

ON A MODEL OF THE DYNAMIC THEORY OF POROELASTICITY WITH MEMORY

Kh. Kh. Imomnazarov, R. K. Yusupov*

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
630090, Novosibirsk, Russia

*Karakalpak State University named after Berdakh,
742000, Nukus, Uzbekistan

This paper deals with obtaining a closed system of first order dynamic integro-differential equations for the velocity components of the displacement vector of an elastic porous body, a saturating fluid, and a stress tensor in a dissipative hydrodynamic approximation. The generalization of the poroelasticity theory consists as a rule, of taking into account dispersion and absorption. The main effect of the dissipation in a homogeneous medium of the theory of poroelasticity is caused by the friction at the boundaries between the saturating fluid and the matrix in the pores (the viscous dissipation mechanism) and leads to the introduction of additional terms into the equations of motion of the poroelasticity theory. In the published works of some authors, it is proposed to introduce additional terms with relaxation cores into the mathematical model of the poroelasticity of dissipation, as well as to take into account the non-ideality of both phases (for example, visco-poroelastic models of the medium). In different types of acoustic waves, the effect of dissipation manifests itself in various ways. An important result of the research into the propagation of acoustic waves in a saturated porous medium was the prediction of the existence of three types of oscillations: longitudinal waves of the first and second types (sometimes called fast and slow longitudinal waves) and a transverse wave (shear wave). If fast longitudinal and shear waves are inherently close to the waves in an infinite elastic medium, then a slow longitudinal wave with its considerable dispersion and attenuation caused by the movement of fluid particles relative to the skeleton is a new characteristic of a saturated porous medium. It is a slow longitudinal wave which is generated as a result of the viscous dissipation that is the strongest frequency-dependent attenuation, thus making this wave difficult to observe in fluid-saturated rocks. In the region of seismic (low) frequencies in a saturated porous fluid, described by the equations of the poroelasticity theory in the dissipative approximation, only fast longitudinal and transverse waves with low dispersion and attenuation propagate; the second longitudinal mode is diffusional and becomes a propagating wave only at sufficiently high frequencies. In particular, the theoretical and applied tasks of scientific instrumentation often have to deal with both ordinary problems of mechanics of porous fluid-saturated media (for example, the case of zone electrophoresis, when a porous medium (gel) is fluid-saturated), and problems of acoustics of porous media. This system of equations was obtained from a system of thermodynamically consistent system of quasilinear equations under the following assumptions: the porosity coefficient is a small parameter, the shear coefficients, and the inter-phase friction is a function of strain rate and relative phases velocities, respectively. The dependence of the dispersion relation of the resulting system on the physical and kinetic parameters was investigated. This mathematical model allows a correct passage to the limit with the disappearance of porosity to a nonlinear one-dimensional model of the elasticity theory in the case when the shear coefficient is a function of the strain rate. It is shown that the propagation velocity of shear waves in the high-frequency approximation tends to the velocity of the transverse wave for a homogeneous porous medium saturated with fluid.

Key words: porous medium, force friction, permeability, hyperbolic system, displacement velocity, relative velocity, convolution integral.

References

1. Castagna J. P., Sun S., Wu S. R. Instantaneous spectral analysis: detection of low-frequency shadows associated with hydrocarbons // *The Leading Edge*. 2003. V. 22. P. 120–127.
2. Korneev V. A., Goloshubin G. M., Daley T. V., Silin D. B. Seismic low-frequency effects in monitoring of fluid-saturated reservoirs // *Geophysics*. 2004. V. 69. P. 522–532.
3. Frenkel, Ya. I. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil // *J. Phys. USSR*. 1944. V. 8. P. 230–241.
4. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid I. // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1956. V. 28. P. 168–178.
5. Sanchez-Palencia, E. *Non-Homogeneous Media and Vibration theory* / Springer-Verlag, New York. 1980. P. 472.
6. Burrige R., Keller J. Poroelasticity equations derived from microstructure // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1981. V. 70. P. 1140–1146.
7. Nikolayevsky V. N. *The mechanics of porous and fractured media*. M.: Nedra, 1984.
8. Berryman J. G., Thigpen L. Linear dynamic poroelasticity with microstructure for partially saturated solids // *J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. P. 345–350.
9. Whitaker S. 1) Flow in porous media. I. A technical derivation of Darcy's law // *Transport in Porous Media*. 1986. V. 1. P. 3–25; 2) Flow in porous media. II. The governing equations for immiscible, two-phase flow // *Transport in Porous Media*. 1986. V. 1. P. 105–125; 3) Flow in porous media. III. Deformable media // *Transport in Porous Media*. 1986. V. 1. P. 127–154.
10. Pride S. R., Gangi A. F., Morgan F. D. Deriving the equations of motion for porous isotropic media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. N 6. P. 3278–3290.
11. Molotkov L. A. *Studies of wave propagation in porous and fractured media based on effective models of Bio and layered media*. SPb.: Nauka, 2001.
12. Dorovsky, V. N., Perepechko, Yu. V., Romensky, E. I. Wave processes in saturated porous elastically deformed media // *Comb., Expl. and Shock Waves*. 1993. N 1. P. 93–103.
13. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. *Mathematical modelling in the theory of multivelocitity continuum*. Nova Science, New York, 1995.
14. Johnson D. L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 176. P. 379–402.
15. Imomnazarov Kh. Kh., Imomnazarov Sh. Kh., Korobov P. V., Kholmurodov A. E. Direct and inverse problems for nonlinear one-dimensional equations of poroelasticity // *Doklady Mathematics*. 2014. V. 455. N 6. P. 640–642.
16. Imomnazarov Kh. Kh., Lholmurfodov A. E. *Modelirovanie I issledovanie pryamikh I obratnikh dinamicheskikh zadach porouprugosti*. Izd. Universitet, Tashkent, 2017.
17. Chistensen, R. *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, New York, 1971.
18. Yangiboev Z. The first Darboux problem for second order hyperbolic equations with memory // *Mathematical Modeling in Geophysics*. 2015. N 18. P. 49–52.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ С ПАМЯТЬЮ

Х. Х. Имомназаров, Р. К. Юсупов*

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

*Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
742000, Нукус, Узбекистан

УДК 517.956.3

В диссипативном гидродинамическом приближении получена замкнутая система динамических интегродифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент скорости вектора смещений упругого пористого тела, насыщающей жидкости и тензора напряжений. Исследована зависимость дисперсионного соотношения полученной системы от физических и кинетических параметров.

Ключевые слова: пористая среда, сила трение, проницаемость, гиперболическая система, скорость смещений, относительная скорость, интеграл свертки.

Введение. Присутствие воды и газа в подземных резервуарах приводит к фазовым сдвигам и зависимости от частоты изменения амплитуды сейсмических волн (например, [1, 2]).

В работах [3, 4] ввели двухфазную модель среды для описания взаимосвязанного распространения волн в пористой флюидонасыщенной среде. Большое внимание уделяется также моделям диссипации пористой среды и способам ее учета в уравнениях состояния.

Теория Френкеля-Био является линейной теорией эффективных двухфазных сред (модель среды состоит из жесткого пористого каркаса и насыщающей жидкости, заполняющей поры), уравнения которой выводятся при некоторых допущениях на основе постулирования определений функции плотности энергии упругой деформации и кинетической энергии. С использованием методов осреднения разными авторами были получены макроскопические уравнения динамической пороупругости (см., например, [5–11]), которые в целом согласуются с теорией Френкеля-Био в случае слабовязкого насыщающего флюида.

Фундаментальное свойство упруго-пористой насыщенной среды, следующее из теории Био, состоит в том, что в таких средах могут распространяться две продольные волны, быстрая и медленная, а также поперечная волна.

Эта система описывает распространения сейсмических волн в пористой среде и в изотропном случае содержит четыре независимых упругих параметра [3, 4]. Линеаризованная теория континуальной теории фильтрации является замкнутой системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторов скорости смещений упругого пористого тела и скорости жидкости [12, 13], также как теория Френкеля-Био описывает

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00729, код проекта 16-07-01052)

распространения сейсмических волн в пористой среде. Фундаментальное свойство упруго-пористой насыщенной среды состоит в том, что в таких средах могут распространяться две продольные волны, быстрая и медленная, а также поперечная волна. В отличие от него, в изотропном случае описывается тремя независимыми упругими параметрами.

В 1987 году Джонсон–Коплик–Дашен (JKD) [14] получили общее выражение для диссипации в случае случайных пор. Вязкие силы зависят в этой модели в частотной области от квадратного корня от частоты. Следовательно, это приводит во временной области к интегродифференциальному уравнению с сингулярным ядром.

В данной работе получена одномерная система динамических уравнений первого порядка относительно компонент вектора смещений упругого пористого тела, насыщающей жидкости и тензора напряжений в диссипативном приближении.

1. Одномерная система динамических уравнений пороупругости для поперечных волн в диссипативном приближении. Рассмотрим распространение нелинейных поперечных сейсмических волн в случае, когда парциальные плотности матрицы пористого тела ρ_s , насыщающей жидкости ρ_l , а также модуль сдвига μ являются постоянными, а сила трения, определяющая диссипацию энергии, является функцией разности скоростей $\varphi = \varphi(u - v)$. При таких предположениях система нелинейных одномерных уравнений пороупругости может быть записана в следующем виде [15, 16]:

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{\sigma}_x - \varepsilon\varphi, \\ \tilde{\sigma}_t &= c_t^2 u_x, \\ v_t &= \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где u и v — скорости пористой матрицы и насыщающей жидкости, соответственно; $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ — операторы дифференцирования; $\rho_s = \rho_s^f(1 - \phi)$, $\rho_l = \rho_l^f \phi$, ϕ — пористость, ρ_s^f и ρ_l^f — физические плотности пористого тела и насыщающей жидкости, соответственно; $\rho_s \tilde{\sigma}$ — тензор напряжений, $c_t = \sqrt{\mu/\rho_s}$, $\varepsilon = \rho_l/\rho_s$.

Линеаризуем систему (1), получим систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{\sigma}_x - \varepsilon\chi\rho_l(u - v), \\ \tilde{\sigma}_t &= c_t^2 u_x, \\ v_t &= \chi\rho_l(u - v), \end{aligned} \quad (2)$$

где χ — коэффициент межфазного трения.

В случае, когда пористая среда является с памятью, в системе (2) вводятся интегральные операторы свертки [14, 17]:

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{\sigma}_x - \varepsilon\chi\rho_l * (u - v), \\ \tilde{\sigma}_t &= c_t^2 u_x, \\ v_t &= \chi\rho_l * (u - v), \end{aligned} \quad (3)$$

где $*$ — является оператором свертки во времени.

В случае, когда поток жидкости в порах относится к типу Пуазейля, диссипативные члены в (3) даются выражением

$$\chi(t) = \chi_0 \delta(t) \iff \chi(t) * w(x,t) = \chi_0 w(x,t),$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака.

2. Дисперсионный анализ. Исследуем условие существования решения системы (3) в виде плоских монохроматических волн

$$(u, v, \tilde{\sigma}) = (u_0, v_0, \tilde{\sigma}_0) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (4)$$

Подставляя решения (4) в системе (3), приходим к однородным линейным алгебраическим уравнениям на амплитуды $u_0, v_0, \tilde{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} (\omega + i \varepsilon \rho_l \hat{\chi}(\omega)) u_0 - i \varepsilon \rho_l \hat{\chi}(\omega) v_0 + k \tilde{\sigma}_0 &= 0, \\ k c_t^2 u_0 + \omega \tilde{\sigma}_0 &= 0, \\ i \rho_l \hat{\chi}(\omega) u_0 + (\omega + i \rho_l \hat{\chi}(\omega)) v_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) $\hat{\chi}(\omega)$ — преобразование Фурье от функции $\chi(t)$ по времени.

Условие существования решений вида (4) сводится к равенству нулю определителя системы (5), и дисперсионное соотношение принимает вид

$$\frac{\omega^2}{k^2} \left(1 + i \frac{\hat{\chi}(\omega)}{\omega} \frac{\rho_l}{\rho_s} \rho \right) = \frac{\mu}{\rho_s} \left(1 + i \frac{\hat{\chi}(\omega)}{\omega} \rho_l \right).$$

Это выражение позволяет определить скорость $c_t(\omega) = \frac{\omega}{k}$.

Представим $c_t(\omega)$ в виде

$$c_t(\omega) = A(\omega) - i B(\omega),$$

где $A(\omega) = Re c_t(\omega)$, $B(\omega) = -Im c_t(\omega)$. В этом случае выражение (4) можно преобразовать [13]

$$(u, v, \tilde{\sigma}) = (u_0, v_0, \tilde{\sigma}_0) e^{-i\omega(t-x/u(\omega))} e^{-x/\lambda_\partial(\omega)}. \quad (7)$$

Скорость поперечной волны $u(\omega)$ и длина поглощения $\lambda_\partial(\omega)$ определяются посредством $A(\omega)$ и $B(\omega)$ формулами

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \frac{A^2(\omega) + B^2(\omega)}{A(\omega)}, \\ \lambda_\partial(\omega) &= \frac{A^2(\omega) + B^2(\omega)}{\omega B(\omega)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Высокочастотным пределам фазовой скорости волн сдвига удовлетворяет соотношение

$$\bar{c}_t^\infty = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}.$$

На рис. 1 и 2 показаны дисперсионные кривые, соответствующие скорости и длине поглощения поперечной волны. Физические параметры, используемые в численных экспериментах, взяты из [13, 14]:

$$\begin{aligned} - \hat{\chi}(\omega) &= \frac{\eta}{\kappa \rho_l} / \sqrt{1 + i \frac{\omega}{\Omega}}, & \Omega &= \frac{\eta \phi^2 \Lambda^2}{4 a^2 \kappa^2 \rho_l^f}, \\ - \rho_l^f &= 1040 \text{ (кг/м}^3\text{)}, & \rho_s^f &= 2650 \text{ (кг/м}^3\text{)}, \\ - \eta &= 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ (Па}\cdot\text{с)}, & \mu &= 2.93 \cdot 10^9 \text{ (Па)}, & \phi &= 0.335, \\ - a &= 2, & \kappa &= 10^{-11} \text{ (м}^2\text{)}, & \Lambda &= 2.19 \cdot 10^{-5} \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Систему (3) можно представить в случае с переменными коэффициентами в виде интегро-дифференциального уравнения относительно скорости смещений упругого пористого тела. В случае для малых значений пористости данное уравнение имеет вид [18]

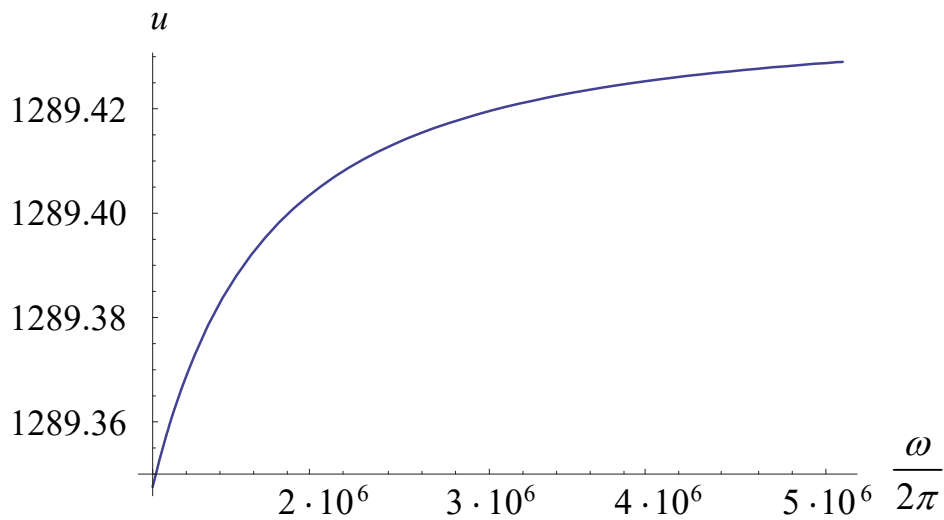


Рис. 1. Дисперсионная кривая скорости поперечной волны

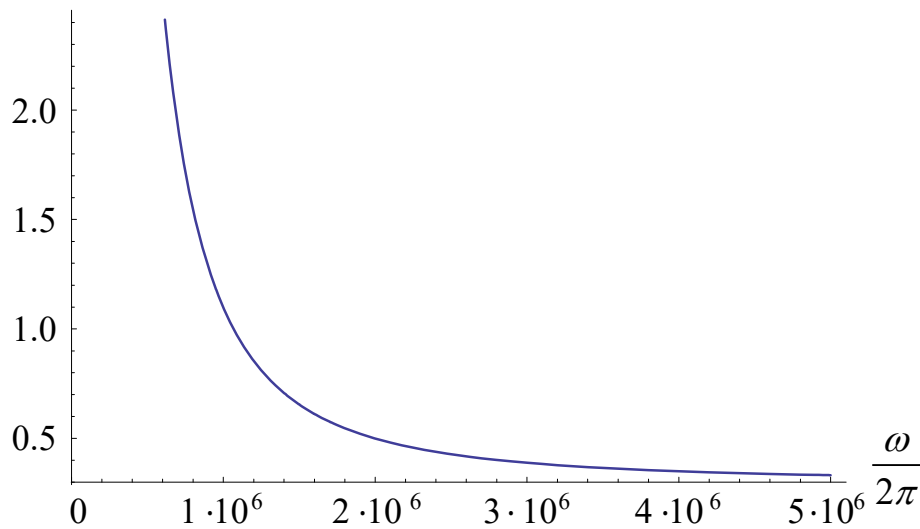


Рис. 2. Дисперсионная кривая длины поглощения поперечной волны

$$u_{tt}(t,x) - c_t^2(t,x) u_{xx} + \alpha_1(t,x) u_t(t,x) + \alpha_2(t,x) u_x(t,x) + \\ + \alpha_3(t,x) u(t,x) + \int_0^t \alpha_4(\tau,x) u(\tau,x) d\tau = f(t,x),$$

где коэффициенты $\alpha_k(t,x)u_t(t,x)$ ($k=1,2,3,4$) — заданные, не обращающиеся в нуль ни в одной точке функции, $f(t,x)$ — описывает источник.

Заключение. Построена термодинамически согласованная математическая модель для описания распространения сдвиговых акустических волн в насыщенных жидкостью пористых средах с учетом дисперсии, обусловленной межкомпонентным трением. Проведен дисперсионный анализ построенной математической модели. Представлены результаты численного моделирования распространения сейсмических волн для скорости и длины поглощения пробной модели среды.

Список литературы

1. Castagna J. P., Sun S., Wu S. R. Instantaneous spectral analysis: detection of low-frequency shadows associated with hydrocarbons // *The Leading Edge*, 2003. V. 22. P. 120–127.
2. Korneev V. A., Goloshubin G. M., Daley T. V., Silin D. B. Seismic low-frequency effects in monitoring of fluid-saturated reservoirs // *Geophysics*, 2004. V. 69. P. 522–532.
3. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // *Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика*. 1944. Т. 8, № 4. С. 133–150.
4. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid I. // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1956. V. 28. P. 168–178.
5. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
6. Burrige R., Keller J. Poroelasticity equations derived from microstructure // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1981. Vol. 70. PP. 1140–1146.
7. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М., 1984.
8. Berryman J. G., Thigpen L. Linear dynamic poroelasticity with microstructure for partially saturated solids // *J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. P. 345–350.
9. Whitaker S. 1) Flow in porous media. I. A technical derivation of Darcy's law // *Transport in Porous Media*. 1986. V. 1. P. 3–25; 2) Flow in porous media. II. The governing equations for immiscible, two-phase flow // *Transport in Porous Media*. 1986. V. 1. P. 105–125; 3) Flow in porous media. III. Deformable media // *Transport in Porous Media*. 1986. V. 1. P. 127–154.
10. Pride S. R., Gangi A. F., Morgan F. D. Deriving the equations of motion for porous isotropic media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. N 6. P. 3278–3290.
11. Молотков Л. А. Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001.
12. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // *Физика горения и взрыва*. 1993. № 1. С. 100–111.
13. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum, Nova Science, New York, 1995.
14. Johnson D. L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // *J. Fluid Mech.*, 1987, V. 176, P. 379–402.
15. Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Коробов П. В., Холмуродов А. Э. Прямая и обратная задача для нелинейных одномерных уравнений пороупругости // *Доклады Академии Наук*, 2014, том 455, № 6, С. 640–642.
16. Имомназаров Х. Х., Холмуродов А. Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017.
17. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости, Мир, 1974.
18. Yangiboev Z. The first Darboux problem for second order hyperbolic equations with memory // *Mathematical Modeling in Geophysics*. 2015. N. 18. P. 49–52.



Холматжон Худайназарович Имомназаров — д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН (ИВМ и МГ СО РАН); тел. (383) 330-

83-52, e-mail: imom@omzg.sscs.ru.

Холматжон Имомназаров получил степень магистра по математике в 1987 году в Новосибирском Государственном Университете. В 1996 году защитил кандидатскую диссертацию по математическому моделированию в Вычислительном Центре СО АН СССР. Самую высшую в России ученую степень — доктора наук, — Х. Имомназаров получил в 2001 году в Вычислительном Центре СО РАН. С 1987 года работает в области математического моде-

лирования. В 1987 году он стал сотрудником Вычислительного Центра РАН, где в настоящее время возглавляет лабораторию вычислительных задач геофизики. Им опубликованы 134 научные работы в таких областях, как математическое моделирование, обратные задачи для уравнений моделей многофазных сред. Его настоящие исследовательские интересы включают: технологии математического моделирования, прямые и обратные задачи для уравнений пористых сред.

Kholmatzhon Imomnazarov received his M.S. degree in Mathematics from the Novosibirsk State University (1987), Ph.D. degree in Mathematics (1996) from the Computing Center of the Academy of Sciences SB USSR. Doctor of Sciences degree (the highest degree in Russia) was received from the Computing Center SB RAS (2001). Since 1987 he is involved in mathematical modeling. In 1987 he started his work in the Computing Center, SB RAS, where he presently heads the Laboratory of Computational Problems of Geophysics. He has 134 published works in such areas as mathematical modeling, inverse problems for the equations of the multiphase media models. His current research interests include mathematical modeling technologies, direct and inverse problems for equations of porous media.

Равшанбек Кадамбаевич Юсупов — старший преподаватель Каракалпакского госу-

дарственного университета им. Бердаха; тел. (99861) 223-60-47.



Равшанбек Юсупов получил степень магистра в 2004 году в Каракалпакском Государственном Университете имени Бердаха. С 2004 года он работает ассистентом кафедры „Математический анализ“ в Каракалпакском Государственном Университете имени Бер-

даха. Им опубликовано две статьи, связанных с системой одномерных нелинейных динамических уравнений пороупругости для поперечных волн в необратимом приближении, на основе алгебры эквивалентности исследовано групповое свойство.

Ravshanbek K. Yusupov – Karakalpak State University named after Berdakh, senior lecturer; tel. (99861) 2236047.

Ravshanbek Yusupov received his Master's degree at the Karakalpak State University named after Berdakh in 2004. Since 2004, he has been working as an assistant at the Department of Mathematical Analysis at Karakalpak State University named after Berdakh. He has published two papers related to the system of one-dimensional nonlinear dynamic equations of poroelasticity for transverse waves in irreversible approximation on the basis of equivalence algebra, the group property of differential equations being investigated.

Дата поступления — 24.09.2018