



INVESTIGATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL SYSTEM OF THE BURGERS TYPE EQUATIONS BY THE WEAK APPROXIMATION METHOD

Kh. Kh. Imomnazarov, U. K. Turdiev*

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the SB RAS,
Novosibirsk, Russia

*Karshi branch of TUIT,
Karshi, Uzbekistan

This paper is concerned with obtaining a system of Burgers-type equations in one limit case from the system of equations of a two-fluid medium. The system in question differs from the system of equations of a two-fluid medium by the absence of pressure and the incompressibility conditions. For this reason, the problems associated with the Burgers-type system are called a system without pressure for a two-fluid medium. In the case when the dissipative function does not depend on the viscosity coefficients of the medium, we will call the Burgers-type non-viscous system or the Hopf-type system. In the one-dimensional case, we call it also the Riemann-type system of equations, which is a simple quasilinear system of equations. The system of equations of a two-fluid medium and the system of equations of the Burgers type have much in common. For example, the quadratic nonlinear terms - due to the phase velocities - respond to advective terms, corresponding to the dependence of sound on the amplitude of sound waves and linear terms caused by viscosities and the friction coefficient, which are responsible for the attenuation of the sound waves, wherein properties of solutions are completely different. With a Burgers-type equation system with disappearing viscosity coefficients and the friction coefficient, both strong (shock waves) and weak discontinuities are formed, while the solutions of a two-fluid system, do not possess such features. However, the scope of applicability of the system proposed is not limited to the examples given, such systems arise in many problems, which is what determines its importance. A study of the system of the Burgers-type equations arising in the nonlinear acoustics is presented. The proposed mathematical model is due to the combination of a conservative nonlinear system with a dissipative term; here, the dissipation is due to both the viscosity of subsystems and the inter-component friction coefficient (analogous to the Darcy coefficient), for which equivalent diffusion representations can be effectively used. The Cauchy problem for a one-dimensional system of the Burgers-type equations arising in a two-fluid medium is considered. The system under study is quasilinear, and analytical research methods do not allow one to obtain solutions to the Cauchy problem. One of the main methods for carrying out theoretical studies of the mathematical models of a two-fluid medium and applying them to solving important practical problems is numerical methods. Consequently, when studying efficient numerical algorithms, one of the main methods for their construction, is the method of weak approximation of differential equations. The weak approximation method, steering a middle course between the differential problem and the corresponding difference model can be used in two versions: as one of the methods for studying the correctness of the problem; as a method for constructing and rigorous mathematical analysis of the corresponding difference splitting schemes. The latter from this point of view are simple difference approximations of differential problems in fractional steps. In this paper, using the weak approximation method, we prove the existence and

This work was supported in part by the Russian Foundation of Fundamental Research under grant No 02-05-64939.

uniqueness of the solution to the Cauchy problem for a one-dimensional Burgers-type system in the dissipative approximation.

Key words: two-velocity hydrodynamics, Burgers type system, weak approximation method.

References

1. KULIKOVSKII A. G., SVESHNIKOV E. I., & CHUGAYNOVA A. P. Matematicheskie metodi izucheniya razrivenikh resheniy nelineynikh geperbolicheskikh system uravneniy [Mathematical methods for studying discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic systems of equations]. (Lekcionnie kursi NOS. Vip. 16), Moskva, 2010 (in Russian).
2. DOROVSKY V. N. Continual theory of filtration // Sov. Geology and Geophysics, 1989. N 7. P. 34–39.
3. DOROVSKY V. N., PEREPECHKO YU. V. Phenomenological description of two-velocity media with relaxing shear stresses // J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 1992. N 3. P. 403–409.
4. DOROVSKY V. N., PEREPECHKO YU. V. Theory of the partial melting // Sov. Geology and Geophysics. 1989. N 9. P. 56–64.
5. PEREPECHKO YU. V., SOROKIN K. E., IMOMNAZAROV KH. KH. The influence of acoustic vibrations on convection in a compressible two-fluid medium. In *Sbornik materialov Sovremennie problem mehaniki sploshnoy sredi* [Proceedings XVII International Conference "Contemporary Problems of Continuum Mechanics 2014], Rostov-on-Don, 2014, P. 166–169 (in Russian).
6. DEMIDOV G. V., NOVIKOV V. A. On the convergence of the method of weak approximation in a reflexive Banach space // Functional analysis and its applications. 1975. V. 9. N 1. P. 25–30.
7. GEGECHKORI Z. G., DEMIDOV G. V. On the Convergence of the Weak Approximation Method // DAN USSR. 1973. V. 213. N 2. P. 264–266.
8. DEMIDOV G. V., MARCHUK G. I. A theorem on the existence of a solution to the problem of short-term weather forecast // DAN USSR. 1966. V. 170. N 5. P. 1006–1009.
9. BELOV YU. YA., DEMIDOV G. V. Reshenie zadachi Koshi dlya sistemi uravneniy nipa Hopfa metodom slaboy approksimasiy // Chislennie metodi mexaniki sploshnoy sredi. Novosibirsk, VS SO AN SSSR. 1970. T. 1. N 2. S. 3–16.
10. DEMIDOV G. V. Nekotorie prilozheniya obobshchennoy neoremi Kovalevskoy // Chislennie metodi mexaniki sploshnoy sredi. Novosibirsk, VS SO AN SSSR. 1972. T. 2. N 2. S. 10–32.
11. RAPUTA V. F. Metod slaboy approksimasiy dlya zadachi Koshi v shkale banakhovich prostranstv // Chislennie metodi mexaniki sploshnoy sredi. Novosibirsk, VS SO AN SSSR. 1975. T. 6. N 1. S. 93–96.
12. BOYARINSEV YU. E. Regulyarnye i singulyarnye sistemy lineynikh obiknovennikh differensialnykh uravneniy. Novosibirsk: Nauka, 1980.
13. BELOV YU. YA., KANTOR S. A. Metod slaboy approksimasiy. Krasnoyarsk: Krasnoyarskiy Gos. Universitet, 1999.
14. BELOV YU. YA. On Estimates of Solutions of the Split Problems for Some Multi-Dimensional Partial Differential Equations // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2009. V. 2. N 3. P. 258–270.
15. YANENKO N. N. Metod drobnikh shagov resheniya mnogomernikh zadach matematicheskoy fiziki. Novosibirsk: Nauka, Sibirske otdelenie, 1967.
16. DEMIDOV G. V., YANENKO N. N. Metod slaboy approksimasiy // Trudi Vsesoyuznoy konferensii po uravneniyam s chastnymi proizvodnymi. M.: Izd. MGU, 1978. T. 1, S. 100–102.
17. SOBOLEV S. L. Nekotorie primeneniya funksionalnogo analiza v matematicheskoy fizike. Novosibirsk: SO AN SSSR, 1962.



ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА МЕТОДОМ СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Х. Х. Имомназаров, У. К. Турдиев*

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия

*Каршинский филиал ТУИТ,
Карши, Узбекистан

УДК 532.5

DOI: 10.24411/2073-0667-2019-00009

Получена система уравнений типа Бюргерса. Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса возникающая в двухскоростной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

Ключевые слова: двухскоростная гидродинамика, система типа Бюргерса, метод слабой аппроксимации.

Введение. В последние десятилетия математики становятся все более заинтересованы в проблемах, связанных с поведением решений систем уравнений в частных производных, с малым параметром при старших производных и с учетом кинетических параметров. Эти проблемы возникли из физических приложений, в основном из современной гидродинамики (сжимаемых многофазных жидкостей с малыми вязкостями). Аналогия уравнению Бюргерса возникает, например, при исследовании слабонелинейной одномерной акустической волны, движущейся с линейной скоростью звука. В этом случае нелинейные по скоростям члены в системе уравнений типа Бюргерса происходят из зависимости скоростей звука от амплитуды звуковой волны, а члены со второй производной и разности скоростей представляют затухание звуковых волн, связанное с диссиляцией энергии. Другими словами, эти члены, обеспечивают непрерывность решений и представляют диссилятивные процессы, связанные с производством энтропии. Эти члены, в свою очередь, обеспечивают неопрокидывание волн [1]. Рассматриваемая система является частным случаем системы уравнений двухскоростной гидродинамики в одномерном случае [2–5].

Одномерным аналогом уравнений Навье-Стокса для сжимаемых жидкостей можно считать систему уравнений типа Бюргерса, которая представляет собой систему нелинейных уравнений конвекции-диффузии

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx} - \tilde{b}(u - \tilde{u}), \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-51-41002).

$$\tilde{u}_t + \tilde{u} \tilde{u}_x = \tilde{\nu} \tilde{u}_{xx} + b(u - \tilde{u}), \quad (2)$$

где величины u и \tilde{u} можно рассматривать, как скорости подсистем с размерностью $[x]/[t]$, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями ρ и $\tilde{\rho}$, $\bar{\rho} = \tilde{\rho} + \rho$ — общая плотность континуума, $\tilde{b} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho} b$, b — коэффициент трения с размерностью $1/[t]$, который является аналогом коэффициента Дарси для пористых сред. Положительные константы ν и $\tilde{\nu}$ играют роль кинематических вязкостей подсистем с размерностью $[x]^2/[t]$.

У системы уравнений двухскоростной гидродинамики и системы уравнений типа Бюргерса много общего. Например, квадратичная нелинейность по u и \tilde{u} члены с адвективным слагаемым, отвечающим зависимости звука от амплитуды звуковых волн и линейных вязкостей ν , $\tilde{\nu}$, коэффициента трения b [1] в правых частях, отвечающие за затухание звуковых волн. Что касается свойств решений, то они совершенно разные. У системы уравнения Бюргерса при исчезающих коэффициентах ν , $\tilde{\nu}$, b формируются как сильные (ударные волны), так и слабые разрывы, в то время как решения системы двухскоростной гидродинамики такими особенностями не обладают. Однако область применимости этой системы отнюдь не ограничиваются приведенными примерами, такие системы возникают во многих задачах, чем и определяется ее значение.

В данной работе для доказательства существования и единственности решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса используется метод слабой аппроксимации. В наиболее полном виде метод слабой аппроксимации для линейных уравнений исследован Г. В. Демидовым и В. А. Новиковым [6].

З. Г. Гегечкори изучал расщепление многомерных эллиптических операторов со смешанными производными на одномерные (по различным направлениям) и сходимость таких методов для параболических задач.

Первые результаты о сходимости метода слабой аппроксимации для нелинейных уравнений принадлежат Г. И. Марчуку и Г. В. Демидову, доказавшим сходимость метода расщепления для одной из задач краткосрочного прогноза погоды [8].

Ю. Я. Беловым и Г. В. Демидовым исследована сходимость МСА для различных вариантов расщепления квазилинейной системы уравнений типа Бюргерса в [9].

Г. В. Демидовым, В. Ф. Рапутой метод слабой аппроксимации изучался для абстрактных нелинейных операторных уравнений, частными случаями которых являются системы типа Коши-Ковалевской [10, 11].

Ю. Я. Белов на основе МСА исследовал вопросы разрешимости и устойчивости стационарных решений распадающихся квазилинейных параболических систем уравнений первого порядка. Ю. Е. Бояринцевым доказаны достаточно общие теоремы сходимости МСА для обыкновенных дифференциальных уравнений, исследована возможность применения метода к задачам оптимального управления [12].

1. Задача Коши для системы уравнений типа Бюргерса. Рассмотрим для системы (1), (2) в полосе $\Gamma_{[0, T]} = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, x \in R\}$ задачу Коши со следующими начальными данными

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), \quad x \in R. \quad (3)$$

Нас будут интересовать решения задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса (1), (2) в отличие, а именно $u(t, x), \tilde{u}(t, x) \in C^{1,2}(\Gamma_{[0, T]})$ — класс функций один раз непрерывно дифференцируемых по t и два раза непрерывно дифференцируемых по x .

2. Метод слабой аппроксимации. Теорема сходимости метода слабой аппроксимации. Для полноты изложения приведем краткое описание метода слабой аппроксимации и одну теорему сходимости метода. Более подробно эта информация изложена в [13, 14].

В банаховом пространстве H рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + L(t)u = f(t), \quad t \in [0, T], \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (1.5)$$

где $L(t)$ — нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор с переменной областью определения $D(L(t))$, причем при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ оператор $L(t)$ отображает $D(L(t))$ в H .

Пусть $L = \sum_{i=1}^m L_i$, $f = \sum_{i=1}^m f_i$ и $\bigcap_{i=1}^m D(L_i(t)) \subseteq D(L(t))$. Считаем, что операторы $L_i(t)$ отображают $D(L_i(t))$ в H и функции $f_i(t) \in H$, $i = 1, \dots, m$.

Наряду с задачей (1.5), рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ :

$$\frac{du^\tau}{dt} + L_\tau(t)u^\tau = f_\tau(t), \quad t \in [0, T], \quad u^\tau|_{t=0} = u_0, \quad (1.6)$$

где

$$L_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\tau, t) L_i(t), \quad f_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i(\tau, t) f_i(t),$$

а функции $\alpha_i(\tau, t)$, $\beta_i(\tau, t)$ слабо аппроксимируют единицу, т. е. для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$ при $\tau \rightarrow 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\alpha_i(\tau, t) - 1) dt \rightarrow 0, \quad \int_{t_1}^{t_2} (\beta_i(\tau, t) - 1) dt \rightarrow 0.$$

Метод решения задачи (1.5), при котором в качестве приближенных решений u^τ , $\tau > 0$, берутся решения задачи (1.6) и решение u задачи (1.5) находится как предел при $\tau \rightarrow 0$ решений u^τ ($u = \lim_{\tau \rightarrow 0} u^\tau$), называется методом слабой аппроксимации ([13], [15], [14]).

Если функции $\alpha_i(\tau, t)$, $\beta_i(\tau, t)$ выбрать в виде

$$\alpha_i(\tau, t) = \beta_i(\tau, t) = \begin{cases} m, & (n + \frac{i-1}{m})\tau < t \leq (n + \frac{i}{m})\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \dots, N - 1$, то в этом случае нахождение решения u^τ задачи (1.6) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$\frac{du^\tau}{dt} + m L_1(t)u^\tau = m f_1(t), \quad t \in (0, \frac{\tau}{m}] \quad \text{— первый дробный шаг,}$$

$$u^\tau|_{t=0} = u_0,$$

$$\frac{du^\tau}{dt} + m L_2(t)u^\tau = m f_2(t), \quad t \in (\frac{\tau}{m}, \frac{2\tau}{m}] \quad \text{— второй дробный шаг.}$$

В качестве начальных данных на этом шаге берется значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t = \frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $((\frac{2\tau}{m}, \frac{3\tau}{m}], \dots, (\frac{(m-1)\tau}{m}, \tau]$. Тем самым находят решение на отрезке $[0, \tau]$ — нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на отрезке $[\tau, 2\tau]$ — первом целом шаге, затем — на отрезке $[2\tau, 3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов

(число это равно N) решение u^τ находят на отрезке $[0, T]$. Задачу (1.6) называют расщеплением задачи (1.5).

Рассмотрим в полосе $\tilde{\Gamma}_{[0, T]} = \{(t, \mathbf{x}) | 0 < t < T, \mathbf{x} \in R^n\}$ систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \varphi(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), \dots, u_l(t, \mathbf{x}))$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_l)$ — вектор-функции размерности l ($l \geq 0$). $\bar{\mathbf{u}} = \left(u_1, \dots, u_l, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u_l}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r}, \dots, \frac{\partial^r u_n}{\partial x_n^r} \right)$.

Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi^i$, $\varphi_j = \sum_{i=1}^m \varphi_j^i$, $j = 1, \dots, l$, где φ^i — вектор-функции размерности l ; φ^i , φ_j^i — j -е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Система

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^m a_{i,\tau}(t) \varphi_i(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^\tau), \quad (1.8)$$

где

$$a_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \leq \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$; $\tau N = T$ слабо аппроксимирует систему (4). $\varphi_{i,\tau}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^\tau)$ — некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^\tau)$, зависящие от τ .

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^m a_{i,\tau}(t) \varphi_{i,\tau}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^\tau), \quad (1.9)$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^\tau)$, зависящие от τ .

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.7), (1.8), (1.9). Под классическими решениями уравнений (1.8) ((1.9)) мы понимаем функцию u^τ , непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.8), в полосе $\tilde{\Gamma}_{[0, T]}$, обладающую кусочно-непрерывной производной u_t^τ в $\tilde{\Gamma}_{[0, T]}$ (u_t^τ может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $\tau N = T$, $i = 0, 1, \dots, m-1$) и удовлетворяющую уравнению (1.8) ((1.9)).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^\tau)$ на классических решениях $\bar{\mathbf{u}}^\tau$ системы уравнений (1.9) непрерывны по переменным $(t, \mathbf{x}) \in \tilde{\Gamma}_{[0, T]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ ($0 < \tau \leq \tau_0$) — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = T$. Через $u^{\tau_k}(t, \mathbf{x})$ обозначим решение системы (1.9) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение \mathbf{u}_k^τ системы (1.9) существует и при $\tau_k \rightarrow 0$ равномерно в $\tilde{\Gamma}_{[0, T]}^N = \{(t, \mathbf{x}) | 0 < t < T, |\mathbf{x}| \leq N\}$ последовательность \mathbf{u}_k^τ сходится к некоторой вектор-функции \mathbf{u} вместе со всеми производными по \mathbf{x} , входящим в (1.7), причем

$$\max_{\tilde{\Gamma}_{[0, T]}^N} = |\varphi_i(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^{\tau_k}) - \varphi_{i, \tau_k}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}^{\tau_k})| \rightarrow 0, \quad \tau_k \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Теорема. Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда вектор-функция $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ есть решение системы (1.7)

в $\tilde{\Gamma}_{[0, T]}^N$.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в [13].

3. Метод слабой аппроксимации для задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса. Рассмотрим относительно данных Коши u_0, \tilde{u}_0 задачи (1)–(3), предположим, что $u_0, \tilde{u}_0 \in C^2(R)$ и

$$|\frac{d^n u_0(x)}{dx^n}| \leq c_n, \quad |\frac{d^n \tilde{u}_0(x)}{dx^n}| \leq \tilde{c}_n, \quad x \in R, \quad n = 0, 1, 2, \quad (20)$$

где c_n, \tilde{c}_n — некоторые заданные неотрицательные постоянные.

В начале рассмотрим случай бесконечно дифференцируемых данных Коши. Предположим, что $u_0, \tilde{u}_0 \in C^\infty(R)$ и

$$|\frac{d^n u_0(x)}{dx^n}| \leq c_n, \quad |\frac{d^n \tilde{u}_0(x)}{dx^n}| \leq \tilde{c}_n, \quad x \in R, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (21)$$

Следуя [9, 16], слабо аппроксимируем задачу Коши (1)–(3) задачей

$$u_t^\tau = 3\nu u_{xx}^\tau, \quad \tilde{u}_t^\tau = 3\tilde{\nu} \tilde{u}_{xx}^\tau, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \quad (22)$$

$$u_t^\tau + 3u^\tau u_x^\tau = 0, \quad \tilde{u}_t^\tau + 3\tilde{u}^\tau \tilde{u}_x^\tau = 0, \quad \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau < t \leq \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau, \quad (23)$$

$$u_t^\tau = -3\tilde{b}(u^\tau - \tilde{u}^\tau), \quad \tilde{u}_t^\tau = 3b(u^\tau - \tilde{u}^\tau), \quad \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau, \quad (24)$$

$$u^\tau(0, x) = u_0(x), \quad \tilde{u}^\tau(0, x) = \tilde{u}_0(x), \quad (25)$$

где $N\tau = t^*$, $N > 1$ — целое, $n = 0, 1, \dots, N-1$, и постоянная t^* удовлетворяет неравенству (30) (см. ниже).

Замечание. При построении решения задачи (22)–(25) на первых дробных шагах решается задача Коши для уравнения теплопроводности, а на вторых дробных шагах — задача Коши для уравнения переноса

$$v_t + 3v v_x = 0, \quad (26)$$

а на третьих дробных шагах — задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой имеет вид

$$u_t^\tau = u_0(x) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}(\tilde{u}_0(x) - u_0(x)) \left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

$$\tilde{u}^\tau = \tilde{u}_0(x)e^{-\bar{b}t} + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}\tilde{u}_0(x) \left(1 - e^{-\bar{b}t}\right) + \frac{3b}{\bar{b}}u_0(x) \left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

где $\bar{b} = 3(b + \tilde{b})$.

Известно, что в случае задачи Коши для уравнения (26) с начальными данными

$$v(0,x) = v_0(x), \quad (27)$$

ограниченными вместе со своими производными, может иметь место градиентная катастрофа, то есть может существовать $t_1 > 0$, такое, что классическое решение v этой задачи существует в полосе $\Gamma_{[0,t_1]}$, само остается в этой полосе ограниченным, но производная v_x в окрестности некоторой точки (t_1, x^0) становится неограниченной: $v_x(t,x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_1$, $x \rightarrow x^0$ [1, 11, 13].

Нетрудно показать, что если

$$\left| \frac{dv_0(x)}{dx} \right| \leq c_1, \quad (28)$$

то классическое решение задачи (26), (27) существует в полосе $\Gamma_{[0,t^*]}$, ограничено и

$$\left| v_x(t,x) \right| \leq \frac{c_1}{1 - 3c_1 t}, \quad (t,x) \in \Gamma_{[0,t^*]}, \quad (29)$$

где t удовлетворяет неравенству

$$1 - 3c_1 t^* > 0.$$

Пусть выполнены соотношения (21) и постоянные c_1 , \tilde{c}_1 и t^* удовлетворяют условиям

$$1 - c_1 t^* > 0, \quad 1 - \tilde{c}_1 t^* > 0 \quad (30)$$

тогда решение u^τ и \tilde{u}^τ в полосе $\Gamma_{[0,t^*]}$ существует и ограничено вместе со всеми своими производными по переменным t , x .

Очевидно, что при любом фиксированном τ решение u^τ и \tilde{u}^τ задачи (22)–(25) ограничены независимо от величины τ :

$$\left| u^\tau(t,x) \right| \leq c_0, \quad \left| \tilde{u}^\tau(t,x) \right| \leq \tilde{c}_0. \quad (31)$$

Повторяя рассуждение из [9], можно показать ограниченность частных производных решений u^τ и \tilde{u}^τ по x любого порядка равномерно по τ :

$$\left| \frac{\partial^k u^\tau(t,x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k \tilde{u}^\tau(t,x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t,x) \in \Gamma_{[0,t^*]}, \quad k = 0,1,\dots, \quad (32)$$

где C_k , \tilde{C}_k — некоторые положительные постоянные, такие что $C_0 = c_0$, $\tilde{C}_0 = \tilde{c}_0$.

Из неравенств (31), (32) и уравнений (22)–(24) следуют равномерные по τ оценки:

$$\left| \frac{\partial^{k+1} u^\tau(t,x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq s_k, \quad \left| \frac{\partial^{k+1} \tilde{u}^\tau(t,x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq \tilde{s}_k, \quad (t,x) \in \Gamma_{[0,t^*]}, \quad k = 0,1,\dots, \quad (33)$$

Из этих оценок следует, что u^τ , \tilde{u}^τ и их производные по x любого порядка равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $\Gamma_{[0,t^*]}$. На основании теоремы Арцела диагональным способом можно выбрать подпоследовательность $\{u^{\tau_k}\}$, $\{\tilde{u}^{\tau_k}\}$ последовательностей $\{u^\tau\}$, $\{\tilde{u}^\tau\}$, сходящуюся в $\Gamma_{[0,t^*]}$ к функциям u и \tilde{u} соответственно вместе со всеми производными по x , равномерно в каждой ограниченной области полосы $\Gamma_{[0,t^*]}$, вследствие чего функции u и \tilde{u} имеют производные любого порядка по x и выполняются соотношения

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \tilde{u}(0,x) = \tilde{u}_0(x), \quad (34)$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k \tilde{u}(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Gamma_{[0, t]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Единственность решения доказывается стандартным способом. Следовательно, и сами последовательности функций $\{u^\tau\}$, $\{\tilde{u}^\tau\}$ при $\tau \rightarrow 0$ сходятся равномерно в $\Gamma_{[0, t]}$ к u и \tilde{u} соответственно, вместе со всеми производными. Случай, когда $u_0, \tilde{u}_0 \in C^2(R)$, доказывается с помощью средних функций [17].

Заключение. Получена система уравнений типа Бюргерса. Эта система является упрощением системы уравнений модели двухжидкостной среды и отличается от системы уравнений модели двухжидкостной среды отсутствием давления и условиями несжимаемости. По этой причине семейство задач для системы типа Бюргерса иногда называется двухскоростной гидродинамикой без давления. Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухскоростной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

Список литературы

1. Куликовский А. Г., Свешников Е. И., Чугайнова А. П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. Москва, 2010.
2. Доровский В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
3. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 3. С. 94–105.
4. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. № 9. С. 56–64.
5. Перепечко Ю. В., Сорокин К. Э., Имомназаров Х. Х. Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде // Труды XVII Международной конференции „Современные проблемы механики сплошной среды“, Ростов-на-Дону, 2014, С. 166–169.
6. Демидов Г. В., Новиков В. А. О сходимости метода слабой аппроксимации в рефлексивном банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 1975. Т. 9. № 1. С. 25–30.
7. Гегечкори З. Г., Демидов Г. В. О сходимости метода слабой аппроксимации // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 2. С. 264–266.
8. Демидов Г. В., Марчук Г. И. Теорема существования решения задачи краткосрочного прогноза погоды // ДАН СССР, 1966. Т. 170. № 5. С. 1006–1009.
9. Белов Ю. Я., Демидов Г. В. Решение задачи Коши для системы уравнений типа Хопфа методом слабой аппроксимации // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1970. Т. 1. № 2. С. 3–16.
10. Демидов Г. В. Некоторые приложения обобщенной теоремы Ковалевской // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 1. № 2. С. 10–32.
11. Рапута В. Ф. Метод слабой аппроксимации для задачи Коши в шкале банаховых пространств // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1975. Т. 6(1). С. 93–96.
12. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980.
13. Белов Ю. Я., Кантор С. А. Метод слабой аппроксимации. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999.

14. BELOV YU. YA. On Estimates of Solutions of the Split Problems for Some Multi-Dimensional Partial Differential Equations // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2009. V. 2. № 3. P. 258–270.
15. ЯНЕНКО Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.
16. ДЕМИДОВ Г. В., ЯНЕНКО Н. Н. Метод слабой аппроксимации // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными. М.: Изд. МГУ, 1978. Т. 1. С. 100–102.
17. СОБОЛЕВ С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: СО АН СССР, 1962.



Холматжон Имомназаров получил степень магистра по математике в 1987 году в Новосибирском Государственном Университете. В 1996 году защитил кандидатскую диссертацию по математическому моделированию в Вычислительном Центре СО АН СССР. Самую высшую в России ученую степень — доктора наук — Х. Имомназаров получил в 2001 году в Вычислительном Центре СО РАН. С 1987 года работает в области математического моделирования. В 1987 году он стал сотрудником Вычислительного Центра РАН, где в настоящее время возглавляет лабораторию вычислительных задач геофизики. Им опубликованы 134 научные работы в таких областях как математическое моделирование, обратные задачи для уравнений моделей многофазных сред. Его настоящие исследовательские интересы включают: технологии математического моделирования, прямые и обратные задачи для уравнений пористых сред.

Kholmatzhon Imomnazarov received his M.S. degree in Mathematics from the Novosibirsk State University (1987), Ph.D. degree in Mathematics (1996) from the Computing Center of the Academy of Sciences SB USSR. Doctor of Sciences degree (the highest degree in Russia) was received from the Computing Center SB RAS (2001). Since 1987 he is involved in mathematical modeling. In 1987 he started his work in the Computing Center, SB RAS, where he presently heads the Laboratory of Computational Problems of Geophysics. He has 134 published works in such areas as mathematical modeling, inverse problems for the equations of the multiphase media models. His current research interests include mathematical modeling

technologies, direct and inverse problems for equations of porous media.



Турдиев Улугбек Каюмович родился в 1981 году в Кашкадарьинской области. В 2001–2005 годах обучался в бакалавриатуре по направлению „Математика“ в Каршинском государственном университете. В 2007 году получил степень магистра по специальности „Математический анализ“ в Каршинском государственном университете. С 2007 года работает ассистентом, старшим преподавателем кафедры естественных и общепрофессиональных дисциплин в Каршинском филиале Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий.

Ведет научную работу по теме „Математическое моделирование системы типа Бюргерса“ по специальности „Математическое моделирование“. Численные методы и комплексы программ. По теме научной работы опубликованы более 10 статей и тезисов в международных и республиканских конференциях.

Улугбек Турдиев разработал учебно-методические комплексы по преподаваемым дисциплинам: дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика.

Turdiev Ulugbek Kayumovich was born in 1981 in the Kashkadarya region. In the period from 2001 to 2005 he studied in the Karshi State University, after its graduation, he received his Bachelor's degree in Mathematics. In 2007, he received his Master's degree in Mathematical Analysis in the Karshi State University. Since 2007, he has been engaged as an assistant, senior lecturer at the Department of Natural and General

Professional Disciplines in the Karshi Branch of Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi.

He carries out scientific research into „Mathematical Modeling of the Burgers Type System“ in the specialty Mathematical Modeling. Numerical Methods and Program Packages. On

the topics of his scientific interests, he has published more than 10 papers and Proceedings of the International and Republican Conferences.

Ulugbek Turdiev has developed educational and methodological systems in such disciplines as Discrete Mathematics, Probability Theory and Mathematical Statistics.

Дата поступления – 21.09.2018