

## RELIABILITY ANALYSIS OF MULTILEVEL NETWORKS WITH UNRELIABLE VERTICES

A. M. Kalney, A. S. Rodionov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,  
630090, Novosibirsk, Russia

---

---

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10005

Random graphs and hypergraphs are commonly used to analyze untrusted networks. At the same time, in the case of hierarchical networks, modeling a network with a random graph may be insufficient. You can find various examples of such models: bigographs, sandwich graphs, graphs with different types of edges, application-level descriptions, multi-level complex networks (LCN), but they are not universal. Nevertheless, for more than 30 years, the hypernet model has been successfully used to model multilevel networks in several Russian, Kyrgyz and Kazakh universities. A hypernet allows you to adequately describe multilevel networks with an arbitrary number of levels. In this article, we will discuss the simplest case of two-level networks. Particular attention will be paid to obtaining indicators of the connectivity of secondary networks of two-level hypernets, depending on the probability of the presence of vertices in the primary network. We selected indicators based on the probability of the connectivity of a pair of nodes of the secondary network with possible damage to the primary network: the arithmetic probability of the connectivity of a pair of nodes of the network (APC), the average size of the connected subgraph containing the selected vertex (ASCS). It is assumed that the sets of vertices of the primary and secondary networks coincide. The article gives an example of the algorithm for the ASCS indicator, which shows the possibility of using it to optimize the placement of environmental monitoring sensors of a part of the Novosibirsk transport network.

The task of accurately calculating the connectivity probability of a random network with unreliable elements belongs to the class of NP-hard ones; therefore, various approximate methods were previously used in practice, while exact calculation methods were mostly of purely academic interest. However, the development of computer technology has led to a revival of interest in the use of exact methods in practice, since it became possible in a reasonable time to calculate the reliability of small and medium-sized networks (up to tens of nodes). Of the exact methods for determining the probability of a network being connected with unreliable elements, the factorization or Moore-Shannon method is most widely known. This method consists in recursively breaking a hypernet into several simpler branches, respectively, where the vertex is „reliable“ (the probability of presence becomes equal to one) and where it is removed. Recursion continues until a reliable path connecting the selected vertices is obtained, or until an unconnected secondary network is obtained; the recursion also ends when a two-vertex hypernet is received. Due to the fact that the number of recursions grows exponentially with the number of vertices, additional techniques are required to accelerate this method. The following methods are used: before calling a recursion, edges in hanging trees and in connected components that do not contain selected vertices in the secondary network are deleted, when the vertex is deleted, the network connectivity is checked and if both selected vertices are in the same connected component, then the reliability is calculated in this component, if the selected vertices lie in different components, then we get a disconnected network. In both of the above methods, the number of elements of the hypernet decreases, the reliability indicator does not change.

The article considers the reliability analysis of multilevel networks represented by hypernets. Indicators were selected based on the connectivity probability of a pair of nodes of the secondary network with possible destruction of the primary network. A program was written, methods were developed to accelerate the calculation of the value of reliability indicators of a hypernet, which are derivatives of pair reliability. As a result of numerical experiments, it was concluded that it is possible to use the proposed algorithms to optimize the reliability of networks of medium (up to tens of nodes) dimensions. Further research is related to the consideration of more complex structures of hypernets, new indicators of their reliability and the development of parallel algorithms.

**Key words:** multilevel networks, modeling, Hypernets, reliability analysis.

## References

1. Waxman B. M. Routing of Multipoint Connections // IEEE JSAC, 1993. N 9. P. 1617–1622.
2. Doar M. Multicast in the ATM environment / PhD thesis, Cambridge Univ., Computer Lab., 1993.
3. Kumar R., Raghavan P., Rajagopalan S., Sivakumar D., Tomkins A., and Upfal E. Stochastic models for the Web graph // Proc. 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science. 2000. 57–65.
4. Albert R. and Barabasi A. L. Statistical mechanics of complex networks // Review Modern Physics. 2002. N 74. P. 47–97.
5. Yano A. and Wadayama T. Probabilistic Analysis of the Network Reliability Problem on a Random Graph Ensemble // arXiv:1105.5903v3, 2011. [Electron. Res.]: <http://arxiv.org/pdf/1105.5903.pdf>.
6. Bobbio A., Terruggia R., Ciancamerla E., and Minichino M. Evaluating network reliability versus topology by means of bdd algorithms // PSAM-9, Hong Kong, 2008.
7. Milner R. Bigraphs, a Tutorial // [Electron. Res.]: [www.cl.cam.ac.uk/users/rm135](http://www.cl.cam.ac.uk/users/rm135), 2005.
8. Kim J. H. and Vu V. Sandwiching random graphs // Advances in Mathematics, 2004. N 188. P. 444–469.
9. Dijkstra F., Andree B., Koymans K., van der Hama J., Grosso P., de Laat C. A multi-layer network model based on ITU-T G.805 // Computer Networks, 2008. N 52. P 1927–1937.
10. He F., Xin C. Cross-Layer Path Computation for Dynamic Traffic Grooming in Mesh WDM Optical Networks / Norfolk State University, Technical Report NSUCS-2004-009.
11. Orłowski S., Koster Arie M. C. A., Raack C., Wessally R. Two-layer Network Design by Branch-and-Cut featuring MIP-based Heuristics // Proceedings of INOC 2007, International Network Optimization Conference.
12. Chigan C., Atkinson G., Nagarajan R. On the Modeling Issue of Joint Cross-Layer Network Protection/Restoration // Proceedings of Advanced Simulation Technologies Conference 2004 (ASTC'04). P. 57–62.
13. Kurant M., Thiran P. Layered Complex Networks // Phys. Rev. Lett. 96, 2006. 138701-1 — 138701-4.
14. Popkov V. K. Matematicheskie modeli svyaznosti, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Novosibirsk, 2006.
15. Popkov V. K., Sokolova O. D. Application of Hyperneet Theory for the Networks Optimazation Problems // 17th IMACS World Congress, July 2005, Paper T4-I-42-011.
16. Rodionov A. S., Sokolova O., Yurgenson A., Choo H. On Optimal Placement of the Monitoring Devices on Channels of Communication Network // ICCSA 2009, Part II, LNCS, Vol. 5593. P. 474–487.
17. Rodionov A. S., Choo H., Nechunaeva K. A. Framework for Biologically Inspired Graph Optimization // Proceedings of ICUIMC 2011, Seoul, Republic of Korea, 2011. Paper 2.5, 4 pages.

- 
18. The Connectivity and Fault-Tolerance of the Internet Topology / Palmer C. R. and others. // Workshop on Network Related Data Management. 2001. P. 1–10.
  19. Colbourn C. J. Some open problems on reliability polynomials // Congr. Numer. 93. 1993. P. 187–202.
  20. Valiant L. G. The complexity of computing the permanent // Theor. Comput. Sci. 1979. P. 189–201.
  21. Rodionov A., Rodionova O. Random Hypernets in Reliability Analysis of Multilayer Networks // Springer International Publishing Switzerland 2015, Computational Problems in Science and Engineering, Lecture Notes in Electrical Engineering 343, P. 307–313.
  22. Rodionov A. S. K voprosu uskoreniya polinoma nadyozhnosti sluchajnogo grafa // Avtomatika i telemekhanika. 2011. N 7. S. 134–136.
  23. Mur E., SHennon K. Nadezhnye skhemy iz nenadezhnyh rele // Kiberneticheskij sb. M.: Inostr. lit., 1960. N. 1. S. 109–148.

## АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ МНОГОУРОВНЕВЫХ СЕТЕЙ С НЕНАДЕЖНЫМИ ВЕРШИНАМИ

А. М. Кальней, А. С. Родионов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.718

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10005

Рассматриваются вопросы расчета показателей надежности многоуровневых сетей с ненадежными вершинами. Представление показателя: вероятность связности пары узлов сети, средняя арифметическая вероятность связности пары узлов сети (АРС), средний размер связного подграфа, содержащего выделенную вершину (ASCS). Для математического описания многоуровневых сетей используется гиперсеть. Был разработан алгоритм на основе известных методов расчета сети с ненадежными элементами. В статье приведен пример работы алгоритма для показателя ASCS, который показывает возможность его использования для оптимизации расстановки датчиков мониторинга окружающей среды части транспортной сети Новосибирска.

**Ключевые слова:** многоуровневые сети, моделирование, гиперсети, анализ надежности.

**Введение.** Случайные графы и гиперграфы обычно используются для анализа ненадежных сетей [1–6]. В то же время, во многих случаях моделирование сети случайным графом может быть недостаточным, что показывает следующий пример двухуровневой сети. Пусть имеется кабельная сеть, представленная графом  $G_1$ , и пусть некоторая сеть, осуществляющая транспортировку данных, лежит в ней. Эта сеть может быть представлена графом  $G_2$ , который необязательно совпадает с  $G_1$ . Назовем  $G_1$  первичной сетью ( $PN$ ), в то время как  $G_2$  назовем вторичной сетью ( $SN$ ). Вложение  $G_2$  в  $G_1$  может быть сделано различными способами. Однако, имеется некоторое отображение связей  $SN$  в пути, состоящее из связей  $PN$  (в дальнейшем будем называть эти связи ветвями). Очевидно, выход из строя или изменение пропускной способности ветви может привести к выходу из строя или изменению пропускной способности нескольких  $SN$  связей или не изменить ни одну из них. Поэтому для анализа многоуровневой сети необходима более сложная модель, чем случайный граф.

Можно найти различные примеры таких моделей [7–13], но все они не являются универсальными. Тем не менее, уже более чем 30 лет модель гиперсети успешно используется для моделирования многоуровневых сетей [14–17]. Эта модель в дальнейшем используется автором в качестве объекта исследования.

Существует много показателей надежности сетей. Обычно выбор показателя надежности осуществляется исходя из особенностей конкретной сети и ее назначения. Связность сети, максимальная пропускная способность, время восстановления работоспособности и многие другие характеристики сети могут быть выбраны в качестве показателей надежности [18]. В большинстве случаев в качестве показателя надежности моделируемых структур рассматривается вероятность связности выделенного подмножества вершин.

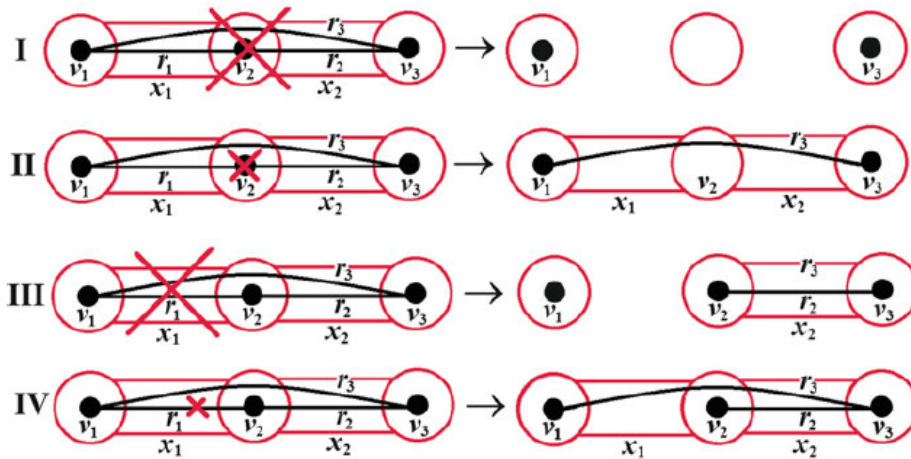


Рис. 1. Варианты разрушения гиперсети

Задача точного вычисления вероятности связности случайной сети с ненадежными элементами относится к классу NP-трудных [20], поэтому ранее на практике использовали различные приближенные методы, тогда как точные методы расчета представляли в большей степени чисто академический интерес. Однако развитие вычислительной техники привело к возрождению интереса к использованию точных методов на практике, так как появилась возможность за разумное время рассчитывать надежность сетей малой и средней размерности (до десятков узлов).

Особенностью задач исследования многоуровневых сетей является зависимость качества вложенных сетей от состояния сетей более высокого уровня. Например, надежность связи виртуальной сети передачи данных зависит от состояния физических каналов, а сети транспортных перевозок — от состояния дорожной сети.

**1. Математическая постановка задачи.** Общее описание модели гиперсети дано в [14]. Основанная на этом описании модель случайной гиперсети предложена в [21]. Единственным отличием от последней будет то, что ненадежными элементами в первичной (физической) сети будут вершины, а не ветви.

$[H = (PN, SN, F)]$  — гиперсеть состоящая из первичной сети  $PN$ , вторичной сети  $SN$  и отображения  $F$ .

$[PN = (X, V)]$  — неориентированный граф с множеством вершин  $X$  и множеством ветвей  $V$ .

$[SN = (X, R)]$  — неориентированный граф с множеством вершин  $X$  и множеством ребер  $R$ .

$[F : R \rightarrow 2^V]$  — Отображение ребер в маршруты  $PN$ .

$[n = |X|]$  — число вершин.

$[m = |V|]$  — число ветвей.

$[k = |R|]$  — число ребер.

$[p_i]$  — вероятность, что вершина  $i$  исправна.

$[q_i = (1 - p_i)]$  — вероятность того, что вершина неисправна.

$[R_k(p_1 \dots p_n)]$  — вероятность того, что гиперсеть имеет связными во вторичной сети  $k$  выделенных вершин.

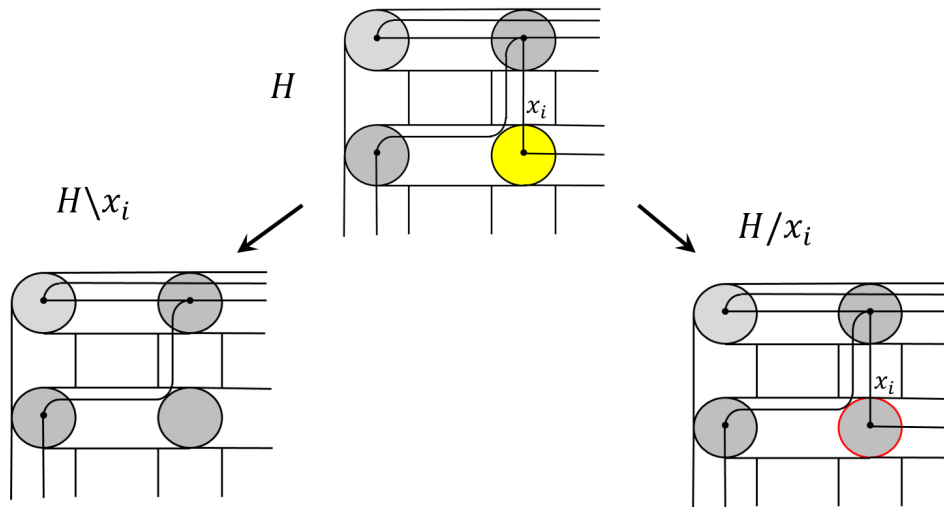


Рис. 2. Метод факторизации (Мура–Шеннона)

Возможны различные варианты разрушения гиперсети, они представлены на рис. 1, заимствованном из [21]. В данной работе используется I вариант разрушения вершин сети для анализа характеристик вторичных сетей.

Первым рассматриваемым показателем надежности будет вероятность связности пары узлов вторичной сети, в дальнейшем этот показатель будем называть парной надежностью гиперсети. Выделенные вершины обозначим как  $s, t$ .

Аддитивные показатели, которые можно получить исходя из этого показателя:

— Среднее арифметическое вероятности связности пары узлов сети (АРС, от англ. Average pairwise connectivity):

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n R_{ij} / C_2^n. \quad (1)$$

Этот показатель характеризует возможность установления произвольного парного соединения во вторичной сети.

— Средний размер связного подграфа, содержащего выделенную вершину (ASCS, от англ. Average size of connected subgraph). Обычно выделенная вершина имеет номер 1, тогда получаем:

$$C = w_1 + \sum_{i=2}^n w_i R_{1i}. \quad (2)$$

Все веса изначального графа  $w_i$  равны единице. Этот показатель используется как характеристика качества сети мониторинга с точки зрения покрытия мониторируемой области.

**2. Вычисление связности гиперсети.** Из точных способов вычисления аддитивных характеристик ненадежных структур, в частности вероятности связности сети с ненадежными элементами наиболее широко известен метод факторизации или Мура-Шеннона [23], в дальнейшем этот способ используется в качестве основного (см. пример на рис. 2):

$$R_{st}(H) = p_i R_{st}(H/x_i) + (1 - p_i) R_{st}(H \setminus x_i) \quad (3)$$

где  $x_i$  — произвольная вершина гиперсети  $H$ ,  $p_i$  — вероятность присутствия вершины  $x_i$ ,  $H/x_i$  — гиперсеть где вершина  $x_i$  является „онадеженной“ (т. е. вероятность присутствия

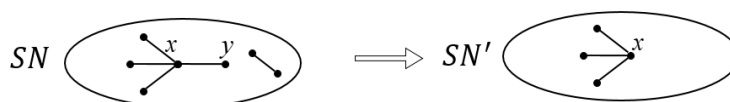


Рис. 3. Редукция ребер

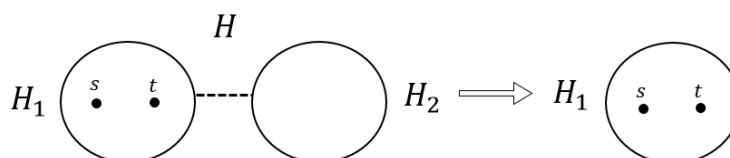


Рис. 4. Редукция мостов

ветви становится равна единице),  $H \setminus x_i$  — гиперсеть, получаемая из  $H$  удалением вершины  $x_i$ . Заметим, что при удалении вершины может быть разрушено более одного ребра, либо ни одного. Данный метод заключается в последовательном рекурсивном разбиении гиперсети по состояниям вершин на несколько более простых, соответственно, где вершины „онадеженны“ либо удалены. Рекурсии продолжаются до получения:

- Надежного пути, соединяющего выделенные вершины. Рекурсия оканчивается и возвращается  $R_{st} = 1$ .
- Несвязанной вторичной сети. Рекурсия оканчивается и возвращается  $R_{st} = 0$ .
- Гиперсети с двумя вершинами. Рекурсия оканчивается и возвращается  $R_{st} = 1$ .

Для сокращения пространства перебора предложены методы редукции гиперсети применительно к расчету рассматриваемых показателей:

— Производятся удаления ребер в висячих деревьях и в компонентах связности не содержащих обе выделенные вершины во вторичной сети  $SN$ . Назовем это преобразование редукцией ребер.

— Редукция мостов возникает, когда при удалении ветви получаем несколько компонент связности в первичной сети  $PN$ . Если в одной из них находятся обе выделенных вершины, тогда вычисление надежности проводится в этой компоненте связности. Иначе получаем несвязанную вторичную сеть  $SN$ .

Во всех вышеперечисленных методах уменьшается количество элементов гиперсети, показатель надежности не изменяется.

**3. Пример.** В качестве первичной сети рассмотрим транспортную сеть части г. Новосибирска, состоящую из Академгородка и микрорайонов „Шлюз“ и „ОбьГЭС“. Будем рассматривать задачу поиска места расположения базовой станции сети мониторинга окружающей среды базируясь на значении показателя ASCS. Сеть мониторинга окружающей среды генерируем случайно, а укладка ее связей в первичную сеть производится по кратчайшим путям. Вариант сети и места расположения базовых станций представлены на рис. 4.

Для вершины  $A$  имеем  $C = 29,608$ , а для вершины  $B$   $C = 38.04$ , что определяет ее преимущество по выбранному показателю (обсуждение выбора метода решения задачи определения наилучшего местоположения базовой станции лежит за пределами данной статьи).

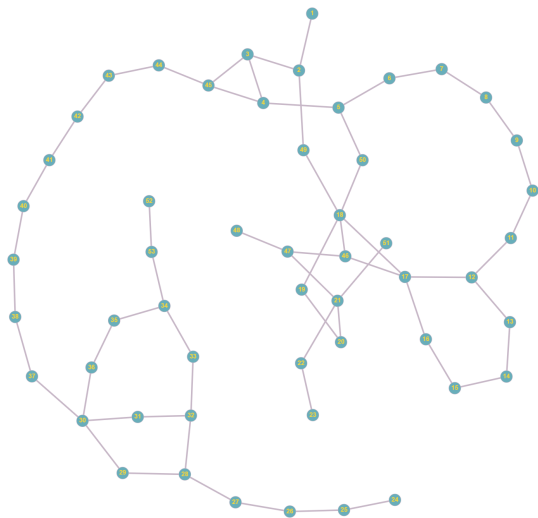


Рис. 5. Первичная сеть (топология дорожной сети)

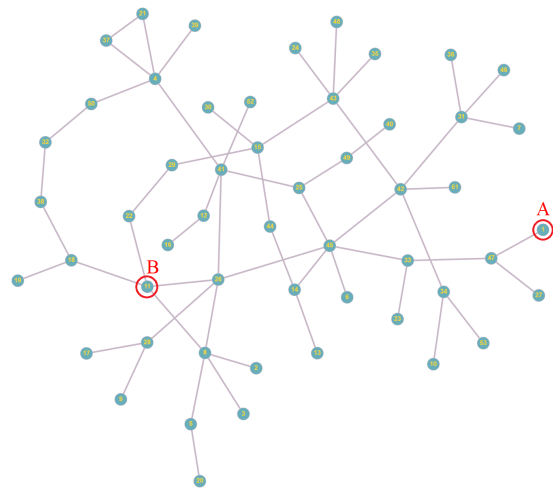


Рис. 6. Вторичная сеть (топология сети мониторинга)

**Заключение.** В статье рассмотрены вопросы анализа надежности многоуровневых сетей, представленных гиперсетями. Были выбраны показатели, основанные на вероятности связности пары узлов вторичной сети при возможных разрушениях сети первичной. Была написана программа, разработаны методы для ускорения вычислений значения показателей надежности гиперсети, являющихся производными от парной надежности. В результате численных экспериментов был сделан вывод о возможности использования предложенных алгоритмов для оптимизации надежности сетей средней (до десятков узлов) размерности.

Дальнейшие исследования связаны с рассмотрением более сложных структур гиперсетей, новых показателей их надежности и разработкой параллельных алгоритмов.

## Список литературы

1. Waxman B. M. Routing of Multipoint Connections // IEEE JSAC, 1993. N 9. P. 1617–1622.
2. Doar M. Multicast in the ATM environment / PhD thesis, Cambridge Univ., Computer Lab., 1993.
3. Kumar R., Raghavan P., Rajagopalan S., Sivakumar D., Tomkins A., and Upfal E. Stochastic models for the Web graph // Proc. 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science. 2000. 57–65.
4. Albert R. and Barabasi A. L. Statistical mechanics of complex networks // Review Modern Physics. 2002. N 74. P. 47–97.
5. Yano A. and Wadayama T. Probabilistic Analysis of the Network Reliability Problem on a Random Graph Ensemble // arXiv:1105.5903v3, 2011. [Electron. Res.]: <http://arxiv.org/pdf/1105.5903.pdf>.
6. Bobbio A., Terruggia R., Ciancamerla E., and Minichino M. Evaluating network reliability versus topology by means of bdd algorithms // PSAM-9, Hong Kong, 2008.
7. Milner R. Bigraphs, a Tutorial // [Electron. Res.]: [www.cl.cam.ac.uk/users/rm135](http://www.cl.cam.ac.uk/users/rm135), 2005.
8. Kim J. H. and Vu V. Sandwiching random graphs // Advances in Mathematics, 2004. N 188. P. 444–469.



9. Dijkstra F., Andree B., Koymans K., van der Hama J., Grosso P., de Laat C. A multi-layer network model based on ITU-T G.805 // *Computer Networks*, 2008. N 52. P 1927–1937.
10. He F., Xin C. Cross-Layer Path Computation for Dynamic Traffic Grooming in Mesh WDM Optical Networks / Norfolk State University, Technical Report NSUCS-2004-009.
11. Orłowski S., Koster Arie M. C. A., Raack C., Wessally R. Two-layer Network Design by Branch-and-Cut featuring MIP-based Heuristics // *Proceedings of INOC 2007, International Network Optimization Conference*.
12. Chigan C., Atkinson G., Nagarajan R. On the Modeling Issue of Joint Cross-Layer Network Protection/Restoration // *Proceedings of Advanced Simulation Technologies Conference 2004 (ASTC'04)*. P. 57–62.
13. Kurant M., Thiran P. Layered Complex Networks // *Phys. Rev. Lett.* 96, 2006. 138701-1 — 138701-4.
14. Попков В. К. Математические модели связности, ИВМ и МГ. Новосибирск, 2006.
15. Popkov V. K., Sokolova O. D. Application of Hyperneet Theory for the Networks Optimazation Problems // 17th IMACS World Congress, July 2005, Paper T4-I-42-011.
16. Rodionov A. S., Sokolova O., Yurgenson A., Choo H. On Optimal Placement of the Monitoring Devices on Channels of Communication Network // *ICCSA 2009, Part II, LNCS, Vol. 5593*. P. 474–487.
17. Rodionov A. S., Choo H., Nechunaeva K. A. Framework for Biologically Inspired Graph Optimization // *Proceedings of ICUIMC 2011, Seoul, Republic of Korea, 2011*. Paper 2.5, 4 pages.
18. The Connectivity and Fault-Tolerance of the Internet Topology / Palmer C. R. and others. // *Workshop on Network Related Data Management*. 2001. P. 1–10.
19. Colbourn C. J. Some open problems on reliability polynomials // *Congr. Numer.* 93. 1993. P. 187–202.
20. Valiant L. G. The complexity of computing the permanent // *Theor. Comput. Sci.* 1979. P. 189–201.
21. Rodionov A., Rodionova O. Random Hypernets in Reliability Analysis of Multilayer Networks // Springer International Publishing Switzerland 2015, *Computational Problems in Science and Engineering, Lecture Notes in Electrical Engineering 343*, P. 307–313.
22. Родионов А. С. К вопросу ускорения полинома надежности случайного графа // *Автоматика и телемеханика*. 2011. Вып. 7. С. 134–136.
23. Мур Э., Шеннон К. Надежные схемы из ненадежных реле // *Кибернетический сб. М.: Иностр. лит.*, 1960. Вып. 1. С. 109–148.



**Кальней Артем Максимович** получил бакалаврскую и магистерскую степени по направлению „Математика и компьютерные науки“ в Новосибирском государственном университете в 2017 и в 2019 годах. Сейчас специализируется в Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Его основными научными интересами являются дискретная математика и надежность сетей.

**Kalney Artyom Maksimovich** received a bachelor's and master's degree in mathematics and computer science from Novosibirsk State University in 2017 and 2019. Now specializes in the Institute of Computational Mathematics

and Mathematical Geophysics SB RAS. His main research interests are discrete mathematics and network reliability.



**Алексей Сергеевич Родионов** получил диплом Инженера-математика в Новосибирском электротехническом институте по направлению „Прикладная математика“ в 1976 г. Закончил аспирантуру ВЦ СО АН СССР в 1980. Получил степень кандидата технических наук в 1984 году и степень доктора наук в области „Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ“ в 2003 году в Институте вычисли-

тельной математики и математической геофизики СО РАН.

Он является руководителем лаборатории „Системного моделирования и оптимизации“ ИВМ и МГ СО РАН. Алексей Сергеевич читает лекции по компьютерному моделированию в качестве профессора Новосибирского государственного университета и Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики.

Его основные научные интересы — компьютерное моделирование и надежность сетей. С 2016 года по настоящее время он является председателем секции R8 IEEE России по Сибири.

**Alexey Rodionov** received his Eng. Dipl. degree in Applied Mathematics from the Institute of electrical engineering, Novosibirsk, Russia in 1976, and his Ph.D. (Candidate of science) degree in the field of software engineering (in

Russian classification, „Software of computing machines, complexes, systems and networks“) in 1984, and Doctor of Science degree in the field of „Mathematical modeling, numerical methods and program complexes“ in 2003, both from the Institute of Computational mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences.

He is the head of the Laboratory „System modeling and optimization“ of the named institute. Alexey gives lectures on computer simulation as professor of Novosibirsk state university, and Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences.

His main scientific interests are computer simulation, and network reliability. From 2016 till now he is the Chair of the R8 IEEE Russia Siberia Section.

*Дата поступления — 11.03.2020*