\pi rhlT_{\infty}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{1q} + \frac{\pi rhlT_{\infty}}{3} V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(б) — для двух элементов

$$B_{1,2}^{2q} = \begin{pmatrix} -qS \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ hST_{\infty} \end{pmatrix} + \frac{\pi rhlT_{\infty}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{2q} + \frac{\pi rhlT_{\infty}}{3} V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(в) — для n элементов

$$B_{1,2,\dots,n}^{nq} = \begin{pmatrix} -qS \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ hST_{\infty} \end{pmatrix} + \frac{\pi rhlT_{\infty}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ \dots \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{nq} + \frac{\pi rhlT_{\infty}}{3} V_n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Некоторые элементы стержня теплоизолированы, а некоторые — нет при подаче постоянного потока тепла с левого конца стержня. Если не теплоизолированы элементы i_1, i_2, \dots, i_k , то имеем:

1. $H^n = \frac{\lambda S l}{15} U_n \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix};$
2. $K_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{nq} = P \left(\frac{K_{xx} S}{6L} \sum_{j=1}^k U_n^{i_j} \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{pmatrix}, hs \right) + \frac{\pi rhl}{15} \sum_{j=1}^k U_n^{i_j} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -16 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$
3. $B_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{nq} = B^{nq} + \frac{\pi rhlT_{\infty}}{3} \sum_{j=1}^k V_n^{i_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Для примера, когда теплоизолирован второй из двух элементов боковой поверхности стержня, получим следующие матрицы K и H , а также вектор \mathbf{B} системы (27):

$$K_1^{2q} = P \left(\frac{K_{xx} S}{6L} U_2^1 \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{pmatrix}, hs \right) + \frac{\pi rhl}{15} U_2^1 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -16 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{14K_{xx}S}{6l} + \frac{4\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{2K_{xx}S}{6l} + \frac{\pi rhl}{15} & 0 & 0 \\ -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{32K_{xx}S}{6l} + \frac{16\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & 0 & 0 \\ \frac{2K_{xx}S}{6l} + \frac{\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{28K_{xx}S}{6l} + \frac{4\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} & \frac{2K_{xx}S}{6l} \\ 0 & 0 & -\frac{16K_{xx}S}{6l} & \frac{32K_{xx}S}{6l} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} \\ 0 & 0 & \frac{2K_{xx}S}{6l} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} & \frac{14K_{xx}S}{6l} + hs \end{pmatrix},$$

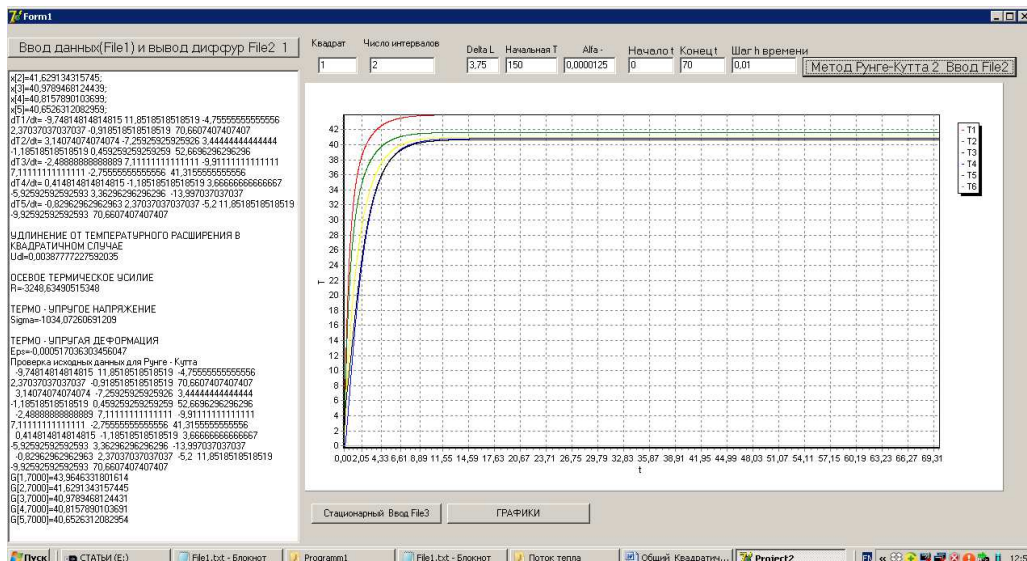


Рис. 5. Изменение температуры в пяти узлах для теплоизолированного второго элемента (слева приложен поток тепла $q = -150 \text{ Вт/см}^2$)

$$\mathbf{B}_1^{2q} = \mathbf{B}^{5q} + \frac{\pi r h l T_\infty}{3} V_2^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qS + \frac{\pi r h l T_\infty}{3} \\ \frac{4\pi r h l T_\infty}{3} \\ \frac{\pi r h l T_\infty}{3} \\ 0 \\ hS T_\infty \end{pmatrix}.$$

Подставляя исходные данные из табл. 1, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 843,75 & 421,875 & -210,9375 & 0 & 0 \\ 421,875 & 3375 & 421,875 & 0 & 0 \\ -210,9375 & 421,875 & 1687,75 & 421,875 & -210,9375 \\ 0 & 0 & 421,875 & 3375 & 421,875 \\ 0 & 0 & -210,9375 & 421,875 & 843,75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \\ \frac{dT_4}{dt} \\ \frac{dT_5}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6375 & -5437,5 & 468,75 & 0 & 0 \\ -5437,5 & 12000 & -5437,5 & 0 & 0 \\ 468,75 & -5437,5 & 11625 & -600 & 750 \\ 0 & 0 & -6000 & 12000 & -6000 \\ 0 & 0 & 750 & -6000 & 6375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73125 \\ 225000 \\ 56125 \\ 0 \\ 45000 \end{pmatrix}.$$

Решение этой задачи представлено на рис. 5.

Стационарным решением полученной системы является $T_1 = 43,96^\circ\text{C}$, $T_2 = 41,62^\circ\text{C}$, $T_3 = 40,97^\circ\text{C}$, $T_4 = 40,81^\circ\text{C}$ и $T_5 = 40,65^\circ\text{C}$. В случае теплоизоляции левой половины боковой поверхности стержня матрицы \mathbf{K} и \mathbf{H} , а также вектор \mathbf{B} системы (27) имеют вид:

$$\mathbf{K}_1^{2q} = P \left(\frac{K_{xx} S}{6L} U_2^2 \begin{pmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{pmatrix}, h_s \right) + \frac{\pi r h l}{15} U_2^2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -16 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{14K_{xx}S}{6l} & -\frac{16K_{xx}S}{6L} & \frac{2K_{xx}S}{6l} & 0 & 0 \\ -\frac{16K_{xx}S}{6l} & \frac{32K_{xx}S}{6L} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} & 0 & 0 \\ \frac{2K_{xx}S}{6l} & -\frac{16K_{xx}S}{6L} & \frac{28K_{xx}S}{6l} + \frac{4\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{2K_{xx}S}{6l} + \frac{\pi rhl}{15} \\ 0 & 0 & -\frac{16K_{xx}S}{6l} & \frac{32K_{xx}S}{6l} + \frac{16\pi rhl}{15} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} \\ 0 & 0 & \frac{2K_{xx}S}{6l} & -\frac{16K_{xx}S}{6l} + \frac{2\pi rhl}{15} & \frac{14K_{xx}S}{6l} + \frac{4\pi rhl}{15} + hs \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2^{2a} = \mathbf{B}^{2a} + \frac{\pi rhl T_\infty}{3} V_2^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qS \\ 0 \\ \frac{\pi rhl T_\infty}{3} \\ \frac{4\pi rhl T_\infty}{3} \\ hST_\infty + \frac{\pi rhl T_\infty}{3} \end{pmatrix}.$$

Подставляя исходные данные из табл. 1 получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 843,75 & 421,875 & -210,9375 & 0 & 0 \\ 421,875 & 3375 & 421,875 & 0 & 0 \\ -210,9375 & 421,875 & 1687,75 & 421,875 & -210,9375 \\ 0 & 0 & 421,875 & 3375 & 421,875 \\ 0 & 0 & -210,9375 & 421,875 & 843,75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \\ \frac{dT_4}{dt} \\ \frac{dT_5}{dt} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 6375 & -5437.5 & 468.75 & 0 & 0 \\ -5437.5 & 12000 & -5437.5 & 0 & 0 \\ 468.75 & -5437.5 & 11625 & -600 & 750 \\ 0 & 0 & -6000 & 12000 & -6000 \\ 0 & 0 & 750 & -6000 & 6375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73125 \\ 225000 \\ 56125 \\ 0 \\ 45000 \end{pmatrix},$$

Решение этой задачи представлено на рис. 6.

Стационарным решением полученной системы является $T_1 = 51,44^\circ C$, $T_2 = 47,69^\circ C$, $T_3 = 43,94^\circ C$, $T_4 = 41,59^\circ C$ и $T_5 = 40,91^\circ C$.

Сравнительный график стационарных решений для двух элементов, полученных путем использования описанных выше правил, представлен на рис. 7.

Заключение. Получены правила составления систем линейных дифференциальных уравнений для решения задачи распространения тепла в стержне при квадратичной аппроксимации, состоящей из любого количества узлов.

Список литературы

1. Лари Ж., Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Второе издание. М.: Мир, 1985.
2. Зенкевич О. С., Моран К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.



Кудайкулов Анарбай Кудайкулович — доктор физ.-мат. наук, проф., руководитель проекта Института информационных и вычислительных техно-

логий КН МОН РК, Алма-Ата, Республика Казахстан; тел. 87172383958; e-mail: KudaykulovAnarbay2006@mail.ru.

Кудайкулов Анарбай Кудайкулович окончил Ташкентский государственный универ-

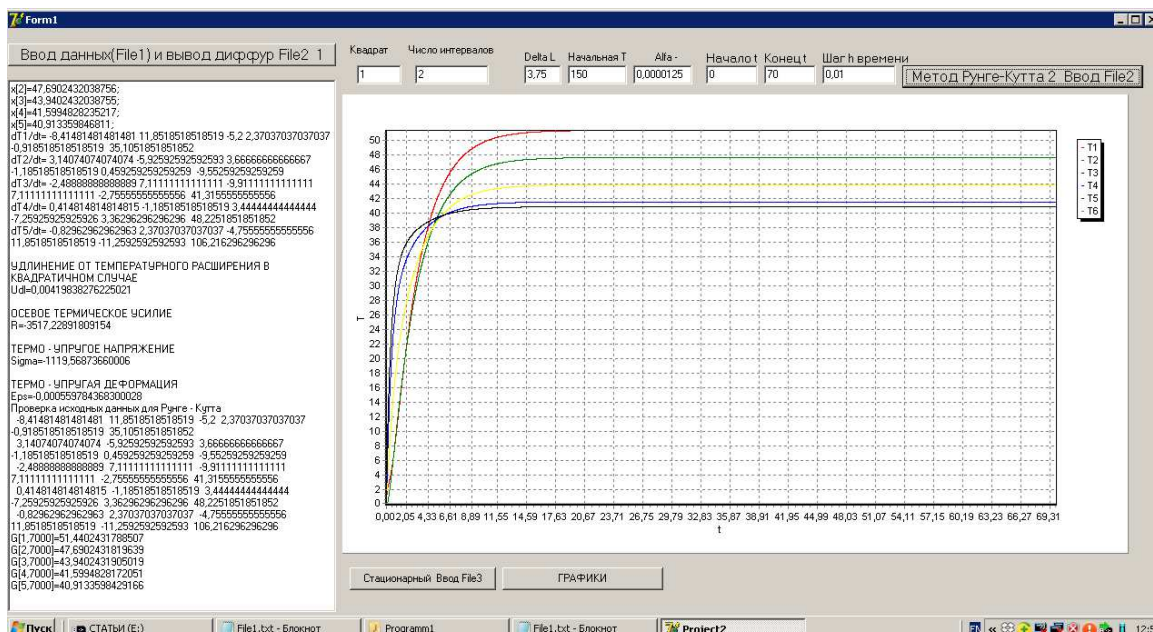


Рис. 6. Изменение температуры в пяти узлах для теплоизолированного первого элемента (слева приложен поток тепла $q = -150 \text{ Вт/см}^2$)

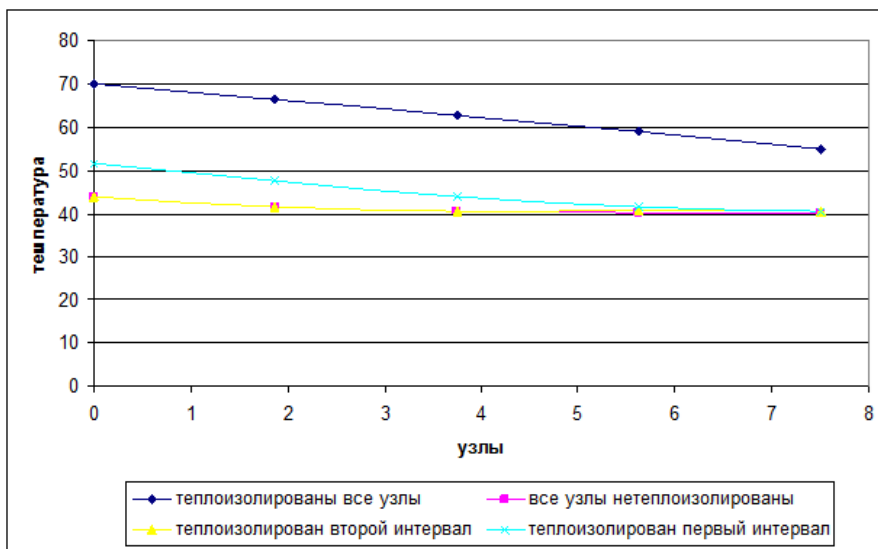


Рис. 7. Изменение температуры в узловых точках для различных способов теплоизоляции

ситет им. В. И. Ленина по специальности „Прикладная математика и механика“ в 1973 г. В 1979 г. защитил кандидатскую диссертацию в МГУ им. М. В. Ломоносова. В 1992 г. защитил докторскую по специальности 01.02.07 — „Механика сыпучих тел, грунтов и горных пород“ в Институте гидродинамики СО РАН. Доктор

физико-математических наук профессор, академик Международной академии информатизации, действительный член всемирного общества инженеров-нефтяников.

Известный ученый в области механики деформируемого твердого тела и геомеханики. Автор более 110 научных статей и 9 моногра-

фий, из которых 2 монографии изданы в Англии. Удостоен золотой медали имени академика Ж. С. Ержанова. Подготовил 13 кандидатов и 2 доктора наук. В 2009 году прошел научную стажировку в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СОРАН. Под руководством член-корреспондента РАН Б. Д. Аннина провел серию экспериментов по определению прочностных характеристик несущих элементов летательных аппаратов. Для АО „КазТрансОйл“ выполнил расчет на термпрочность несущих элементов нефтенагревательных установок. Совместно с АО НИИ „Каспиймунайгаз“ разработал проект обустройства нефтяных и нефтегазовых месторождений с учетом оптимальных режимов работы основных технологических агрегатов и конструкций, подготовки и транспортировки нефти, газа и пластовой воды.

Является членом объединенного (ИММаш, КазНУ) докторского диссертационного совета ОД 14А.01.08.

Kudaykulov Anarbay graduated from Tashkent State University named after V. I. Lenin by specialty „Applied Mathematics and Mechanics“ in 1973. In 1979 he defended master's thesis at the Moscow State University named after M. V. Lomonosov. In 1992 he defended doctorate by specialty 01.02.07 — „The mechanics of granular materials, soils and rocks“ in the Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Science. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, academician of the International Academy of Informatization, member of the World Society of Petroleum Engineers.

The famous scientist in the field of mechanics of a deformable solid body and geomechanics. The author more than 110 scientific articles and 9 monographs from which 2 monographs are published in England. It is awarded a gold medal of a name of the academician Zh. S. Erzhanov. He prepared 13 candidates and 2 doctors of science. In 2009 passed a scientific training in Institute of hydrodynamics of the academician M. A. Lavrentyev of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science. Under the leadership of the corresponding member of RAS B. D. Annin made a series of experiments by determination of strength characteristics of the bearing elements of

flight vehicles. For JSC KazTransOil he executed calculation on thermo-strength of the bearing elements of petro-heating installations. Together with JSC SRI Kaspiymunaygaz he developed the project of arrangement of oil and oil and gas fields taking into account optimum operating modes of the main technological aggregates and designs, preparation and oil transportation, gas and reservoir water.

He is a member of the united doctoral dissertation council D 14A.01.08. (IMES, KazNU).



Ташев Азат Арипович

— д-р техн. наук, проф., ведущ. науч. сотр. Института информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, Алма-Ата, Республика Казахстан; тел.: 87072272469; e-mail: azattash@mail.

Ташев Азат Арипович окончил факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института в 1975 году. В 1985 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности 05.13.02, а в 1995 году защитил докторскую по специальности 05.13.06 в НПО „Кибернетика“ с ВЦ АН УзССР. С 1975 года работал в области программирования. В 1985 году он стал зав. лабораторией НИИ „Алгоритм“ НПО „Кибернетика“ по проблемам исследования землетрясений, в настоящее время является главным научным сотрудником Института информационных и вычислительных технологий (Республика Казахстан, г. Алма-Ата).

Им опубликовано свыше 80 работ в таких областях, как распределение и перераспределение ресурсов в условиях неопределенности, экспертные системы, основанные на продукционных правилах и на нечетких множествах, сейсмологии, параллельное вычисление, облачная технология, программирование. Его текущие исследовательские интересы включают технологии параллельных вычислений, языки программирования, включая параллельное, экспертные системы, оптимальное распределение и перераспределение ресурсов. В данное время основным проектом А. А. Ташева является исследование термофизических характери-

стик различных материалов и программирование.

Tashev Azat graduated the Faculty of Management and Applied Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology in 1975. In 1985 he defended master's thesis by specialty 05.13.02, and in 1995 he defended his doctoral by specialty 05.13.06 in SIA „Cybernetics“ with CS AS UzSSR. Since 1975, he worked in the field of programming. In 1985 he became head of laboratory of the Research Institute „Algorithm“ SIA „Cybernetics“ research on the problems of earthquakes, is currently the chief researcher at the Institute of Information

and Computational Technologies (Republic of Kazakhstan, Almaty). He has published over 80 papers in the areas of distribution and redistribution of resources in the face of uncertainty, expert systems based on production rules and fuzzy sets, seismology, parallel computing, cloud technology, programming. His current research interests include parallel computing technologies, programming languages, including parallel, expert systems, optimal distribution and redistribution of resources. At this time, the main project of A. Tashev is the study of thermophysical characteristics of different materials and programming.

Дата поступления — 26.08.2016