INTRODUCTION TO SUBDEFINITION

A. S. Narinyani

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
630090, Novosibirsk, Russia

Subdefinite models (S-models) are a new theory and technology of efficient solution of a wide range of problems from applied calculations to processing knowledge and problems of artificial intelligence. S-models refers to the direction of constraint programming, actively developed the last time in the world, as one of the most promising in IT. S-models qualitatively extends the possibilities of working with information and computational models of increased complexity, allowing to significantly simplify the process of creating next-generation systems and technologies, in particular in such areas as economics, management, complex objects and production processes management, engineering calculations and many others. S-models allow you to actively interact with the entire solution space, which in principle exceed the capabilities of traditional algorithmic methods and provide a qualitative leap in solving key problems in the development of modern information technologies.

Key words: computational models, constraint programming, method of subdefinite models, artificial intelligence, knowledge representation, NE-factors.

References

1. Narinyani A.S. Nedoopredelennost v sistemakh predstavleniia i obrabotki znaniy // *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, 1986. N 5. S. 3–28.

2. Narinyani A.S. Model‘ ili algoritm: novaia paradigma informatcionnoi tekhnologii // Informatcionny‘e tekhnologii. N 4. 1997.

3. Narinyani A.S. Telerman V.V., Ushakov D.M., Shvetcov I.E. Programmirovanie v ogranicheniiakh i nedoopredelennye modeli // Informatcionnye tekhnologii. N 7. 1998.

4. Narinyani A.S. NE-faktory: kratkoe vvedenie // Novosti II. 2004. N 2.

5. Narinyani A.S. Nedoopredelennye mnozhestva — novyi tip dannykh dlia predstavleniia znanii. Novosibirsk, 1980. (*Prepr./AN SSSR. Sib. otd-nie. VTC; N 232*).

6. Narinyani A.S. Nedoopredelennye modeli i operatcii s nedoopredelennymi znacheniiami. Novosibirsk, 1982. (*Prepr./ AN SSSR. Sib. otd-nie VTC; N 400*).

7. Dmitriev V.E. UniCalc — intellektualnyi reshatel sistem algebraicheskikh uravneniy i neravenstv // Iskusstvennyi intellekt-90: Tr. 12 Vsesoiuznoy konferentcii. Minsk, 1990.

8. Semenov A.L., Leshchenko A.S. Interval and Symbolic Computations in the UniCalc Solver // *Inter. Conf. on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering (INTERVAL-94):* Abstracts. St-Petersburg, Russia, 1994. P. 206–208.

9. Shvetsov I., Kornienko V., Preis S. Interval spreadsheet for problems of financial planning. PACT‘97, England, London, April 1997.

10. Borde S.B. Time-EX — intellektualnaya sistema planirovaniya vremeni // Intellektualnye sistemy v mashinostroenii: Tez. Docl. Vsesoiuz. Nauchno-tekh. konf. Sektciia: Intellektualnye proizvodstvennye sistemy. Samara, 1991. Ch. 1. S. 79–81.

11. Banasiukevich D.V., Gofman I.D., Inishev D.A., Narinyani A.S. Intellektualnaia tekhnologiia nedoopredelennogo planirovaniia i upravleniia proektami Time-EX // Trudy II-oi mezhdunarodnoi konferentcii CSCMP-2000, Samara, 2000.

12. Iurtaev A. V. Nedoopredelennye modeli — netraditcionniy podhod k matematicheskim issledovaniiam ekonomiki // Informatcionnye tekhnologii. 1999. N 4. S. 36–41.

13. Napreenko V. G., Narinyani A. S., i dr. Modelirovanie natcionalnoi ekonomiki s ispolzovaniem apparata nedoopredelennykh modelei // V sbornike „Problemy upravleniia i modelirovaniia v slozhnykh sistemakh“. Trudy II Mezhdunarodnoi konferentcii. Samarskii nauchnyi centr RAN, Samara 2000.

14. Alefeld G., KHertcberger Iu. Vvedenie v intervalnye vychisleniia. M.: Mir, 1987.

15. Montanari U. Networ*k*s of Constraints: Fundamental Properties and Applications to Picture Processing // *Inform. Sci.* V. 7, 1974. P. 95–132.

16. Narinyani A. S. Model ili algoritm: novaia paradigma informatcionnoi tekhnologii // Informatcionnye tekhnologii, 1997. N 4.

17. Colmerauer A. An introduction to Prolog III // *Communications of the ACM*, N 33 (7). July 1990. P. 69–90.

18. Jaffar J., Michayov S., Stuc*k*ey P., Yap R. The CLP(R) language and system // *ACM Transactions on Programming Languages and Systems.* N 14 (3), July 1992. P. 339–395.

19. Benhamou F., Older W.J. Applying Interval Arithmetic to Real, Integer and Boolean Constraints // *Journal of Logic Programming*, 32 (1), 1997. P. 1–24.

20. Diaz D., Codognet P. A minimal extension of the WAM for clp (FD) // *Proceedings of the 10th International Conference on Logic Programming*, 1993. P. 774–790.

21. Van Hentenryc*k* P. Constraint Satisfaction in Logic Programming. *Logic Programming Series.* MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

22. Puget J.-F.. A C++ Implementation of CLP. *Tech. Report*, Ilog, January 1994.

23. Benhamou F., McAllester D., Van Hentenryc*k* P. CLP(Intervals) Revisited // *Proceedings of ILPS'94*, Ithaca, NY, 1994. P. 124–138.

24. Telerman V. V., Ushakov D. M. Nedoopredelennye modeli: formalizatciia podhoda i perspektivy razvitiia // *Problemy predstavleniia i obrabotki ne polnostiu opredelennykh znanii*, sb. trudov RosNII Iskusstvennogo Intellekta / red. I. E. Shvetcov, Moskva–Novosibirsk. 1996. S. 7–30.

25. Zagorulko Iu. A., Popov I. G. Predstavlenie znanii v integrirovannoi tekhnologicheskoi srede Semp-TAO // *Problemy predstavleniia i obrabotki ne polnostiu opredelennykh znanii*, sb. trudov RosNII Iskusstvennogo Intellekta / red. I. E. Shvetcov, Moskva–Novosibirsk. 1996. S. 59–74.

26. Narinyani A. S. Netochnost kak NE-faktor. Popytka doformalnogo analiza. Novosibirsk, 1994. (Prepr./Ros. NII II; 2).

27. Narinyani A. S. Neodnoznachnost i ee funktcii v protcesse kommunikatcii // Cb. Trudy natc. konf. po iskusstvennomu intellektu KII'96, okt. 1996. Kazan, 1996.

28. Narinyani A. S. NE-FAKTORY: Netochnost i Nedoopredelennost — razlichie i vzaimosviaz // Izv. RAN, Teor. i sist. upr. 2000.- №. 5. S. 44–56.

29. Narinyani A. S. NE-faktory: neodnoznachnost (do-formalnoe issledovanie) // Novosti iskusstvennogo intellekta. 2003. N 5–6.

30. Narinyani A. S. Metatekhnologiia N-prilozhenii. Nauchnaia sessiia MIFI-2005. Sbornik nauchnykh trudov, Moskva, 2005.

31. Napreenko V. G., Narinyani A. S., Aigazin ZH. ZH. Kompiuternaia model upravleniia natcionalnoi ekonomikoi na primere Respubliki Kazakhstan // Trudy VII-i mezhdunarodnoi konferentcii „Problemy upravleniia i modelirovaniia v slozhnykh sistemakh“ Samara: Samarskii Nauchnyi Centr RAN, 2005, s. 233–238

32. Napreenko V. G., Narinyani A. S., Smirnov E. P. Modelirovanie regionalnoi ekonomiki: novyi uroven kachestva i bezopasnosti Finansy. Ekonomika, Bezopasnost. 2005. N 4, S. 33–38.

ВВЕДЕНИЕ В НЕДООПРЕДЕЛЕННОСТЬ

А. С. Нариньяни

Российский НИИ Искусственного Интеллекта

УДК 519.65: 519.85; 004.94; 004.82

Недоопределенные модели (Н-модели) — новая теория и технология эффективного решения широкого спектра проблем от прикладных расчетов до обработки знаний и задач искусственного интеллекта. Относится к направлению *constraint programming,* активно развиваемому в последнее время в мире как одно из наиболее перспективных в ИТ. Качественно расширяет возможности работы с информацией и вычислительными моделями повышенной сложности, позволяя значительно упростить процесс создания систем и технологий следующего поколения, в частности, в таких областях как экономика, менеджмент, управление сложными объектами и производственными процессами, инженерные расчеты и многих других.

Н-модели позволяют активно взаимодействовать со всем пространством решений, чем принципиально превосходят возможности традиционных алгоритмических методов и обеспечивают качественный скачок в решении ключевых проблем развития современных информационных технологий.

Ключевые слова: вычислительные модели, программирование в ограничениях, метод недоопределенных моделей, искусственный интеллект, представление знаний, НЕ-факторы.

Проблемой недоопределенности в моделях представления знаний А. С. Нариньяни начал заниматься в начале 80-х годов. Тогда же в Вычислительном Центре СО АН СССР вышло два его препринта: „Нариньяни А. С. Недоопределенные множества — новый тип данных для представления знаний. Новосибирск, 1980. (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; № 232)“ и „Нариньяни А. С. Недоопределенные модели и операции с недоопределенными значениями. Новосибирск, 1982. (Препр./ АН СССР. Сиб. отд-ние ВЦ; № 400)“. Предложенный в этих работах аппарат работы с недоопределенными знаниями активно обсуждался на семинарах ВЦ СО АН СССР и Института математики СО АН СССР. В итоге в журнале „Техническая кибернетика“ появилась фундаментальная статья „Нариньяни А.С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1986. № 5. С. 3–28.“. После выхода этой статьи недоопределенные модели стали известны широкому кругу специалистов в области информатики и искусственного интеллекта.

Статья была впервые издана в виде приложения к журналу „Информационные технологии“: Нариньяни А. С. Введение в недоопределенность. М : Новые технологии, 2007. (Информационные технологии; прил. 4).

Вниманию читателей предлагается отредактированная версия статьи А. С. Нариньяни „Введение в недоопределенность“. Материал, изложенный в статье, первоначально задумывался как вводная глава большой монографии, в которой А. С. Нариньяни хотел подробно описать все аспекты недоопределенных моделей, включая вопросы теории, реализации и практического применения. Подготовка монографии затягивалась, поэтому А. С. Нариньяни решил опубликовать этот материал отдельно от монографии. В конечном счете, данная статья впервые была опубликована в виде приложения к журналу „Информационные технологии“ (Нариньяни А. С. Введение в недоопределенность. М.: Новые технологии, 2007. (Информационные технологии; прил. 4)). Статья ценна тем, что в ней увлекательно и последовательно излагаются основные принципы построения недоопределенных моделей. Она содержит много примеров, которые снабжены хорошими поясняющими иллюстрациями. Благодаря этому даже читатель, впервые встретившийся с н-моделями, может понять положенные в их основу идеи. Таким образом, статья действительно вводит читателя в мир недоопределенных моделей.

Мы решили опубликовать статью по следующим причинам. Во-первых, мы хотим отдать дань памяти и уважения выдающемуся советскому и российскому математику А.С. Нариньяни, которому в ноябре 2017 г. исполнилось 80 лет. Во-вторых, в настоящее время имеется насущная потребность в качественных моделях и методах принятия решения в условиях нарастающей неопределенности. И здесь модели и методы А. С. Нариньяни могли бы найти широкое применение.

канд. техн. наук Загорулько Ю. А.,
зав. лабораторией Искусственного интеллекта института
Систем информатики имени А. П. Ершова СО РАН

Чаще переворачивайте устоявшиеся в физике и математике истины.
— Альберт Эйнштейн

Введение. Задачей этой работы является знакомство читателя с новым направлением, получившим название *недоопределенной* математики или Н-математики. Основная ее часть представляет собой переработку содержания статей [1–4].

Метод недоопределенных моделей (Н-моделей) был предложен автором в начале 80-х годов [1, 5–6] для представления и обработки не полностью определенных знаний. Рассматриваемый вначале как оригинальный подход в области искусственного интеллекта, он трансформировался постепенно в прикладную технологию, относящуюся к направлению *программирование в ограничениях (constraint programming),* активно развиваемому в мире последнее два десятилетия в качестве одного из наиболее перспективных в области ИТ. Технология Н-моделей выделяется среди других подходов вычислительной математики мощностью, универсальностью и эффективностью. Фактически она является единственной технологией, которая позволяет решать задачу удовлетворения ограничений в самой общей постановке.

К настоящему времени на базе аппарата Н-моделей создана многоуровневая технология программирования, позволяющая решать новые классы задач в таких областях как экономика и финансы, инженерные расчеты, календарное планирование, вычислительная математика, САПР, ГИС и др. Среди проектов нашего института, реализованных на основе аппарата Н-моделей, можно отметить такие, как UniCalc [7–8], INTEGRA.NM (ФинПлан) [9], Time-EX [10–11], Экономика [12–13] и другие.

Работа организована следующим образом. В главе 1 проводится сопоставление аппарата Н-моделей и программирования в ограничениях с традиционными подходами. В главе 2 вводятся основные понятия, лежащие в основе обсуждаемого аппарата. В главе 3 рассматривается иллюстративный пример, дающий представление о процессе решения. В главе 4 сопоставляются базовые понятия алгоритма и модели. В главе пятой обсуждаются свойства Н-расширений, в шестой дается детальное определение Н-модели и соответствующего процесса вычислений. В седьмой главе показаны некоторые возможные применения аппарата Н-моделей. И, наконец, в главе 8 рассматривается система НЕ-факторов, к которым относится недоопределенность, а также взаимоотношения недоопределенности с другими НЕ-факторами, использующими интервальное представление. В Заключении подводятся итоги рассмотрения.

1. Недоопределенность и Н-модели.

Специалистов в любой области можно разделить на две категории:

Консерваторы: живущие внутри своей области и считающие ее окончательно сложившейся, т. е. способной развиваться только в деталях, которые хотя и могут иметь важное прикладное значение, но никак не способны изменить ее уже определившиеся „устои“.

Прогрессисты: понимающие, что каждая область — как и наука в целом — развивается по спирали, и что многое, относившееся к „незыблемым устоям“ на предыдущем витке, радикально менялось на следующем; такие специалисты готовы к возможности крутых поворотов и относятся к таким возможностям с профессиональным интересом.

Обычно некоторые области находятся на этапе радикальных изменений, и поэтому их динамика очевидна для всех. Другие гораздо более стабильны, и возможность таких изменений в них вызывает естественное недоверие.

Поскольку вычислительная математика относится сегодня именно к таким внешне стабильным разделам науки, то „качественно новый подход“ в ее контексте звучит неправдоподобно, поскольку для таких, казалось бы, уже полностью сложившихся дисциплин, крутые повороты развития представляются невозможными в принципе.

При этом история самой математики представляет собой цепь концептуальных потрясений и качественных скачков. Наверное, тем специалистам, которые когда-то пользовались римскими цифрами, тоже казалось, что известная им арифметика — это те самые устои, которые не изменятся никогда. Даже сложить два больших числа тогда было непростой задачей, а владение умножением вполне можно было приравнять к кандидатской диссертации. Однако с эпохой Возрождения в Европу пришла современная „арабская“ позиционная система счисления, предложившая совершенно новое видение числа, при котором не только умножение, но и деление стало настолько простым, что им владеют уже в начальной школе.

За последние века в развитии вычислительных методов произошел не один крутой поворот, выводивший технологию расчетов на очередной уровень решения все более сложных задач. Я уверен, что Н-математика сыграет в этом процессе свою роль в подобном очередном переходе к новому качеству вычислений.

Образное представление всегда полезно при введении в новую, непривычную методику рассмотрения общепринятой, хорошо знакомой системы понятий. Поэтому эту первую, по сути вводную, главу мы начнем с метафоры (максимально упрощенной для наглядности), продолжим формальным определением терминов *Н-модель* и *программирование в ограни-*

чениях и закончим описанием комплекса качественно новых возможностей обсуждаемого аппарата.

1.1. *Консилиум.* Для решения некоторой сложной проблемы собран консилиум — совет специалистов, каждый из которых видит задачу по-своему, но не имеет готового ответа. Поскольку знания каждого из присутствующих различны, то можно сказать, что у каждого из них есть свое, отличное от других, приблизительное представление о возможных решениях. Среди этих решений есть те, которые в силу специализации каждого данного эксперта:

— должны быть исключены как недопустимые, поскольку он может квалифицировано представить обоснование их некорректности, и

— кажутся подходящими, но он в них недостаточно уверен.

Таким образом, точка зрения каждого из присутствующих на решения проблемы может рассматриваться как его личный набор соображений „за“ и „против“, причем „за“ — дискуссионны, а „против“ — бесспорны.

В процессе обсуждения проблемы присутствующие представляют эти свои „за“ и „против“. По ходу обмена мнениями множество „за“ постепенно сокращается из-за их несовместимости с какими-то из „против“, а набор „против“ у каждого из экспертов накапливается за счет знакомства с мнениями коллег.

Поскольку в конце обсуждения совокупность „против“ будет у всех одинаковой (суммарной), то она может:

— либо исключить все ответы (проблема в данной постановке неразрешима),

— либо определить единственное решение, что реально возможно обычно только при ограниченном наборе вариантов,

— либо оставить несколько (множество) альтернатив, выбор из которых будет определятся отношениями „за“ у разных экспертов.

Если в последнем случае оставить в стороне выбор на основе недостаточно обоснованных оценок „за“, то множество (возможно, пустое) этих согласованных альтернатив и является результатом коллективного уточнения позиций всех экспертов.

Так как каждую формализуемую проблему можно описать множеством (например, k) параметров, то k-мерное пространство значений этих параметров будет содержать все возможные точки, являющиеся вариантами решения этой задачи. Соответственно, каждый эксперт делит это пространство на ту часть, которую он отвергает как неадекватную, и остальную, которая может содержать допустимые решения. Таким образом, пересечение этих допустимых частей всех экспертов содержит область решений задачи, определяемых данным консилиумом экспертов как возможные.

Отметим, что для данного вводного раздела мы эту метафору упростили. В частности, оставили в стороне тот факт, что у каждого эксперта обычно есть распределение оценок вариантов „за“ на тех участках k-мерного пространства проблемы, отвергать которые у него нет оснований. Мы еще вернемся к этому аспекту поиска решения в главе 8, а в основном тексте нам вполне достаточно рассматривать все допускаемые (не отвергнутые) альтернативы как равновозможные.

В следующем разделе мы перейдем от метафоры к очень простому примеру, а от него к более формальной постановке проблемы.

1.2. *Недоопределенность и Н-переменная.* Что же такое Недоопределенность?

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, проще всего начать с базового понятия любой формальной системы — с *переменной.* При этом стоит напомнить, что существует по крайней мере два основных, качественно различных, понятия переменной: алгоритмическая и классическая.

Алгоритмическая переменная, связанная с использованием алгоритмов и появлением языков программирования, является, по сути дела, именем ячейки абстрактной памяти, в которую могут помещаться различные значения, меняющиеся по ходу исполнения соответствующей процедуры. Такая переменная не имеет отношения к нашей теме и исключается поэтому из дальнейшего рассмотрения.

Классическая переменная — базовое понятие математики — представляет некоторую неизвестную величину, связанную условиями задачи с другими известными и неизвестными величинами. При достаточной полноте условий задачи сопоставленная данной переменной величина, т. е. ее значение, может быть определена точно. Таким образом, значение классической переменной отражает некоторую конкретную, заданную условиями задачи сущность, представляемую в задаче именем данной переменной. В рамках одной задачи значение переменной не может меняться — оно может быть либо неизвестно (*не определено*), либо известно (*определено*).

Таким образом, традиционная математика оперирует с переменными, находящимися в одном из двух состояний: *не определено* или *определено*.

Но подобное упрощение, к которому мы настолько привыкли, что считаем его само собой разумеющимся, годится только для *абстрактной* формальной системы.

Для любого *реального* параметра *реальной* задачи:

— Значение в принципе не может быть *абсолютно неопределенным*, поскольку для него всегда известна достаточно ограниченная область значений, обусловленная как типом данного параметра, так и его ролью в конкретной задаче. Т. о. в практических задачах нет переменных с областью возможных значений от минус бесконечности до плюс бесконечности. В частности, и потому, что бесконечность — понятие абстрактное как по содержанию, так и в компьютерных технологиях, где интервал возможных значений определен, поскольку максимальное и минимальное значения имеют вполне конкретные величины.

— *Определенным* значение может стать только в результате решения задачи, да и то в том случае, когда задача достаточно конкретизирована для получения максимально точного ответа (который, кстати говоря, тоже всегда ограничен точностью как задачи, так и алгоритма вычислений).

Другими словами, значение реального параметра задачи всегда ограничено (т. е. частично известно) уже в самой ее формулировке, а в процессе решения оно дополнительно уточняется. Причем определенное значение оно получает только в том частном случае, когда (а) условия задачи для этого достаточно полны и (б) имеется метод полного решения этой задачи.

Таким образом, значение реального параметра всегда частично известно, поскольку находится где-то между не определено и определено, что означает, что в общем случае оно *недоопределено.*

Традиционная математика игнорирует это ключевое обстоятельство, поскольку не умеет его использовать. В Н-математике же оно является базовым и активно работает: ее переменная (*Н-переменная*) может принимать любое из *недоопределенных* значений (*Н-значений*), каждое из которых представляет собой ту или иную подобласть области значений данного параметра.

Формально Н-значением переменной является любое непустое подмножество области значений этой переменной. Поскольку обычная (традиционная) переменная, сопоставляе-

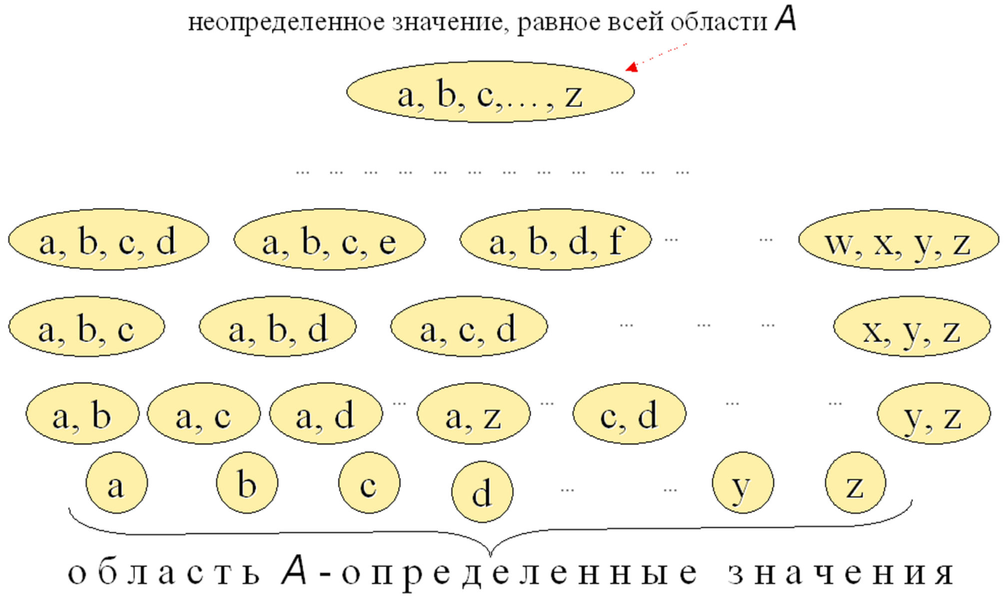

Рис. 1. Область значений Н-переменной $^*\boldsymbol{A}$, представляющей переменную $\boldsymbol{A}$ с областью значений $\boldsymbol{A} = \{a, \ldots, z\}$

мая реальному параметру **x**, может принимать только точные значения, то в Н-математике ее приходится представлять Н-переменной ***x**, у которой область значений является совокупностью всех непустых множеств точных значений из области значений **x**.

При этом выражение ***x** = ***a**, где ***x** — Н-переменная, а ***a** — ее текущее Н-значение, получает следующий смысл: *точное значение параметра* $\boldsymbol{x}$*, представленного Н-переменной* ***x***, принадлежит подобласти значений, представленной Н-значением* ***a**.

Таким образом, область Н-значений Н-переменной ***x** является полурешеткой, включающей как всю область значений **x** (максимально недоопределенное Н-значение ***x**, которое будем называть *неопределенным*), так и все непустые подмножества этой области, — в частности, и определенные (точные) значения **x**.

В частности, если областью значений переменной **A** является конечное множество $\boldsymbol{A}$, то такой переменной **A** будет соответствовать Н-переменная ***A** с областью значений $^*\boldsymbol{A}$, представляющей собоймножество всех подмножеств $\boldsymbol{A}$ *без пустого*:

$$^*A = 2^A \backslash \varnothing.$$

Например, как это показано на рис. 1, переменной **A** с областью значений $\boldsymbol{A}$, представленной латинским алфавитом $\{a, \ldots, z\}$, сопоставляется Н-переменная ***A** с областью значений $^*\boldsymbol{A}$, включающей все непустые подмножества множества $\{a, \ldots, z\}$. Т. о. все определенные (однозначные) значения, равно как и все множество $\{a, \ldots, z\}$, являются частным случаем Н-значений $^*\boldsymbol{A}$.

Это означает, что Н-значение способно отражать процесс решения реальной задачи, при котором Н-значение реального параметра проходит последовательные фазы доопределения, т. е.

— может быть исходным Н-значением (входить в условия задачи),

— пройти последовательность промежуточных, последовательно уточняющихся Н-значений,

— стать результатом, который может оказаться однозначным (единственное решение), либо останется неоднозначным, если задача была недостаточно конкретной и\или метод ее решения не мог обеспечить ее полного решения.

Другими словами, текущее Н-значение $^{*}\mathbf{a}$ Н-переменной $^{*}\mathbf{x}$, представляющей параметр $\mathbf{x}$, равно подмножеству конкретных значений, любое из которых в процессе решения потенциально может стать точным значением $^{*}\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}$, остающимся пока неизвестным (вернее, известным с точностью до данного Н-значения $^{*}\mathbf{a}$) ввиду недостатка информации. По ходу решения задачи, включающей параметр $\mathbf{x}$, и\или при добавлении дополнительных данных его Н-значение становится все более определенным и в пределе может доопределиться до точного значения.

Итак, для Н-математики участие Н-переменной в вычислениях — процесс монотонно сходящийся: любая Н-переменная может только уточняться, при этом ее текущее Н-значение становится все менее недоопределенным, заменяясь на одно из своих подмножеств.

1.3. *Простая сумма: убедитесь в разнице.* Выше мы выяснили, что любое текущее Н-значение — это хотя в общем случае и приблизительная, но всегда корректная оценка реального значения соответствующего параметра, которое на данном этапе не определено более точно в контексте имеющейся недостаточно полной информации о результате. Уточнение формулировки задачи и\или продвижение процесса ее решения обеспечивает все большую определенность оценкам значений используемых в ней параметров.

Очевидно, что Н-значение числа (в главе 6 будут рассмотрены примеры и других типов) может быть представлено:

— Списком (множеством) значений: $\{-1.5, 0.31, 2.47, \ldots, 3.1415\}$, $\{4, 5, 7, 8, 9, 12\}, \ldots$

— Интервалом: $(0.1, 5.032]$, $[-5, 103]$, ...

— Мульти-интервалом: $[-2.3,\ -0.2;\ 0.7,\ 4.6;\ 7,\ 31.22;]$, $\{[-2.3,\ -0.2];\ [0.7,\ 4.6];\ [7,\ 31.22];\}\ldots$ или сочетанием этих представлений.

Например, целый числовой параметр $\mathbf{x}$ имеет недоопределенное значение $\{3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9{,}12\}$, что означает, что его Н-значением в процессе дальнейшего решения задачи и\или ее доуточнения может стать любое из подмножеств этого множества значений, в том числе и конкретные 3, или 4, или 5, или 8, или 9, или 12.

Если этот недоопределенный $\mathbf{x}$ связан с целым положительным параметром $\mathbf{y}$ уравнения $\mathbf{x} + \mathbf{y} < 7$, то отсюда следует, что $^{*}\mathbf{x} = \{3,\ 4,\ 5\}$, а $^{*}\mathbf{y} = \{1,\ 2,\ 3\}$. При добавлении ограничения $\mathbf{y} > 1$, обе эти Н-переменные уточняются, принимая более определенные Н-значения $\mathbf{x} = \{3,\ 4\}$ и $\mathbf{y} = \{2,\ 3\}$.

Ясно, что введением одного понятия Н-переменной проблема аппарата, способного работать с недоопределенными данными, не решается: для этого потребуется создание комплекса операций и отношений, способных адекватно работать с Н-переменными. Мы займемся этим ниже, во второй главе. Но прежде чем переходить к формальным определениям, продолжим обсуждение проблемы на содержательном уровне.

Для этого рассмотрим пример (см. рис. 2), который позволит очень наглядно — буквально „на пальцах“ — показать принципиальное качественное различие между Н-математикой и традиционной математикой, основанной на алгоритме. Для этого достаточно рассмотреть любую простую операцию, например, сумму А = В + С.

Если А, В и С точные числа, никаких проблем не возникает: любые два из них определяют третье. Но, как уже отмечалось, в реальных задачах аргументами точные числа бывают редко, так что перейдем к параметрам, заданным интервалами: В = [5, 9] и С =

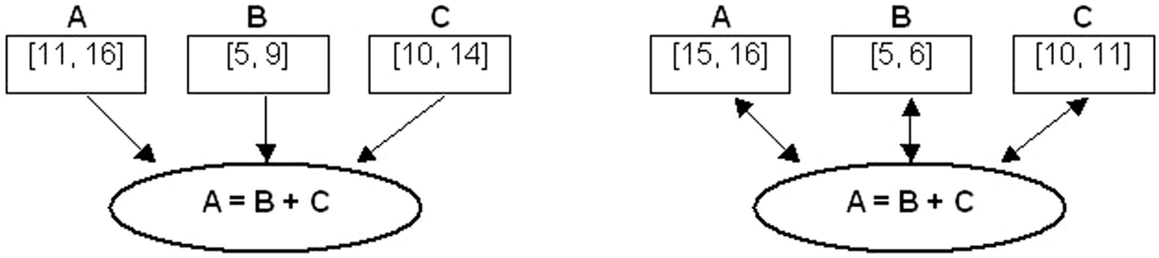

Рис. 2. Простой пример интервального ограничения.

[10, 14]. Тогда A определяется как [15, 23], т. е. интервал возможных значений результата равен сумме интервалов возможных значений аргументов. Поскольку алгоритм — это цепочка операций, то с каждой из них ширина интервала промежуточных результатов будет нарастать и приблизительность конечного результата для подавляющего множества задач быстро выйдет за рамки практического смысла.

Более тридцати лет довольно активно разрабатывается *интервальная математика* [14], оперирующая с интервальными значениями. Однако, несмотря на большую востребованность в интервальных расчетах, она так и не нашла массового применения именно из-за чрезмерной ширины интервалов выходных значений.

Для интервальных вычислений важно и то, что обычно прагматика решаемой задачи ограничивает области значений не только аргументов, но и других ее параметров, в частности и результата.

Если для нашего примера $A = B + C$ заданы интервально любые два параметра, то третий определяется без проблем. Но если заданы все три, то наша сумма перестает быть функцией, а становится отношением (ограничением), влияющим на все три связанные им Н-переменные.

Например, для нашей суммы значение A может быть ограничено интервалом [11, 16] (см. левую сторону рис. 2). Легко видеть, что ограничение $A = B + C$ требует, чтобы заданные интервалы всех трех переменных „стянулись“ до $A = [15, 16]$, $B = [5, 6]$ и $C = [10, 11]$ (см. правую сторону рис. 2), поскольку при других значениях исходных интервалов ограничение суммы не выполняется.

Ясно, что в данном случае мы имеем дело уже не с алгоритмом, а с задачей, которая описывается уравнением $A = B + C$ и набором интервальных ограничений на значения параметров A, B и C.

Таким образом, даже этот простой пример показывает, что необходимость оперировать с приблизительными (неточными) значениями обнаруживает глубокое различие в прикладных возможностях алгоритма (последовательность операций) и множестве уравнений (шире — ограничений), которое мы рассмотрим детальнее в главе 4.

Здесь же важно подчеркнуть, что это справедливо не только для интервалов, но и для других типов Н-значений. Например, для нашей суммы переменные A, B и C могли быть не вещественными, а целыми и задаваться в этом случае множествами значений $A = \{12, 13, 14\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ и $C = \{7, 8, 9, 10\}$, которые должны были бы стянуться во множества $A = \{12, 13\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{9, 10\}$.

1.4. *Ограничения и модели.* Для каждого набора переменных $x_1, x_2 \dots, x_k$ с областями значений соответственно $X_1, X_2, \dots, X_k$ *ограничением* $C(x_1, x_2, \dots, x_k)$ называется любое подмножество декартова произведения областей $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Ясно, что при таком определении ограничением будет любое отношение на множестве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — уравнение, неравенство, логическое выражение, табличная зависимость и т. п., то есть любое соотношение, определяющее ту или иную подобласть k-мерного пространства значений переменных $x_1, x_2 \ldots, x_k$.

Напомним, что *моделью* обычно называется пара **X**, **C**, где **X** есть множество параметров (переменных) $x_1, x_2 \ldots, x_k$ модели, а **C** — неупорядоченная совокупность отношений (ограничений) на **X**.

В общем виде постановка задачи в рамках *constraint programming* формулируется следующим образом:

Для заданной модели $\mathbf{M} = \mathbf{X}, \mathbf{C}$ требуется найти *область решения*, т. е. определить все наборы значений $<a_1, a_2, \ldots, a_k>$ ($a_i \in X_i$), которые бы удовлетворяли всем ограничениям **C** одновременно, т. е. принадлежали области пересечения всех ограничений в k-мерном пространстве значений переменных $\mathbf{X} = \{x_1, x_2 \ldots, x_k\}$.

Таким образом, *constraint programming* оперирует с максимально декларативным по своей сути определением задачи в форме описания *модели*, а не *алгоритма* ее решения [1, 2].

В частности, любые системы уравнений с числовыми параметрами также являются моделями и относятся к проблемам *constraint programming*, причем для их решения в традиционной математике используются различные численные методы. Однако при решении подавляющего большинства реальных задач эти методы оказываются неприменимыми, особенно если модель включает и нечисловые параметры, а начальные данные могут задаваться приблизительно в виде множеств и интервалов, определяющих допустимые значения параметров.

Вообще говоря, возвращаясь к нашей метафоре, ничто не мешает считать любую модель консилиумом, в котором каждое отношение является экспертом, выделяющим в пространстве возможных решений подпространство, элементы которого удовлетворяют ограничению данного отношения. Или, образно говоря, урезающим все пространство модели до соответствующего подпространства.

Таким образом, для Н-переменной, вне зависимости от ее типа, можно различать два значения:

— *реальное* неизвестное нам значение, которое она представляет, и

— ее *текущее* Н-значение, являющееся доступной нам в данный момент оценкой этого реального значения.

Поскольку модель может описывать не только существующие объекты или процессы, но и проектируемые, то недоопределенность значений ее параметров в этом случае характеризует свойства виртуальных объектов, находящихся в процессе создания. При этом Н-значение может выступать и в качестве унарного ограничения на вычисляемое значение. Примеры: — здесь нужен провод диаметром от 0.25 до 0.32 мм; — в этом редукторе придется использовать передачу либо коническую либо цилиндрическую (но не другого типа).

Ясно, что основная проблема *constraint programming* и Н-моделей состоит в том, как организовать процесс решения, т. е. последовательного монотонного уточнения Н-значений параметров модели, сходящихся к Н-значениям, которые определены совокупностью ограничений модели. Каким образом решается эта проблема, будет рассмотрено в главе 3.

Так как совокупность параметров модели задается множеством, то в отличие от алгоритма, в модели нет априорного разделения параметров на входные и выходные. Исходная информация о параметрах, равно как и требования к их значениям в рамках решаемой задачи, задается в виде унарных ограничений на множество их возможных значений. В соответствии с требованиями решаемой задачи пользователь определяет, какие из параметров заданы точно, какие не известны совсем, а какие — приблизительно. Используя формулировку задачи в виде модели и исходную информацию о Н-значениях ее параметров, технология Н-моделей обеспечивает автоматическое стягивание пространства Н-значений параметров модели до подпространства, возможно близкого к минимальному из тех, которые содержат все возможные решения модели.

Поскольку нас интересуют реальные, а не абстрактные задачи, то мы рассматриваем здесь модели, являющиеся формальным описанием какого-то конкретного *объекта моделирования*, — технического устройства, физического процесса, экономической структуры и т. п. Традиционная математика предлагает сегодня методы решений только для очень частных классов моделей, как правило однородных по набору параметров и типу ограничений. А так как адекватная модель реального объекта описывается комплексом параметров самых разных типов, связанных различными отношениями, то до последнего времени такая модель обычно оставалась не более чем формальной спецификацией объекта моделирования того или иного уровня аппроксимации и была пригодна только для использования в качестве публикационной иллюстрации.

Радикальное изменение, внесенное технологией Н-моделей в вычислительную математику, состоит в том, что она делает любую модель *активной*. Модель становится *компьютерной моделью*, которая может быть использована для решения различных (в пределе, всех) задач, относящихся к описанному ею объекту. При этом постановка той или иной задачи конкретизируется путем добавления в модель ограничений на допустимые значения части или всех параметров и/или формулирования дополнительных связей между ними.

Реальные методы *constraint programming* особенно полезны там, где кончаются возможности обычной математики. Среди наиболее известных зарубежных систем, реализующих парадигму программирования в ограничениях, можно отметить Prolog III [17], CLP(R) [18], CLP(BNR) [19], clp(FD) [20], CHIP [21], ILOG Solver [22], Newton [23] и др.

1.5. *Новое качество решения.* Таким образом, представляемый здесь подход радикально меняет технологию решения вычислительных задач, обеспечивая по сравнению с традиционными методами целый комплекс качественно новых возможностей, из которых основными являются следующие:

— *число параметров в модели может быть не равно числу ограничений, в том числе и уравнений (возможны недоопределенные и переопределенные системы);*

— *модель не делит свои параметры на входные и выходные, она симметрична по отношению к ним, поскольку в модели все они взаимозависимы;*

— *модель определяет не отдельные решения, а всю область решений, удовлетворяющих отношениям модели;*

— *переменные в одной модели могут иметь разные типы — например, целые и вещественные числа (в том числе и системы только с целочисленными переменными), а также и нечисловые типы: логические, множества, символьные и др.;*

— *модель может включать любые классы отношений, задаваемых для типов связываемых ими параметров; так для числовых параметров наряду с любыми (линейными,* *нелинейными, трансцендентными и др.) уравнениями и неравенствами возможно использование логических выражений и табличных зависимостей;*

— *любые параметры отношений в моделях (переменные, коэффициенты, константы, показатели) также могут быть недоопределенными, т. е. заданными в виде интервалов или списков значений;*

— *не требуется задания начального приближения к решению;*

— *могут вообще отсутствовать стандартные методы решения.*

Если еще раз вернуться к метафоре консилиума, с которой мы начали эту главу, то Н-модели обладают общим уникальным качеством: они позволяют определять объект моделирования как *совокупность независимых ограничений.* Это позволяет строить модель коллективными усилиями автономных экспертов, каждый из которых квалифицированно описывает свою часть знаний об объекте, но может иметь лишь весьма приблизительное представление о нем в целом.

Более того, полноценная Н-модель может создаваться усилиями одного эксперта, который корректно описывает части, не имея достаточно полного знания о целом. В результате, активные знания Н-модели могут превосходить знания ее создателя (создателей).

2. Основные понятия. В предыдущей главе мы выяснили два основных различия Н-математики от привычной традиционной:

— Традиционная вычислительная математика решает задачи на основе алгоритмического подхода, а Н-матемика оперирует моделями;

— Понятие переменной в Н-математике принципиально отличается от традиционной классической переменной.

Соотношением алгоритма и модели мы займемся специально в главе 3, а в данной главе доопределим Н-переменную и введем понятия Н-расширения, Н-операции и Н-отношения.

2.1. *Н-переменная и Н-расширение.* В п. 1.2 мы сравнили два основных понятия переменной — алгоритмической и классической. Первая в общем случае не имеет прямого отношения к параметрам объекта расчетов, но может менять значение в ходе процесса вычислений. Вторая наоборот, прямо соответствует параметру объекта, но получать значение может один раз — в результате решения задачи.

Мы уже убедились, что Н-переменная содержательно принципиально отличается и от той и от другой. С одной стороны, Н-переменная, как и классическая, ставится в соответствие конкретному параметру объекта моделирования. С другой, ее недоопределенное значение в общем случае уточняется, т. е. меняется, в ходе решения. Это радикально изменяет сам аппарат ее использования в процессе вычисления.

Так что введение основных понятий Н-математики придется начать с завершения рассмотрения особого содержания Н-переменной, которое отражается не только на области ее значений, но и на ее прагматике.

Выше уже упоминалось, что в Н-математике выражения $*\mathbf{x} = *\mathbf{a}_1$ (где $*\mathbf{x}$ это Н-переменная, а $*\mathbf{a}_1$ — ее Н-значение) получает следующий смысл: *значение переменной* $\mathbf{x}$*,* представленной Н-переменной $*\mathbf{x}$, *принадлежит подобласти значений* $\mathbf{x}$, представленной Н-значением $*\mathbf{a}_1$.

При этом в процессе Н-вычислений ключевую роль играет *операция присваивания*: при $*\mathbf{x} = *\mathbf{a}_1$ присвоение $*\mathbf{x} := *\mathbf{a}_2$ интерпретируется следующим образом: значение $\mathbf{x}$ *принадлежит как подобласти* $*\mathbf{a}_1$ *, так и подобласти* $*\mathbf{a}_2$, т. е. результат присвоения таким образом принадлежит одновременно обоим этим областям и определяется, следовательно, как $*\mathbf{x} = *\mathbf{a}_1 \cap *\mathbf{a}_2$. Например, для Н-чисел, представленных интервалами,

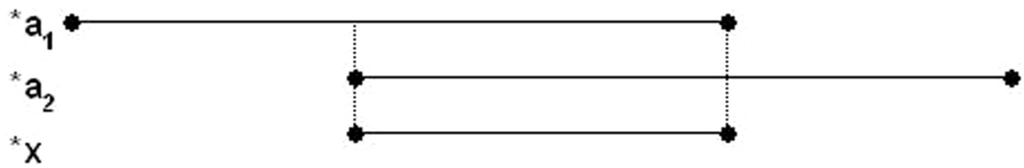

Рис. 3. Графическое представление операции присваивания

это выглядит, как показано на рис. 3., т. е. верхняя (правая) граница нового значения $^*\mathbf{x}$ равна **min** верхних (правых) границ $^*\mathbf{a}_1$ и $^*\mathbf{a}_2$, а нижняя (левая) граница нового значения $^*\mathbf{x}$ равна **max** нижних (левых) границ $^*\mathbf{a}_1$ и $^*\mathbf{a}_2$.

Очевидно, что если интервалы не пересекаются, то по приведенным выше формулам получим результирующий интервал, в котором нижняя (левая) граница больше верхней (правой), т. е. противоречие, — что говорит об отсутствии решения.

Операция присваивания для Н-переменных является ключевым компонентом аппарата Н-моделей, обеспечивающим процесс решения таким образом, что в его рамках любая Н-переменная может только уточняться и весь процесс стягивания k-мерного пространства является монотонным.

2.2. *Н-операция и Н-отношение.* Возможность оперировать с Н-переменными относится не только к вычислительной алгебре и параметрам-числам. Любой формальной системе можно сопоставить ее *недоопределенное расширение (Н-расширение)*, которое включает как соответствующий тип Н-переменной (логический для алгебры логики, множества для теории множеств, и т. п.), так и соответствующее расширение операций (*Н-операции*) и отношений (*Н-отношения*) исходной формальной системы.

Каждой k-местной операции f над обычными значениями $a_1, \ldots, a_k$, принадлежащими соответственно областям $A_1, \ldots, A_k$:

$$f : A_1, \ldots, A_k \to A_{k+1}$$

сопоставим ее Н-расширение над соответствующими Н-значениями (Н-операция и Н-переменные далее, как и выше, отмечаются звездочкой):

$$^*f : {}^*A_1, \ldots, {}^*A_k \to A_{k+1},$$

результат которой для любого набора Н-значений $^*a1,\ldots,^*ak$ определяется как множество значений операции f для всех возможных наборов значений $a1,\ldots,\ ak,$ принадлежащих Декартову произведению $^*a_1 \times \ldots \times\ ^*ak$. Т.е.

$^*f\ (^*a1,\ldots,^*ak) = \{\ f\ (a1,\ \ldots,\ ak) \mid a_i \in {}^*a_i,\ i = 1,\ldots,\ k\ \}$.

Например, Н-расширению операции x:= $z - y$ над Н-значениями *y = {7, 8,} и *z = {12, 13, 14} соответствует Н-операция вычитания, комбинирующая все значения *y и *z и дающая в результате значение *x = {4, 5, 6, 7} .

Поскольку Н-математика оперирует с моделями, а они, как уже было сказано выше, представляют собой системы отношений, связывающих множество параметров (т. е. Н-переменных) данной задачи, то нам необходимо также познакомиться с Н-расширениями отношений.

Как уже упоминалось, всякое отношение r (a1,..., ak) определяет некоторое подмножество Декартова произведения областей значений $A1$ x... x Ak. Оно может интерпретиро-

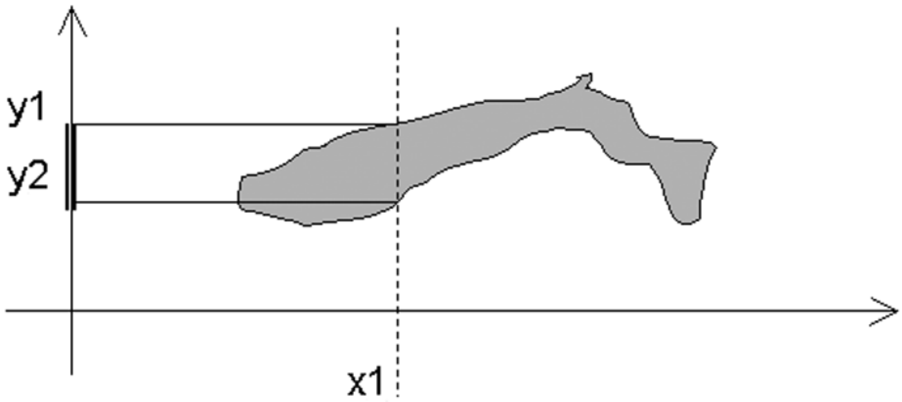

Рис. 4. Графическое представление отношения r(x, y)

ваться набором функций а$i = f$i (а1, ..., аi-1, аi+1, ..., аk), отображающих подмножество r (а1,..., аk) на области значений каждой из переменных а1,..., аk.

На рис. 4 тело отношения $r(x, y)$ интерпретируется функции $y = f'(x)$, сопоставляющей каждому x_1 в общем случае интервал $[y_2, y_1]$. Аналогична и вторая функция интерпретации $x = f''(y)$. Для отношений, определенных в символьном виде — например, уравнений — функции интерпретации определяются эквивалентными выражениями, представляющими каждую переменную явно через остальные.

Например, уравнению $x + y - z = 0$ соответствуют три *функции интерпретации*:

$$z := x + y;\ x := z - y;\ y := z - x;$$

Таким образом, Н-отношение $^*r(^*x_1, \ldots, ^*x_k)$ интерпретируется k Н-функциями

$$^*x_i = {}^*F_i(^*x_1, \ldots, ^*x_{i-1}, ^*x_{i+1}, \ldots, ^*x_k),\ i = 1, \ldots, k$$

где каждая *Н-функция*

$$^*F_i(^*x_1, \ldots, ^*x_{i-1}, ^*x_{i+1}, \ldots, ^*x_k)$$

реализует *Н-операцию*

$$^*f_i(^*a_1, \ldots, ^*a_{i-1}, ^*a_{i+1}, \ldots, ^*a_k),$$

при всех $^*x_j = {}^*a_j$.

Если значение числовой Н-переменной $^*x$ представлять интервалом $[x_-, x^-]$, где x_- — минимум, а x^- — максимум Н-значения $*x$, то уравнение нашего примера

$$x + y - z = 0$$

будет интерпретироваться шестью функциями интервальной алгебры [14]:

$$\begin{array}{ll} z^- := x^- + y^-; & z_- := x_- + y_-; \\ x^- := z^- - y_-; & x_- := z_- - y^-; \\ y^- := z^- - x_-; & y_- := z_- - x^-. \end{array}$$

3. Иллюстративный пример. 3.1. *K-мерное пространство модели.* Напомним, что множеству А параметров-переменных модели, состоящему из k элементов, соответствует

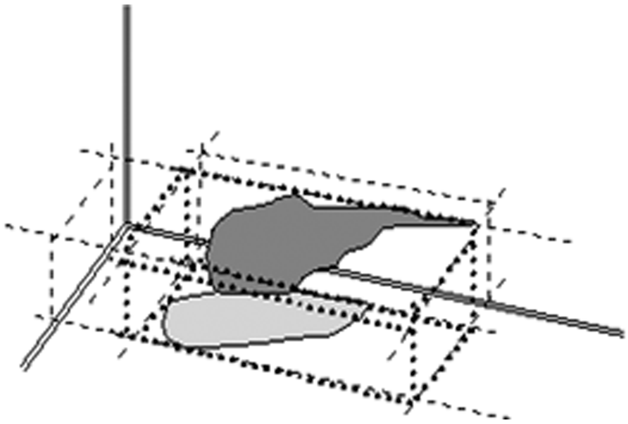

Рис. 5. Параллелепипед области решения: отображение в трехмерной проекции

k-мерное пространство, являющееся декартовым произведением областей значений всех переменных данного множества А. Точки этого пространства отображают все k-мерные наборы значений всех переменных А. Соответственно, каждая модель определяет в пространстве значений своих параметров некоторое тело — *область решений* — образованное точками, удовлетворяющими всем отношениям данной модели.

Если модель полностью определена, ее область решений состоит из единственной точки. Если она противоречива, область решений пуста. И, наконец, в общем случае, при недоопределенной системе отношений она содержит множество точек или целые гипертела. Проекции области решений на каждый из параметров задают их области значений для данной модели.

Добавление к модели M любого дополнительного ограничения определяет модель M', область решений которой, как очевидно, вложена в область решений исходной модели M. Соответственно, области значений части или всех параметров внутри M' в общем случае уже, чем внутри M.

Если ограничение задается сужением области значений какого-либо из параметров, то из области решений модели убираются части, проекция которых попадает в исключенную зону значений данного параметра. Например, при задании ограничения, сужающего интервал значений числовой переменной изменением одной из его границ, от области решений исключаемая часть отсекается $(k-1)$-мерной гиперплоскостью, проходящей через новую границу интервала. Подобные ограничения являются типичными для многих приложений, представляя, например, технические требования для трансформатора или финансовые условия для инвестиционного проекта.

Следует отметить, что наиболее простой формой отражения k-мерного подпространства является k-мерный параллелепипед $A1$ х. . . х A_k , где Ai — проекция области решения на область значений переменной xi. На рис. 5 такой параллелепипед изображен в трехмерной проекции.

Конечно, такой параллелепипед дает достаточно грубое отображение области решения, но другого простого и наглядного способа отображения области решения для k больше двух нет, да и тот годится только для моделей с числовыми параметрами, представляемыми интервалами.

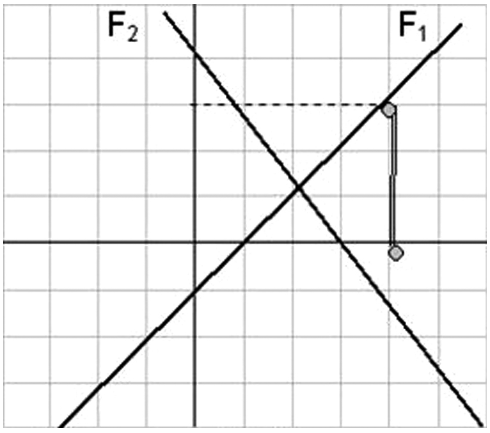

Рис. 6. Начальная оценка переменной

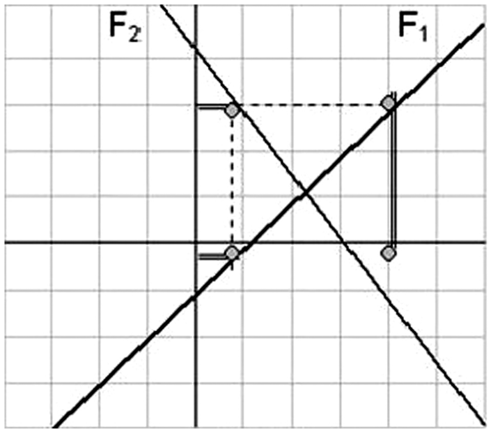

Рис. 7. Проекция F_1 на переменную y

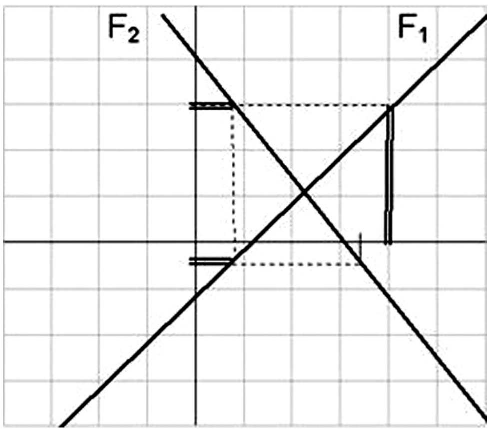

Рис. 8. Проекция F_2 на переменную x

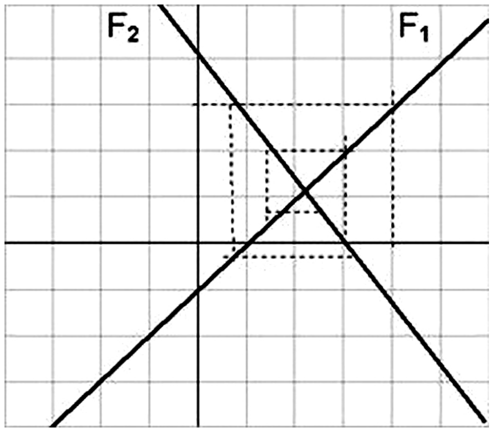

Рис. 9. Процесс приближения к решению системы уравнений

Поскольку модель может включать унарные ограничения относительно некоторых отдельных переменных, то эти ограничения определяют в явной форме начальное K-мерное подпространство, включающее область решений данной модели.

Н-математика реализует для каждой модели *универсальный* вычислительный процесс, сжимающий начальное подпространство до k-мерного параллелепипеда, содержащего все множество решений. Ниже мы рассмотрим пример вычислительного процесса, порождаемого Н-моделью алгебраического типа.

3.2. *Пример.* Рассмотрим теперь простой пример, иллюстрирующий используемый в Н-моделях процесс вывода. Пусть требуется найти решение системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$F_1 : y = x - 1;\ F_2 : 4x + 3y = 12.$$

Графики этих уравнений изображены на рис. 6 и 7.

Каждое из этих уравнений можно рассматривать как неявную функцию от переменных **x** и **y**. Предположим, что известна начальная оценка значения переменной x < 4. Идея недоопределенных вычислений состоит в том, что по текущей оценке поочередно вычисляются проекции функций F_1 и F_2 на x и y. Например, проекция F_1 на y для x $= 4$ равняется 3 (см. рис. 6).

Теперь, если для $y = 3$ вычислять проекцию F_2 на x, то получим значение $x = 0.75$, а F_1 при этом значении определяет $= -0.25$. Результат такой проекции изображен на рис. 7. В свою очередь F_2 при этом значении определяет $= 3.0625$ (см. рис. 8).

Продолжая этот процесс, мы шаг за шагом по спирали автоматически приближаемся к искомому решению (см. рис. 9).

Очевидно, что начальное ограничение $x < 4$ порождает две спирали — одна от подстановки $x = 4$ в F_1 и другая — в F_2. Таким образом, ограничение $x = [a1, a2]$ порождает четыре спирали, а добавление к нему ограничения $y = [в1, в2]$ доводит число спиралей до восьми, причем они взаимодействуют: часть их закручивается, как рассмотренная, другие — раскручиваются (при этом раскручивание автоматически блокируется механизмом, обеспечивающим монотонность процесса общего стягивания — см. главу 5).

Напомним, что параметры реальных задач всегда имеют начальные оценки границ их значений. Это имеет место даже в тех случаях, когда исходные ограничения на область значений того или иного числового параметра не заданы явно, поскольку оценка значения от минус до плюс бесконечности всегда представляются в машине двумя конкретными числами — максимальными положительным и отрицательным значениями числа в данном компьютере.

Таким образом, для k интервальных Н-переменных всегда одновременно будут параллельно реализоваться $4*k$ спиралей, которые сообща монотонно (в общем случае, $2*k$ закручивающихся точек) стягиваются к одному и тому же результату, независимо от порядка выполнения соответствующих шагов.

В рассмотренном примере система имела одно решение. Однако в сложных задачах решений может быть несколько или даже много, — в последнем случае они могут образовывать область решений или систему таких областей в K-мерном пространстве модели. При этом процесс решения будет сужать k-мерный параллепипед, охватывающий соответствующую систему областей.

Продолжение следует.

Список литературы

1. Нариньяни А. С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1986. № 5. С. 3–28.

2. Нариньяни А. С. Модель или алгоритм: новая парадигма информационной технологии // Информационные технологии. № 4. 1997.

3. Нариньяни А. С. Телерман В. В., Ушаков Д. М., Швецов И. Е. Программирование в ограничениях и недоопределенные модели // Информационные технологии. № 7. 1998.

4. Нариньяни А. С. НЕ-факторы: краткое введение // Новости ИИ. 2004. № 2.

5. Нариньяни А.С. Недоопределенные множества — новый тип данных для представления знаний. Новосибирск, 1980. (*Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; № 232*).

6. Нариньяни А. С. Недоопределенные модели и операции с недоопределенными значениями. Новосибирск, 1982. (*Препр./ АН СССР. Сиб. отд-ние ВЦ; № 400*).

7. Дмитриев В. Е. UniCalc — интеллектуальный решатель систем алгебраических уравнений и неравенств // Искусственный интеллект-90: Тр. 12 Всесоюзной конференции. Минск, 1990.

8. Semenov A. L., Leshchenko A. S. Interval and Symbolic Computations in the UniCalc Solver // *Inter. Conf. on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering (INTERVAL-94):* Abstracts. St-Petersburg, Russia, 1994. P. 206–208.

9. Shvetsov I., Kornienko V., Preis S. Interval spreadsheet for problems of financial planning. PACT‘97, England, London, April 1997.

10. Борде С. Б. Time-EX — интеллектуальная система планирования времени // Интеллектуальные системы в машиностроении: Тез. Докл. Всесоюз. Научно-тех. конф. Секция: Интеллектуальные производственные системы. Самара, 1991. Ч. 1. С. 79–81.

11. Банасюкевич Д. В., Гофман И. Д., Инишев Д. А., Нариньяни А. С. Интеллектуальная технология недоопределенного планирования и управления проектами Time-EX // Труды II-ой международной конференции CSCMP-2000, Самара, 2000.

12. Юртаев А. В. Недоопределенные модели — нетрадиционный подход к математическим исследованиям экономики // Информационные технологии. 1999. N 4. С. 36–41.

13. Напреенко В. Г., Нариньяни А. С., и др. Моделирование национальной экономики с использованием аппарата недоопределенных моделей // В сборнике „Проблемы управления и моделирования в сложных системах“. Труды II Международной конференции. Самарский научный центр РАН, Самара 2000.

14. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

15. Montanari U. Networks of Constraints: Fundamental Properties and Applications to Picture Processing // *Inform. Sci.* V. 7, 1974. P. 95–132.

16. Нариньяни А. С. Модель или алгоритм: новая парадигма информационной технологии // Информационные технологии, 1997. № 4.

17. Colmerauer A. An introduction to Prolog III // *Communications of the ACM*, N 33 (7). July 1990. P. 69–90.

18. Jaffar J., Michayov S., Stuckey P., Yap R. The CLP(R) language and system // *ACM Transactions on Programming Languages and Systems.* N 14 (3), July 1992. P. 339–395.

19. Benhamou F., Older W.J. Applying Interval Arithmetic to Real, Integer and Boolean Constraints // *Journal of Logic Programming*, 32 (1), 1997. P. 1–24.

20. Diaz D., Codognet P. A minimal extension of the WAM for clp (FD) // *Proceedings of the 10th International Conference on Logic Programming*, 1993. P. 774–790.

21. Van Hentenryck P. Constraint Satisfaction in Logic Programming. *Logic Programming Series.* MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

22. Puget J.-F.. A C++ Implementation of CLP. *Tech. Report*, Ilog, January 1994.

23. Benhamou F., McAllester D., Van Hentenryck P. CLP(Intervals) Revisited // *Proceedings of ILPS'94*, Ithaca, NY, 1994. P. 124–138.

24. Телерман В. В., Ушаков Д. М. Недоопределенные модели: формализация подхода и перспективы развития // *Проблемы представления и обработки не полностью определенных знаний*, сб. трудов РосНИИ Искусственного Интеллекта / ред. И. Е. Швецов, Москва–Новосибирск. 1996. С. 7–30.

25. Загорулько Ю. А., Попов И. Г. Представление знаний в интегрированной технологической среде Semp-TAO // *Проблемы представления и обработки не полностью определенных знаний*, сб. трудов РосНИИ Искусственного Интеллекта / ред. И. Е. Швецов, Москва–Новосибирск. 1996. С. 59–74.

26. Нариньяни А. С. Неточность как НЕ-фактор. Попытка доформального анализа. Новосибирск, 1994. (Препр./Рос. НИИ ИИ; 2).

27. Нариньяни А. С. Неоднозначность и ее функции в процессе коммуникации // Сб. Труды нац. конф. по искусственному интеллекту КИИ'96, окт. 1996. Казань, 1996.

28. Нариньяни А. С. НЕ-ФАКТОРЫ: Неточность и Недоопределенность — различие и взаимосвязь // Изв. РАН, Теор. и сист. упр. 2000.- №. 5. С. 44–56.

29. Нариньяни А. С. НЕ-факторы: неоднозначность (до-формальное исследование) // Новости искусственного интеллекта. 2003. № 5–6.

30. Нариньяни А. С. Метатехнология Н-приложений. Научная сессия МИФИ-2005. Сборник научных трудов, Москва, 2005.

31. Напреенко В. Г., Нариньяни А. С., Айгазин Ж. Ж. Компьютерная модель управления национальной экономикой на примере Республики Казахстан // Труды VII-й международной конференции „Проблемы управления и моделирования в сложных системах“ Самара: Самарский Научный Центр РАН, 2005, с. 233–238

32. Напреенко В. Г., Нариньяни А. С., Смирнов Е. П. Моделирование региональной экономики: новый уровень качества и безопасности Финансы. Экономика, Безопасность. 2005. № 4, С. 33–38.

Александр Семенович Нариньяни (02.11.1937 — 26.04.2010) — один из ведущих советских и российских ученых в области искусственного интеллекта, действительный член Российской Академии Естественных Наук, вице-президент Советской и Российской ассоциации искусственного интеллекта, автор более 200 научных работ.

А. С. Нариньяни в 1963 г. окончил Московский инженерно-физический институт. С 1964 г. по 1988 г. работал в Вычислительном Центре СО АН СССР, где в 1971 г. под руководством академика А. П. Ершова защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему „Асинхронные вычислительные процессы над памятью“. В 1972 г. А. С. Нариньяни обратился к новому направлению исследований — искусственному интеллекту. В 1973 г. в ВЦ СО АН СССР под его руководством была создана научно-исследовательская группа по искусственному интеллекту, преобразованная в 1978 г. в лабораторию. С 1988 г. — генеральный директор государственной научной фирмы „Интеллектуальные Технологии“ (Москва — Новосибирск). С 1992 г. по 2002 г. возглавлял созданный по его инициативе Российский НИИ искусственного интеллекта в Москве. С 2003 г. — генеральный директор фирмы „ИнтеллиТек“.

Область научных интересов А. С. Нариньяни была весьма обширной — параллельные вычисления, представление знаний, интеллектуальные технологии, компьютерная лингвистика, программирование в ограничениях. В каждой из этих областей он оставил заметный след.

А. С. Нариньяни открыл такое явление в представлении знаний как НЕ-факторы и подробно его исследовал, уделив особое внимание одному из наиболее важных с практической точки зрения НЕ-факторов — недоопределенности. На его основе построен новый математический аппарат — недоопределенные модели (Н-модели), которые позволяют обрабатывать неточные (определенные с заданной погрешностью) и недоопределенные (заданные приблизительно областью возможных значений) значения параметров задачи. Для реализации Н-моделей А. С. Нариньяни предложил универсальный вычислительный алгоритм, который позволяет применять данный подход к самым различным классам задач. А. С. Нариньяни уделял большое внимание применению Н-моделей для решения практических задач. В 1990–2000-х гг. на основе этого аппарата был создан ряд прикладных и инструментальных систем для решения задач в области инженерных расчетов, финансов, календарного планирования и др.

Alexander Semenovich Narinyani (02.11.1937–26.04.2010) is one of the leading Soviet and Russian scientists in the field of artificial intelligence, a full member of the Russian Academy of Natural Sciences, a vice president of the Soviet and Russian Association of Artificial Intelligence, the author of more than 200 scientific papers.

In 1963 he graduated from the Moscow Engineering Physics Institute. From 1964 to 1988 he worked at the Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, where in 1971, under the guidance of Academician A. P. Ershova defended his thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on the theme „Asynchronous computing processes over memory.“ In 1972 A. S. Narinyani turned to a new direction of research — artificial intelligence. In 1973, in the Computing Center SB RAS under his leadership was established research group on artificial intelligence, transformed in 1978 into a laboratory. Since 1988 he was General Director of the state scientific firm „Intellectual Technologies“ (Moscow–Novosibirsk). From 1992 to 2002 he headed the Russian Scientific Research Institute of Artificial Intelligence, created on his initiative in Moscow. Since 2003 he was General Director of the firm „Intellect“.

Area of scientific interests of A. S. Narinyani was very wide —parallel computing, knowledge representation, intelligent technologies, computer linguistics, and constraintprogramming. In each of these areas, he made a significant contribution.

A. S. Narinyani discovered such phenomenon in the knowledge representation as NE-factors, and studied it in detail, paying particular attention to one of the most important from the practical point of view NE-factors — Subdefiniteness. On its basis a new mathematical apparatus was built which was names Subdefinite models (S-models). S-models allow processing inaccurate (defined with a given error) and underdefined (given approximately the range of possible values) values of task parameters. To realize the S-models A. S. Narinyani proposed a universal computational algorithm that makes it possible to apply this approach to the most diverse classes of problems. A. S. Narinyani paid much attention to the use of S-models for solving practical problems. In the 1990–2000's on the basis of this apparatus a number of applied and instrumental systems was created to solve problems in the field of engineering calculations, finance, scheduling, etc.

Дата поступления — 10.06.2018