# ASIMPTOTIC ANALYSIS OF TWO-PHASE RETRIAL QUEUING SYSTEM M/M/1 UNDER DELAY CONDITION OF ORBIT

A. A. Nazarov, A. A. Anisimova

Tomsk State University,
634050, Tomsk, Russia

In this paper, we consider a M/M/1 retrial queuing system with two phases of essential service. Customers arrive at the system according to a Poisson process with arrival rate $\lambda$. Service times follow an exponential distribution with parameters $\mu_1$ and $\mu_2$ for the first and the second phase respectively. If a customer finds the server free, it is served immediately; otherwise the customer joins the orbit. Customers in an orbit come back to be served after intervals of time exponentially generated with parameters $\sigma_1$ and $\sigma_2$ for the first and the second phase respectively. If the server is free, it will receive the service; otherwise it will be re-inserted into the orbit. Each phase includes one server and one orbit. The aim of this paper is to obtain the mean values of the number of customers in the orbits using the asymptotic analysis method under delay condition of orbit. The results of asymptotic analysis and the results of simulation are compared.

**Key words:** retrial queuing system, two-phase system, Poisson process, delays condition of orbit.

## References

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. *Retrial Queuing Systems: A Computational Approach.* Berlin, Springer, 2008.

2. Falin G. I., Templeton J. G. C. *Retrial queues.* London, Chapman & Hall, 1997.

3 Gnedenko B. V., Kovalenko I. N. *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to Queuing Theory]. Moscow, Nauka, Gl. red. fiz.-mat.lit., 1987.

4. Krishna C. M. and Lee Y. H. *A study of two-phase service.* Operations Research Letters, 1990, Vol. 9. P. 91–97.

5. Doshi, B. T. *Analysis of a two phase queuing system with general service times* // Operations Research Letters. 1991. Vol. 10. P. 265–272.

6. Krishnakumar B. and Arivudainambi D. *An M/G/1 retrial queuing system with two phases of services and preemptive resume* // Annals of Operations Research. 2002. Vol. 113. P. 61–79.

7. Choudhury G. *A single server queuing system with two-phases of service and vacations.* // QTQM. 2008. Vol. 5 (1). P. 33–49.

8. Nazarov A. A., Sudyko E. A. *Method of asymptotic semi invariants for studying a mathematical model of a random access network* // Problems of information transmission. 2010. Vol. 46. N 1. P. 86–102.

9. Anisimova A. A. *Imitatsionnoe modelirovanie dvukhfaznoi RQ-sistemy* [Simulation modeling of two-phase retrial queuing system] // Nauchnoe tvorchestvo molodezhi. Matematika. Informatika: materialy XX Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii (28–29 aprelya 2016 g.), sost . Y. A. Naumkina. Tomsk, Izd-vo Tom. un-ta, 2016, Part 1, P. 81–85.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДВУХФАЗНОЙ RQ-СИСТЕМЫ M/M/1 В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАДЕРЖКИ В ИСТОЧНИКАХ ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ

А. А. Назаров, А. А. Анисимова

Национальный исследовательский Томский государственный университет
634050, Томск, Россия

УДК 519.872

В данной статье рассматривается двухфазная система массового обслуживания следующего вида. На вход системы поступает простейший входящий поток заявок, которые последовательно проходят две фазы. Каждая фаза содержит один обслуживающий прибор и один источник повторных вызовов (ИПВ), куда отправляется заявка, если застает прибор занятым. Приборы на обеих фазах обрабатывают заявку в течение экспоненциально распределенного промежутка времени. Находясь в ИПВ, заявка через экспоненциально распределенные промежутки времени делает попытки вновь встать на обслуживание. После обслуживания на второй фазе заявка считается обработанной и покидает систему. Целью данной работы является исследование числа заявок в ИПВ на обеих фазах. Исследование проводится методом асимптотического анализа в условии большой задержки в ИПВ. Получены семиинварианты первого порядка и проведено сравнение с результатами имитационной модели.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, RQ-система, источник повторных вызовов.

**Введение.** С середины XX века все большую роль стали играть телекоммуникационные системы: компьютерные и телефонные сети, системы передачи данных, радио, телевидение, мобильная связь и другие. Такие системы подходят под определение систем массового обслуживания [1]: они предназначены для удовлетворения массовых запросов на выполнение каких-либо услуг. Однако, в отличие от классических систем массового обслуживания, для телекоммуникационных систем характерна ситуация, при которой заявка, заставшая обслуживающий прибор занятым, не встает в очередь, а уходит в источник повторных вызовов (ИПВ), откуда через некоторые промежутки времени предпринимает попытки вновь обратиться за обслуживанием. Такие модели описываются в виде систем массового обслуживания с повторными вызовами или RQ-систем (Retrial queuing system) [2, 3].

В данной работе исследуется RQ-система M/M/1 с двумя фазами, каждая из которых содержит один обслуживающий прибор и ИПВ. Впервые двухфазные RQ-системы были рассмотрены C. M. Krishna и Y. H. Lee [4]. Также их анализом занимались B. T. Doshi [5], B. Krishnakumar [6], G. Choudhury [7] и другие.

**1. Постановка задачи**. Рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший входящий поток интенсивности $\lambda$. Каждая заявка проходит последовательно 2 фазы.

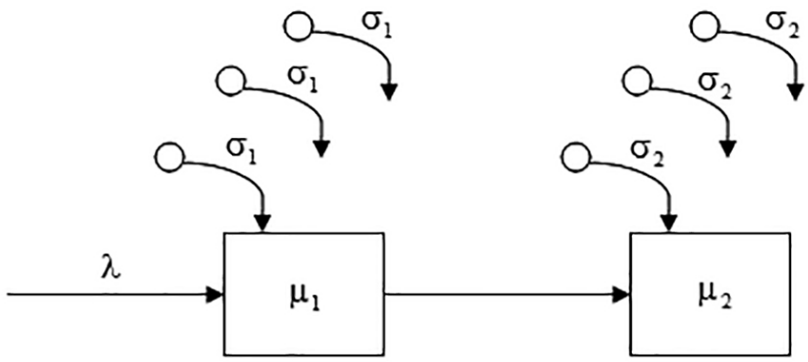


Рис. 1. Модель двухфазной RQ-системы

Продолжительность обслуживания на обеих фазах имеет экспоненциальное распределение с параметрами $\mu_1$ и $\mu_2$ соответственно. Если на очередной фазе заявка застает прибор занятым, она отправляется в соответствующий ИПВ, откуда через случайные моменты времени, имеющие экспоненциальное распределение с параметрами $\sigma_1$ и $\sigma_2$, делает попытки вновь обратиться за обслуживанием. После завершения обслуживания на второй фазе заявка считается обработанной и покидает систему (рис. 1).

Обозначим через $\left\{ i_j(t), j=\overline{1,2} \right\}$ число заявок в ИПВ, соответствующее $j$-ой фазе, в момент времени $t$. Процессы $\left\{ i_j(t), j=\overline{1,2} \right\}$ не являются марковскими, поэтому введем дополнительную переменную:

$$\left\{ k_j(t), j=\overline{1,2} \right\} = \begin{cases} 0, \text{прибор на } j\text{-й фазе свободен}, \\ 1, \text{прибор на } j\text{-й фазе занят}. \end{cases}$$

Пусть $P_{k1k2}(i_1,i_2,t) = P\left\{ k_1(t)=k_1, k_2(t)=k_2, i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2 \right\}$ — вероятность того, что в системе в момент времени $t$ при условии, что приборы на обеих фазах находятся в состояниях $k_1$ и $k_2$ соответственно, в ИПВ на первой и второй фазе содержится $i_1$ и $i_2$ заявок. В данной статье мы будем рассматривать систему в стационарном режиме, при котором $\lim\limits_{t\to\infty} P_{k1k2}(i_1,i_2,t) = P_{k1k2}(i_1,i_2)$.

Очевидно, что процесс $\left\{ i_j(t), j=\overline{1,2},\ \ k_j(t), j=\overline{1,2} \right\}$ является марковским. Для получения распределений вероятностей $P_{k1k2}(i_1,i_2)$ составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} -(\lambda+i_1\sigma_1+i_2\sigma_2)P_{00}(i_1,i_2)+\mu_2P_{01}(i_1,i_2)=0, \\ \lambda P_{10}(i_1-1,i_2)+\lambda P_{00}(i_1,i_2)+\sigma_1(i_1+1)P_{00}(i_1+1,i_2)-(\lambda+\mu_1+i_2\sigma_2)P_{10}(i_1,i_2)+ \\ \qquad +\mu_2P_{11}(i_1,i_2)=0, \\ \mu_1P_{01}(i_1,i_2)+\mu_1P_{11}(i_1,i_2-1)+\sigma_2(i_2+1)P_{00}(i_1,i_2)-(\lambda+\mu_2+i_1\sigma_1)P_{01}(i_1,i_2)=0, \\ \lambda P_{11}(i_1-1,i_2)+\lambda P_{01}(i_1,i_2)+\sigma_1(i_1+1)P_{01}(i_1+1,i_2)+\sigma_2(i_2+1)P_{10}(i_1,i_2+1)- \\ \qquad -(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{11}(i_1,i_2)=0. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) перейдем к частичным характеристическим функциям:

$$H_{k1k2}(u_1,u_2)=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\exp\{j(u_1i_1+u_2i_2)\}P_{k1k2}(i_1,i_2),$$

где $j=\sqrt{-1}$ — мнимая единица. Тогда система уравнений (1) для характеристических функций перепишется в виде:

$$\begin{cases} -\lambda H_{00}(u_1,u_2)-\dfrac{1}{j}\sigma_1\dfrac{\partial H_{00}(u_1,u_2)}{\partial u_1}-\dfrac{1}{j}\sigma_2\dfrac{\partial H_{00}(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\mu_2H_{01}(u_1,u_2)=0,\\[2ex] \lambda e^{ju_1}H_{10}(u_1,u_2)+\lambda H_{00}(u_1,u_2)+\dfrac{1}{j}\sigma_1e^{-ju_1}\dfrac{\partial H_{00}(u_1,u_2)}{\partial u_1}-(\lambda+\mu_1)H_{10}(u_1,u_2)-\\ \qquad -\dfrac{1}{j}\sigma_2\dfrac{\partial H_{10}(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\mu_2H_{11}(u_1,u_2)=0,\\[2ex] \mu_1H_{10}(u_1,u_2)+\mu_1e^{ju_2}H_{11}(u_1,u_2)+\dfrac{1}{j}\sigma_2e^{-ju_2}\dfrac{\partial H_{00}(u_1,u_2)}{\partial u_2}-(\lambda+\mu_2)\,H_{01}(u_1,u_2)-\\ \qquad -\dfrac{1}{j}\sigma_1\dfrac{\partial H_{01}(u_1,u_2)}{\partial u_1}=0,\\[2ex] \lambda e^{ju_1}H_{11}(u_1,u_2)+\lambda H_{01}(u_1,u_2)+\dfrac{1}{j}\sigma_1e^{-ju_1}\dfrac{\partial H_{01}(u_1,u_2)}{\partial u_1}+\dfrac{1}{j}\sigma_2e^{-ju_2}\dfrac{\partial H_{10}(u_1,u_2)}{\partial u_2}-\\ \qquad -(\lambda+\mu_1+\mu_2)H_{11}(u_1,u_2)=0. \end{cases} \tag{2}$$

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа [8] в условии большой задержки в ИПВ, характеризующегося тем, что $\sigma_1,\sigma_2\to 0$.

**2. Асимптотика первого порядка**. В соответствии с условием большой задержки в ИПВ, обозначим $\sigma_k=\gamma_k\sigma$, $\sigma\to 0$. В системе (2) выполним замены:

$$\sigma=\varepsilon,\quad u_k=\varepsilon w_k,\quad H_{k1k2}(u_1,u_2)=F_{k1k2}(w_1,w_2,\varepsilon). \tag{3}$$

Получим:

$$\begin{cases} -\lambda F_{00}(w_1,w_2,\varepsilon)-\dfrac{1}{j}\gamma_1\dfrac{\partial F_{00}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}-\dfrac{1}{j}\gamma_2\dfrac{\partial F_{00}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+\mu_2F_{01}(w_1,w_2,\varepsilon)=0,\\[2ex] \lambda e^{j\varepsilon w_1}F_{10}(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda F_{00}(w_1,w_2,\varepsilon)+\dfrac{1}{j}\gamma_1e^{-j\varepsilon w_1}\dfrac{\partial F_{00}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}-\\ \qquad -(\lambda+\mu_1)F_{10}(w_1,w_2,\varepsilon)-\dfrac{1}{j}\gamma_2\dfrac{\partial F_{10}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+\mu_2F_{11}(w_1,w_2,\varepsilon)=0,\\[2ex] \mu_1F_{10}(w_1,w_2,\varepsilon)+\mu_1e^{j\varepsilon w_2}F_{11}(w_1,w_2,\varepsilon)+\dfrac{1}{j}\gamma_2e^{-j\varepsilon w_2}\dfrac{\partial F_{00}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}-\\ \qquad -(\lambda+\mu_2)\,F_{01}(w_1,w_2,\varepsilon)-\dfrac{1}{j}\gamma_1\dfrac{\partial F_{01}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}=0,\\[2ex] \lambda e^{j\varepsilon w_1}F_{11}(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda F_{01}(w_1,w_2,\varepsilon)+\dfrac{1}{j}\gamma_1e^{-j\varepsilon w_1}\dfrac{\partial F_{01}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}+\\ \qquad +\dfrac{1}{j}\gamma_2e^{-j\varepsilon w_2}\dfrac{\partial F_{10}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\,F_{11}(w_1,w_2,\varepsilon)=0. \end{cases} \tag{4}$$

*Теорема* 1. Если существуют пределы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_{k1k2}(w_1,w_2,\varepsilon)=F_{k1k2}(w_1,w_2)$, то

$$F_{k1k2}(w_1,w_2) = R_{k1k2} e^{j(w_1 a_1 + w_2 a_2)}, \tag{5}$$

где $\{R_{k1k2}, k1, k2 = \overline{1,2}\}$ — стационарные вероятности значений цепи Маркова $\left\{k_j(t), j = \overline{1,2}\right\}$, определяемые уравнением (9), а величины $a_1$ и $a_2$ определяются из системы (13).

*Доказательство.* Пусть $F_{k1k2}(w_1,w_2) = R_{k1k2}\Phi\left(w_1,w_2\right)$. Тогда после предельного перехода $\varepsilon \to 0$ система (4) запишется в виде:

$$\begin{cases} -\lambda R_{00}\Phi(w_1,w_2) - \dfrac{1}{j}\gamma_1 R_{00}\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_1} - \dfrac{1}{j}\gamma_2 R_{00}\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial} w_2 + \\ \qquad + \mu_2 R_{01}\Phi(w_1,w_2) = 0, \\ \\ \lambda R_{10}\Phi(w_1,w_2) + \lambda R_{00}\Phi(w_1,w_2) + \dfrac{1}{j}\gamma_1 R_{00}\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_1} - (\lambda+\mu_1)R_{10}\Phi(w_1,w_2) - \\ \qquad - \dfrac{1}{j}\gamma_2 R_{10}\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_2} + \mu_2 R_{11}\Phi(w_1,w_2) = 0, \\ \\ \mu_1 R_{10}\Phi(w_1,w_2) + \mu_1 R_{11}\Phi(w_1,w_2) + \dfrac{1}{j}\gamma_2 R_{00}\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_2} - \\ \qquad - \left(\lambda+\mu_2\right)R_{01}\Phi(w_1,w_2) - \dfrac{1}{j}\gamma_1 R_{01}\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_1} = 0, \\ \\ \lambda R_{11}\Phi(w_1,w_2) + \lambda R_{01}\Phi(w_1,w_2) + \dfrac{1}{j}\gamma_1 R_{01}\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_1} + \dfrac{1}{j}\gamma_2 R_{10}\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_2} - \\ \qquad - \left(\lambda+\mu_1+\mu_2\right)R_{11}\Phi(w_1,w_2) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Чтобы избавиться от производных $\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_1}$ и $\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_2}$, положим $\Phi\left(w_1,w_2\right) = e^{j(w_1 a_1 + w_2 a_2)}$, откуда $\dfrac{\partial \Phi(w_1,w_2)}{\partial w_k} \Big/ \Phi\left(w_1,w_2\right) = j a_k$. Тогда после сокращения системы (6) на $\Phi\left(w_1,w_2\right)$ получаем:

$$\begin{cases} -\lambda R_{00} - \gamma_1 a_1 R_{00} - \gamma_2 a_2 R_{00} + \mu_2 R_{01} = 0, \\ \lambda R_{10} + \lambda R_{00} + \gamma_1 a_1 R_{00} - (\lambda+\mu_1)R_{10} - \gamma_2 a_2 R_{10} + \mu_2 R_{11} = 0, \\ \mu_1 R_{10} + \mu_1 R_{11} + \gamma_2 a_2 R_{00} - \left(\lambda+\mu_2\right)R_{01} - \gamma_1 a_1 R_{01} = 0, \\ \lambda R_{11} + \lambda R_{01} + \gamma_1 a_1 R_{01} + \gamma_2 a_2 R_{10} - \left(\lambda+\mu_1+\mu_2\right)R_{11} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

С учетом условия нормировки $R_{00} + R_{01} + R_{10} + R_{11} = 1$, запишем систему (7) в матричном виде:

$$\begin{cases} RM = 0, \\ RE = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $R = \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{10} & R_{11} \end{pmatrix}$, $E$ — единичный вектор-столбец, а матрица $M$ представима в виде:

$$M = \begin{pmatrix} -\left(\lambda+\gamma_1 a_1+\gamma_2 a_2\right) & \lambda+\gamma_1 a_1 & \gamma_2 a_2 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda+\mu_2+\gamma_1 a_1) & \lambda+\gamma_1 a_1 \\ 0 & -(\mu_1+\gamma_2 a_2) & \mu_1 & \gamma_2 a_2 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) \end{pmatrix}.$$

Введя обозначения $\overline{M} = (M\,|E)$, $v = \left(E^T 0\,|1\right)$, перепишем систему (8) в виде:

$$R\overline{M} = v,$$

откуда уравнение для стационарного распределения значений цепи Маркова $\left\{k_j(t), j=\overline{1,2}\right\}$ имеет вид:

$$R = \left(v\overline{M}\right)^T (\overline{M}\overline{M}^T)^{-1}. \tag{9}$$

Здесь $R = R(a_1,a_2)$. Для нахождения $a_1$ и $a_2$ просуммируем уравнения системы (4) и после сокращений получим:

$$\lambda\left(e^{j\varepsilon w_1}-1\right)F_{10}(w_1,w_2,\varepsilon)+\mu_1\left(e^{j\varepsilon w_2}-1\right)F_{11}(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda\left(e^{j\varepsilon w_1}-1\right)F_{11}(w_1,w_2,\varepsilon)+$$
$$+\frac{\gamma_1}{j}\left(e^{j\varepsilon w_1}-1\right)\frac{\partial F_{00}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}+\frac{\gamma_2}{j}\left(e^{-j\varepsilon w_2}-1\right)\frac{\partial F_{00}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+$$
$$+\frac{\gamma_2}{j}\left(e^{-j\varepsilon w_2}-1\right)\frac{\partial F_{10}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+\frac{\gamma_1}{j}\left(e^{j\varepsilon w_1}-1\right)\frac{\partial F_{01}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}=0. \tag{10}$$

Поделив уравнение (10) на $\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ и учитывая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(e^{\pm j\varepsilon w_k}-1\right)=\pm j w_k,$$

получим уравнение:

$$\lambda j w_1 F_{10}(w_1,w_2)+\mu_1 j w_2 F_{11}(w_1,w_2)+\lambda j w_1 F_{11}(w_1,w_2)+\gamma_1 w_1\frac{\partial F_{00}(w_1,w_2)}{\partial w_1}+$$
$$+\gamma_2 w_2\frac{\partial F_{00}(w_1,w_2)}{\partial w_2}+\gamma_2 w_2\frac{\partial F_{10}(w_1,w_2)}{\partial w_2}+\gamma_1 w_1\frac{\partial F_{01}(w_1,w_2)}{\partial w_1}=0. \tag{11}$$

Приравнивая коэффициенты при $w_1$ и $w_2$, получим систему:

$$\begin{cases} \lambda j F_{10}(w_1,w_2)+\lambda j F_{11}(w_1,w_2)-\gamma_1\dfrac{\partial F_{00}(w_1,w_2)}{\partial w_1}-\gamma_1\dfrac{\partial F_{01}(w_1,w_2)}{\partial w_1}=0, \\ \\ \mu_1 j F_{11}(w_1,w_2)-\gamma_2\dfrac{\partial F_{00}(w_1,w_2)}{\partial w_2}-\gamma_2\dfrac{\partial F_{10}(w_1,w_2)}{\partial w_2}=0. \end{cases} \tag{12}$$

Поделив систему (12) на $j$ и используя представление (5) для функций $F_{k1k2}(w_1,w_2)$, получим систему уравнений для нахождения $a_1$ и $a_2$:

$$\begin{cases} \lambda R_{10}(a_1,a_2)+\lambda R_{11}(a_1,a_2)-\gamma_1 a_1 R_{00}(a_1,a_2)-\gamma_1 a_1 R_{01}(a_1,a_2)=0, \\ \mu_1 R_{11}(a_1,a_2)-\gamma_2 a_2 R_{00}(a_1,a_2)-\gamma_2 a_2 R_{10}(a_1,a_2)=0. \end{cases} \tag{13}$$

В силу замены (3) и равенства (5) можно записать:

*Таблица 1*

Сравнение асимптотических семиинвариант с результатами имитационного моделирования

| $\sigma$ | Асимптотические семиинварианты | | Результаты имитационного моделирования | | $\left\lvert\dfrac{a_1}{\sigma}-\overline{m_1}\right\rvert$ | $\left\lvert\dfrac{a_2}{\sigma}-\overline{m_2}\right\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1/\sigma$ | $a_2/\sigma$ | $\overline{m_1}$ | $\overline{m_2}$ | | |
| 0,100 | 5 | 0,828 | 5,479 | 1,190 | 0,479 | 0,362 |
| 0,010 | 50 | 8,284 | 49,728 | 8,175 | 0,272 | 0,109 |
| 0,001 | 500 | 82,823 | 481,340 | 79,010 | 18,660 | 3,813 |

$$H_{k1k2}(u_1,u_2)=F_{k1k2}(w_1,w_2,\varepsilon)\approx R_{k1k2}\exp\left\{\frac{j}{\varepsilon}(u_1a_1+u_2a_2)\right\}.$$

Отсюда безусловная характеристическая функция $Me^{j(u_1i_1+u_2i_2)}$ процессов $\left\{i_j(t),j=\overline{1,2}\right\}$ имеет вид:

$$Me^{j(u_1i_1+u_2i_2)}=\sum_{k1}\sum_{k2}H_{k1k2}(u_1,u_2)\approx\exp\left\{\frac{j}{\sigma}(u_1a_1+u_2a_2)\right\},$$

следовательно, двумерный процесс $\left\{i_j(t),j=\overline{1,2}\right\}$ числа заявок в ИПВ обеих фаз имеет асимптотически нормальное распределение. Величины $\frac{a_1}{\sigma}$ и $\frac{a_2}{\sigma}$, которые определяют асимптотические средние значения числа заявок в источниках повторных вызовов, будем называть асимптотическими семиинвариантами первого порядка.

**3. Результаты имитационного моделирования**. В данном разделе проводится сравнение полученных асимптотических семиинвариант первого порядка с результатами имитационного моделирования для математических ожиданий числа заявок в ИПВ при $\sigma\to 0$. Оценки математических ожиданий определяются по формуле $\overline{m_k}=\dfrac{1}{T}\sum_{i=0}^{n_k}T_i^k$, где $n_k$ — общее число заявок в ИПВ на $k$-й фазе, $T_i^k$ — период времени, в течение которого в ИПВ на $k$-й фазе находилось $i$ заявок, и $T$ – полное время моделирования. Моделирование проводилось при числе заявок во входящем потоке, равном 100000.

Покажем отклонение значений семиинвариантов первого порядка, полученных с помощью метода асимптотического анализа от эмпирических оценок математических ожиданий числа заявок в ИПВ при заданных значениях параметров: $\lambda=0{,}5$, $\mu_1=\mu_2=1$, $\gamma_1=1$, $\gamma_2=5$ (табл. 1).

Из таблицы 1 видно, что при уменьшении $\sigma$ повышается точность аппроксимации, но при $\sigma=0{,}001$ результаты моделирования оказались хуже, чем при больших значениях $\sigma$. Это связано с тем, что системе не хватило 100000 заявок во входящем потоке для сбора всей необходимой информации, поэтому число заявок в этом случае следует увеличить.

**Заключение**. В настоящей работе исследована двухфазная RQ-система M|M|1 и найдены моменты первого порядка для числа заявок в ИПВ. Результаты имитационного моделирования подтверждают теоретические значения числовых характеристик.

## Список литературы

1. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд., перераб. и доп. // Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

2. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008.

3. Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997.

4. Krishna C. M. and Lee Y. H. A study of two-phase service // Operations Research Letters. 1990. Vol. 9. P. 91–97.

5. Doshi B. T. Analysis of a two phase queueing system with general service times // Operations Research Letters. 1991. Vol. 10. P. 265–272.

6. B. Krishnakumar and D. Arivudainambi. An M/G/1 retrial queueing system with two phases of services and preemptive resume // Annals of Operations Research. 2002. Vol. 113. P. 61–79.

7. Choudhury G. A single server queueing system with two-phases of service and vacations // QTQM. 2008. Vol. 5 (1). P. 33–49.

8. Nazarov A. A., Sudyko E. A. Method of asymptotic semiinvariants for studying a mathematical model of a random access network // Problems of information transmission. 2010. Vol. 46, N 1. P. 86–102.

**Nazarov A. A.,** Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Department, e-mail: `nazarov.tsu@gmail.com`.

Анатолий Назаров в 1970 г. окончил механико-математический факультет Томского государственного университета по специальности „Математика“. В 1976 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, посвященную вопросам оптимального управления в системах массового обслуживания. С 1976 г. по 1980 г. работал в Кемеровском государственном университете. С 1980 г. — доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. В 1985 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. С 1988 г. — профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики. С 1999 г. — заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики. Является известным специалистом в области теории телетрафика и массового обслуживания, а также одним из основных разработчиков методов асимптотического анализа в теории массового обслуживания, метода просеянного потока и метода предельной декомпозиции, широко используемых при исследованиях математических моделей телекоммуникационных систем в теории телетрафика и массового обслуживания. Опубликовал (в соавторстве) 6 монографий и 2 методических пособия. Им опубликовано более четырехсот научных работ, из которых более 150 входят в РИНЦ и более 70 — в Scopus.

Anatoly Nazarov received M. D. degree in Mathematics at Tomsk State University in 1970, Ph. D. degree in physical-mathematical sciences in 1976. His thesis was on optimal control of queuing systems. He worked at Kemerovo State University from 1976 to 1980. He was Associate Professor of Probability Theory and Mathematical Statistics Department at the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics at Tomsk State University from 1980 to 1985. Since 1985, he has been a Professor. He received Doctor of Science degree in 1985. He has been the Head of the Department of Probability theory and Mathematical Statistics since 1999. He is a well-known specialist in teletraffic theory and queuing theory. He is also one of the developers of the method of asymptotic analysis in queuing theory, the dynamic screening method and the limit decomposition method, which are widely used in studying mathematical models of telecommunication systems in teletraffic theory and queuing theory. He published 6 monographies jointly with other professors. He published over

400 papers; about 150 papers are included in Russian Science Citation Index and about 70 papers — in Scopus.

**Anisimova A. A.**, BA (Economics), Student, e-mail: `siberienne94@yandex.ru`.

Анна Анисимова в 2016 году окончила бакалавриат факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета по специальности „Экономика“. В данный момент обучается в магистратуре по направлению „Прикладная математика и информатика“. Ею опубликованы статьи на тему имитационного моделирования и теории массового обслуживания.

Anna Anisimova received her Bachelor degree in Economics at Tomsk State University in 2016. Now she is a Master's Degree student at the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics. She published papers in the areas of simulation modeling and queuing theory.

*Дата поступления — 14.01.2017*