

# ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И СИСТЕМНАЯ ИНФОРМАТИКА  
ПРИКЛАДНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

4  
—  
2020

# **ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ № 4 (49) 2020 г.**

Журнал выходит ежеквартально, издается с 2008 г.

Учредитель журнала — Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН при поддержке Института информационных и вычислительных технологий МОН РК.

## **Редакционный совет**

Председатель — акад. НАН РК М. Н. Калимолдаев,

Акад. РАН А. Л. Асеев, акад. АН РУ Т. Ф. Бекмуратов (Республика Узбекистан), проф.

В. А. Васенин, акад. РАН С. Н. Васильев, проф. В. М. Вишневский, акад. РАН С. С. Гончаров,

акад. РАН Ю. Л. Ершов, акад. РАО А. А. Кузнецов, акад. РАН Н. А. Кузнецов, акад. РАН

А. П. Кулешов, проф. А. Г. Марчук, проф. Б. Я. Рябко, проф. Н. А. Семенов, акад. РАН

И. А. Соколов, проф. А. Н. Сотников, чл.-кор. РАН Ю. А. Флеров, проф. П. С. Чубик, акад.

НАН КР Ж. Ш. Шаршеналиев (Кыргызская Республика).

## **Редколлегия**

Главный редактор — проф. В. Э. Малышкин,

Д. Ж. Ахмед-Заки, А. Г. Вострецов, В. П. Гергель, Б. С. Гольдштейн, В. И. Гужов,

Ю. А. Загорулько, С. Д. Каракозов, М. М. Каримов, В. Н. Касьянов, О. В. Кибис, В. В. Корнеев,

И. В. Котенко, Т. П. Любимова, А. И. Ляхов, М. А. Марченко, В. В. Окольнишников,

Б. В. Поллер, А. С. Родионов (зам. гл. редактора), М. А. Соныкин, В. В. Шахов (зам. гл.

редактора), М. С. Хайретдинов, Ph. D. Moonseong Kim (Korea), Prof. Dr.-Eng. V. D. Nguyen (Vietnam), Michele Pagano (Italy).

**Редакция:** отв. секретарь М. С. Решетинская, системный администратор В. А. Перепелкин, верстка Д. В. Лазуткин, логист Л. В. Трофимова.

**Адрес редакции, издателя:** 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, д. 6, ИВМ и МГ СО РАН

тел. (383) 330-96-43; e-mail: [problem-info@sscc.ru](mailto:problem-info@sscc.ru), <http://www.problem-info.sscc.ru>.

Журнал зарегистрирован в Роскомнадзоре. Свидетельство ПИ № ФС77-32088 от 27 мая 2008 г.

Подписной индекс в каталоге „Издания органов научно-технической информации“

ОАО «Агентство „Роспечать“» — 69980. Цена свободная. Журнал распространяется на территории России.

**Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных для публикаций Высшей аттестационной комиссией.**

Все права авторов сохранены. Использование материалов журнала возможно только с разрешения редакции и авторов.

Отпечатано в типографии ТОО „Инфо-Алдин“. Адрес: 050009, Республика Казахстан, г. Алма-Ата, ул. Толе би, д. 188;

тел./факс 8 (727) 272-78-26. Формат 60 × 84 1/8. Усл. печ. л. \_\_\_\_\_. Уч.-изд. л. \_\_\_\_\_. Печать офсетная. Тираж 300 экз. Заказ № \_\_\_\_\_. Подписано в печать \_\_\_\_\_ г. Выход в свет \_\_\_\_\_ г.

© Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2020

© Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК, 2020

# **JOURNAL “PROBLEMS OF INFORMATICS”. No. 4 (49) 2020**

Publisher: Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences with the support of the Institute of Information and Computing Technologies of the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan.

## **Editorial Council**

Chairman Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan  
M. N. Kalimoldayev

Full Member of the RAS A. L. Aseev, Full Member of the Academy of Sciences of Uzbekistan  
T. F. Bekmuratov, Professor V. A. Vasenin, Full Member of RAS C. N. Vassilyev, Professor  
V. M. Vishnevsky, Full Member of RAS S. S. Goncharov, Full Member of RAS Yu. L. Ershov, Corr.  
Member of RAE A. A. Kuznetsov, Full Member of RAS N. A. Kuznetsov, Full Member of RAS  
A. P. Kuleshov, Professor A. G. Marchuk, Professor B. Y. Ryabko, Professor N. A. Semenov, Full  
Member of RAS I. A. Sokolov, Professor A. N. Sotnikov, Corr. Member RAS Y. A. Flerov, Full  
Member of NAS KR J. Sh. Sharshenaliev.

## **Editorial board**

The Editor-in-Chief Professor V. E. Malyshkin

Associate Editors-in-Chief: A. S. Rodionov, V. V. Shakhov

D. Zh. Akhmed-Zaki, A. G. Vostretsov, V. P. Gergel, B. S. Goldstein, V. I. Guzhov, Y. A. Zagorulko,  
S. D. Karakozov, M. M. Karimov, V. N. Kasyanov, O. V. Kibis, V. V. Korneev, I. V. Kotenko, T. P.  
Lyubimova, A. I. Lyakhov, M. A. Marchenko, V. V. Okolnishnikov, B. V. Poller, Y. G. Soloveichik,  
M. A. Sonkin, M. S. Khairetdinov, Moonseong Kim (Korea), Van Duc Nguyen (Vietnam), Michele  
Pagano (Italy).

**Editorial staff:** Managing Editor M. S. Reshetinskaya, System Administrator V. A. Perepelkin,  
Maker-up D. V. Lazutkin, Logistician L. V. Trofimova.

**Address of the editorial office:** 630090, pr. Lavrentieva, 6, Novosibirsk, Russia, Institute of  
Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS.

Phone: +7 (383) 330-96-43; e-mail: [problem-info@sscc.ru](mailto:problem-info@sscc.ru), <http://www.problem-info.sscc.ru>.

The journal has been registered in accordance with Legislation of the Russian Federation. Certificate  
of Mass Media Registration: ПИ № ФС77-32088, of 27 May, 2008, ISSN 2073-0667. The journal is  
distributed in Russia.

The journal “Problems of Informatics” is in the List of Peer-Reviewed Scientific Journals for  
publication of scientific results of Ph.D. and Dr. of Sci. theses in three scientific specialties and  
corresponding scientific disciplines in which academic degrees are awarded:

05.13.11 — Mathematical Support and Software for Computers, Computing Complexes and  
Computer Networks,

05.13.17 — Theoretical foundations of Informatics.

05.13.18 — Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes.

All rights reserved. The journal contents may only be used by the permission of editors and authors.

© Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of  
Russian Academy of Sciences, 2020

© Institute of Information and Computing Technologies of the Ministry of Education of the  
Republic of Kazakhstan, 2020

# СОДЕРЖАНИЕ

## Теоретическая и системная информатика

<i>Скопин И. Н.</i> . Локальное и глобальное время при моделировании развивающихся систем .....	5
<i>Шахов В. В., Соколова О. Д.</i> . Анализ сетей с нестационарной топологией. Обзор исследований .....	27

## Прикладные информационные технологии

<i>Вишневский В. М., Семенова О. В.</i> . Обзор моделей систем поллинга и их применение в телекоммуникационных сетях .....	43
<i>Крылова А. И., Лаптева Н. А.</i> . Моделирование речного стока в бассейне реки Лены на основе гидрологически-корректной цифровой модели рельефа .....	71
Правила представления и подготовки рукописей для публикации в журнале „ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ“ .....	89

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ  
№ 4 (49) 2020 г.

# C O N T E N T S

## Theoretical informatics

<i>Skopin I. N.</i> . Local and global time in modeling of evolving systems .....	5
<i>Shakhov V. V., Sokolova O. D.</i> . Analysis of networks with non-stationary topology. Survey	27

## Applied information technologies

<i>Vishnevsky V. M., Semenova O. V.</i> . Review on models of polling systems and their applications to telecommunication networks .....	43
<i>Krylova A. I., Lapteva N. A.</i> . Modeling the streamflow in the Lena River basin on the basis of a hydrologically correct digital elevation model .....	71
Rules of presentation and preparation of manuscripts offered for publication .....	89

PROBLEMS OF INFORMATICS  
N 4 (49) 2020

## LOCAL AND GLOBAL TIME IN MODELING OF EVOLVING SYSTEMS

Igor N. Skopin

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,  
630090, Novosibirsk, Russia  
Novosibirsk State University,  
630090, Novosibirsk, Russia

---

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10013

The study of evolving systems includes the reflection in the models of changes in the system during its existence. The processes that ensure development begin, execute and end within a certain time frame, which in itself indicates the need for modeling of the time. Not only hours, minutes, etc. are important here, although in some simple cases this attachment of behavior to the time scale may be sufficient, as well as properties such as mutual influence and synchronization of element behavior, development under the influence of events, that are external in relation to the system and its elements produced. In other words, at the model level are significant the interactions of the elements, but not the moments of absolute time when these interactions occur.

One can talk about the local time of an individual element, defining it as a sequence of events in which the element operates during the system evolving. But this is not global time common to all elements. Such a time would become an additional entity of the model without any advantages for synchronizing interactions.

The problem of adequate time reflection in models is very important for any approach to the study of processes and phenomena. But when evolving systems are studied, it takes on special significance. The common task in such cases is the reconstruction or imitation of the behavior of the system as the interaction of its elements in time. As a result, the concept of model time is required, which would reflect reality in concert with interactions.

The article contains definitions of notions related to local for the system elements times, proof of the correctness of constructing models based on the consideration of global time as a partial order relationship on the set of events that occur when the system model is executed. An accurate definition of evolving systems is required to rigorously present the proposed approach to modeling. We give such a definition and prove its correctness, using the notion of the system element life cycle.

From the above it follows that our approach negatively refers to the use of global time as one of the basic notion of modeling. Nevertheless, it does not limit the model developer and allows him to operate with global time, which becomes a concept subordinate to event-driven control and local time of system elements.

The proposed formal definition of concepts related to time cannot be considered as the only possible correct representation of time in models. This approach is adequate to modeling in tasks for which the activity of elements is essential. As important alternative approaches, we consider modeling based on quasi-parallel systems implemented, for example, in the programming languages Simula and Simula 67, as well as a number of other special solutions.

One of the main goals of this paper is the construction and justification of proposed concept the main property of which is the priority of local time of elements before global time. The structure of the

presentation obeys this goal. The next section 2 gives information on various types of representations of time used in modeling, in particular, in the study of evolving systems. Section 3 clarifies the notions that characterize a system as evolving. It also describes the event-driven control of interactions of elements that uses as a method for determining the time in models of evolving systems. The following sections 4–7 are devoted to formalizing proposed in the article concept. Section 4 justifies the use of local time of a system's elements in the event-based organization of interactions in a model system. Section 5 introduces the concept of an evolving element and the associated with this notion of states and transitions from one state to another. Section 6 is devoted to proving the correctness of using partial ordering of events as the basis for determining the local time of an element. Section 7 completes the proof of the formal correctness of the proposed concept and shows how global time can be determined using event-driven control. The Conclusion presents information on other approaches to modeling time, conceptually close to the concept being developed. This part of the article also provides motivation for what tools are needed to support the proposed concept in modeling.

The research presented in this work showed that overcoming the difficult problems of globalization of time based on world clocks is achievable if global time is considered as an entity secondary to local times of elements of the system. On this basis, design patterns can be used that implement fairly general methods for constructing models of evolutionary development. The identification of situations in which such patterns are required, we consider as a promising work.

**Key words:** local and global time; partial order relation on a set of events; events, reaction of elements to events; event protocols.

## References

1. Avgustin A. Ispoved'. Seriya „Pamyatniki religiozno-filosofskoj mysli“. Per. s lat. M. K. Sergeenko. 1991. M.: Izdatel'stvo „Renessans“, SP IVO — SiD. ISBN 5-7664-0472-7.
2. Namestnikov A. M. Razrabotka imitacionnyh modelej v srede MATLAB // Meto-dicheskie ukazaniya dlya studentov special'nostej 01719, 351400. Ul'yanovsk, Ul-GTU, 2004.
3. SHevchenko A. A. Upravlenie vremenem pri proektirovaniu imitacionnyh modelej // CHast' sb. Prikladnaya informatika. N 3. 2006. Laboratoriya Matematicheskogo i komp'yuternogo modelirovaniya. S. 113–119.
4. Skopin I. N. Lokal'noe i global'noe vremya pri modelirovaniu razvivayushchih sys si-stem. V sb. trudov Sed'moj mezhdunarodnoj konferencii pamyati akademika A. P. Ershova „Perspektivny sistem informatiki“. Rabochij seminar „Naukoemkoe pro-grammnoe obespechenie“. Novosibirsk: OOO „Sibirskoe Nauchnoe Izdatel'stvo“, 2009. S. 255–259.
5. Sistema. Bol'shoj Rossijskij enciklopedicheskij slovar'. M.: BRE. 2003, S. 1437.
6. Smirnov G. A. Okkam, Ul'yam // Novaya filosofskaya enciklopediya / In-t filosofii RAN; Nac. obshchestv.-nauch. fond. 2-e izd., ispr. i dopol. M.: Mysl', 2010. ISBN 978-5-244-01115-9.
7. Skopin I. N. Ierarhicheskie otnosheniya . metodologicheskaya osnova izuchenija po-nyatiya ierarhij // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya „Informatizaciya obrazovaniya“. M.: RUDN, 2014. N 1. S. 56–63.
8. Skopin I. N. Subordinacionnye otnosheniya v metodike izuchenija ponyatiya ierar-hichnosti // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya „Informatizaciya obrazovaniya“. M.: RUDN, 2014. N 2. S. 35–49.
9. Dejkstra E. Vzaimodejstvie posledovatel'nyh processov. V sb. „YAzyki program-mirovaniya“, pod red. F. ZHenyui. Per. s angl. M.: „Mir“, 1972.
10. Lamport L. Time, clocks, and the ordering of events in a distributed systems // Commun. ACM. 1978. Vol. 21(7). P. 558–565.
11. Chandy K. M., Misra J. Distributed simulation: a case study in design and verification of distributed programs // IEEE Transactions on Software Engineering. 1978. Vol. SE-5(5). P. 440–452.

12. Ferscha A. Parallel and distributed simulation of discrete event systems // Parallel and Distributed Computing Handbook. McGraw-Hill. 1996. P. 1003–1041.
13. Kazakov YU. P., Smelyanskij R. L. Ob organizacii raspredelennogo imitacionnogo modelirovaniya // Programmirovanie. 1994. N 2. S. 45–63.
14. Fujimoto R. M. Parallel and Distributed Simulation Systems // Wiley Interscience, 2000.
15. Fujimoto R. M. Parallel and Distributed Simulation Systems // Proc. of the Winter Simulation Conf. 2001. P. 147–157.
16. Dal O. I., Nyugord K. Simula . yazyk dlya programmirovaniya i opisaniya sistem s diskretnymi sobityiyami // Algoritmy i algoritmicheskie yazyki. Vyp. 2. M.: VC AN SSSR, 1967.
17. Dal O. I., Myurhaug B., Nyugord K. Simula 67 universal'nyj yazyk programmirova-niya // Perevod s angl. K. S. Kuz'mina i E. I. YAKovleva. M.: Mir, 1969.
18. Nygaard K., Dahl O.-J. The Development of the SIMULA Languages // History of programming languages. ACM New York, NY, USA, 1981. P. 439–480.
19. Nepejvoda N. N. Skopin I. N. Osnovaniya programmirovaniya. Izd-vo: Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij. 2003. ISBN: 5-93972-299-7.
20. Backus J. Can programming be liberated from the von Neumann style? A functional style and its algebra of programs // CACM, 21(8), August 1978. P. 613–641.
21. Malyshkin V. Assembling of Parallel Programs for Large Scale Numerical Modeling. . In the Handbook of Research on Scalable Computing Technologies. IGI Global, USA, 2010. Chapter 13, P. 295–311. ISBN 978-1-60566-661-7.
22. Keene S. Object-Oriented Programming in Common Lisp: A Programmer's Guide to CLOS, 1988, Addison-Wesley. ISBN 0-201-17589-4
23. Haskell 98 Language and Libraries. The Revised Report. Dec. [Electron. Res.]: <https://www.haskell.org/onlinereport/>.
24. Akhmed-Zaki D., Lebedev D., Malyshkin V., Perepelkin V. Automated Construction of High Performance Distributed Programs in LuNA System // PaCT-2019 proceedings, LNCS 11657, Springer, 2019, P. 3–9. DOI: 10.1007/978-3-030-25636-4\_1.
25. Ahmed-Zaki D. ZH., Lebedev D. V., Malyshkin V. E., Perepelkin V. A. Avtomati-zaciya konstruirovaniya raspredelennyh programm chislennogo modelirovaniya v si-steme LuNA na primere model'noj zadachi // Problemy informatiki, N 4, 2019. S. 53–64. DOI: 10.24411/2073-0667-2019-00017.
26. Okol'nishnikov V. V. Predstavlenie vremeni v imitacionnom modelirovaniyu // Vychislitel'nye tekhnologii. 2005. T. 10, N 5. S. 57–80.IEEE Std P1516.
27. IEEE Standard for Modeling and Simulation (M&S) High Level Architecture (HLA) — Framework and Rules. N.Y.: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2000.



# ЛОКАЛЬНОЕ И ГЛОБАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

И. Н. Скопин

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет,  
630090, Новосибирск, Россия

---

УДК 51

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10013

Понятия глобального и локального времени обсуждаются с точки зрения их реализации в моделях развивающихся систем. Предлагается поход к изучению таких систем в рамках событийного механизма управления в имитационных моделях. Показана корректность использования времени в сочетании с этим механизмом.

**Ключевые слова:** локальное и глобальное время; отношение частичного порядка на множестве событий; события, реакция элементов на события; протоколы событий.

*Что я измеряю время, это я знаю, но я не могу измерить будущего, ибо его еще нет; не могу измерить настоящего, потому что в нем нет длительности, не могу измерить прошлого, потому что его уже нет. Что же я измеряю?  
Время, которое проходит, но еще не прошло?*  
— Аврелий Августин (354–430). Исповедь [1]

**Введение.** Исследование развивающейся системы методами моделирования всегда предусматривает, что в модельном представлении развития отражаются изменения реальной системы, происходящие в некоторые моменты времени ее существования. Процессы, обеспечивающие развитие, начинаются, выполняются и завершаются в определенных временных рамках, что само по себе указывает на необходимость моделирования времени. Однако здесь важны не столько часы, минуты и т. п., сколько такие свойства, как взаимовлияние и синхронизация поведения элементов системы, развитие под воздействием событий, внешних по отношению к моделируемой системе или производимых ее элементами. Иными словами, на модельном уровне более существенны взаимодействия элементов, чем моменты абсолютного времени, когда эти взаимодействия происходят.

Проблема адекватного отражения времени в моделях очень важна для любого подхода к изучению процессов и явлений. Но когда изучаются развивающиеся системы, она приобретает особое значение. Общей задачей в таких случаях является реконструкция или имитация поведения системы как взаимодействия ее элементов во времени. Как следствие, требуется концепция модельного времени, которая отражала бы реальность согласованно с взаимодействиями.

Одной из главных целей предлагаемой работы является построение и обоснование такой концепции. Этой цели подчиняется структура изложения. В следующем разделе 1 приводятся сведения о различных типах представлений времени, используемых при моделировании, в частности, при изучении развивающихся систем. Раздел 2 уточняет понятия, характеризующие систему как развивающуюся. В нем также описывается механизм событий, управляющий взаимодействием элементов, как метод определения времени в моделях развивающихся систем. Последующие разделы 3–6 посвящены формализации предлагаемой концепции оперирования информацией, относящейся к времени в моделях развивающихся систем. Раздел 3 обосновывает использование локального времени элемента системы при событийной организации взаимодействий в модельной системе. В четвертом разделе вводится понятие развития элемента и связанных с ним переходов из одного состояния в другое. Раздел 5 посвящен доказательству корректности использования частичной упорядоченности событий в качестве основы определения локального времени элемента. Шестой раздел завершает доказательство формальной корректности предлагаемой концепции и показывает, какое глобальное время можно определять при событийном управлении. В Заключении представлены сведения о других подходах к моделированию времени, концептуально близких к предлагаемой концепции. В нем также приводится мотивация того, какой инструментарий требуется для поддержки предлагаемой концепции при моделировании.

**1. Варианты представления времени при моделировании.** В любом подходе к моделированию необходимо различать три варианта представления времени, так или иначе используемых при построении моделей и проведении расчетов<sup>1</sup>:

- *Реальное время*, в котором происходит функционирование изучаемого объекта, — это время реальной системы, модель которой строится для проведения исследования;
- *Модельное время*, в масштабе которого организуются экспериментальные расчеты модели, — это отражение реального времени в конструируемой модели (его часто называют системным временем, что, на наш взгляд, может быть понято не совсем корректно);
- *Машинное время*, отражающее затраты времени вычислителя на проведение имитации, — этот атрибут особенно важен при использовании моделей, адекватность которых существенно зависит от объема вычислительных ресурсов, задействованных в расчетах.

Реальное время для исследования является атрибутом или наблюдаемой характеристикой моделируемого объекта в целом, которая фиксирует рамки развития системы, представленной в виде поведения ее элементов. В большинстве случаев реальное время используется как источник значений временных параметров модели в целом и ее элементов, отражая причинно-следственные связи. При необходимости моделировать реальное или, что то же, *абсолютное время* реальной системы естественно представлять его структурой данных, формируемой по информации о порядке взаимодействий элементов, т. е. как структуру, глобально доступную всем элементам системы при выполнении их локальных действий.

Выбор подхода к заданию модельного времени очень неоднозначен (см., например, [3]), но если развитие системы связывать с активностью и взаимодействиями элементов, то становится очевидной необходимость согласовать два вида модельного времени: *локальное время* для каждого элемента и *глобальное время системы* в целом. Ключевое требование здесь — согласованность.

---

<sup>1</sup>Мы даем определения вариантов представления времени из [2], уточнив их для большего соответствия предлагаемой концепции.

Единое для всеобщего употребления время человеческие сообщества придумали еще на заре своего существования, и поэтому использование его для синхронизации событий, происходящих при функционировании модельной системы и ее элементов, кажется естественным. К сожалению, глобальное время при каком бы то ни было его определении страдает избыточностью, обусловленной тем, что приходится отслеживать не только события, но и ход времени, т. е. реально несуществующего генератора времени. Но хуже другое. Этот механизм не справляется с задачей согласования действий элементов системы. Во-первых, теряется свойство актуальности событий — всегда приходится сверяться с отчужденными от локальной последовательности действий элемента „мировыми часами“, а во-вторых, не достигается требуемая точность указания одновременности и последовательности выполнения нескольких действий, зависящих друг от друга, т. е., когда одни из них производят данные для других. В таких случаях справиться с зависимостями не помогают ни соглашение о „мгновенности“ действий, ни рассмотрение недетерминированного поведения — в реальной жизни именно этого достаточно. Поэтому приходится дополнять модель времени специальными корректирующими соглашениями. Если так, то не проще ли отказаться от исчисления разных времен, которое мало что дает для согласования порядка модельных действий и событий? Более подробное обсуждение проблем глобального времени можно найти в работе [4].

При построении моделей развития машинное время, затрачиваемое на проведение модельных расчетов, лимитирует количество вариантов траекторий развития, которые удается проверить. Кроме того, когда в модели используется имитация непрерывных процессов, описываемых дифференциальными и интегральными уравнениями, вместо точного решения которых вычисляется его аппроксимация, качество результата можно повышать за счет использования более производительного вычислительного оборудования. Указанные обстоятельства влияют на адекватность проводимого исследования.

**2. Моделирование развивающихся систем и событийное управление.** Система (др.-греч. *σύστημα* „целое, составленное из частей; соединение“), согласно определению Большого российского энциклопедического словаря, „это множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность, единство“ [5]. В приведенном толковании понятия системы отражена общность разнообразных существующих его определений: можно сказать, что практически всегда системы составляются из элементов и связей, суть которых фиксируется в дальнейших уточнениях.

Применительно к задачам моделирования следует определять одновременно два вида систем:

- реально существующая изучаемая система — *реальный объект* исследования и
- *модельная система* — артефакт, отражающий свойства и поведение реальной системы, определенные для исследования.

В рамках предлагаемой концепции считается, что реальная система является *развивающимся объектом*. Развитие — это изменение системы, которое осуществляется под воздействием активности ее элементов и влияний окружения. Изменяются как элементный состав системы, так ее свойства и свойства ее элементов, в том числе связи между элементами. В этой связи в качестве целей исследования системы может быть выбрано построение прогноза или выявление закономерностей изменений системы, т. е. зависимость ее развития от свойств элементов, их взаимодействия между собой и с окружением, иначе — со средой функционирования.

*Модельная система* — это объект, конструируемый для имитации развития реального объекта, которая проще для выявления закономерностей за счет *абстрагирования* от элементов и связей, рассматриваемых как несущественные. По сравнению с реальным объектом информация, получаемая о модельной системе с помощью наблюдений, измерений, экспериментов, оказывается более доступной для аналитической работы. Если абстрагирование от несущественного проведено адекватно требованиям к исследованию, а наблюдения выполняются корректно, то перенос на реальный объект выявляемых закономерностей развития модельной системы будет правомерен.

Элемент модельной системы выделяется в ней своим *атрибутивным представлением*, допускающим передачу данных и методов для выполнения действий, необходимых при оперировании с моделью. В атрибутивном представлении сохраняется информация об отнесении элемента к определенному типу, а также о связях между элементами — отношениях с другими элементами. Типы связей элементов реального объекта очень разнообразны и переменчивы, но еще до начала исследования отбираются те элементы и связи, которые принимаются за существенные — существование остальных аспектов реальных объектов игнорируется. В результате строится, а точнее, выбирается требуемая для изучения реального объекта элементная *декомпозиция*, которую в дальнейшем будем называть изучаемой *реальной системой*.

В модельном объекте элементы, их свойства и связи не выбираются, а конструируются с использованием понятий и объектов уже существующей системы понятий и инструментов их сочетания. Таким образом строится модельная система. Критерием отбора составляющих для модельной системы элементов является то, что, используя их свойства и связи, реальная система, представляющая изучаемый объект, может быть реконструирована как самостоятельная структура, допускающая взаимно-однозначное соответствие между изучаемой реальной и модельной системами.

Когда объектом исследования является развивающаяся система, то постулируется, что элементы системы могут выполнять определенные *действия*: создание и уничтожение элементов, изменение своих свойств и связей, а также свойств и связей других элементов. Существенно то, что при развитии системы доступные для выполнения действия меняются. Поэтому нужно говорить о последовательности *состояний* элемента. Каждое из них характеризуется набором допустимых действий, которые элемент, находясь в этом состоянии, может выполнять. Состояние — это особого рода свойство элемента, динамически меняющееся в ходе функционирования системы.

Понятие состояние элемента модельной системы хорошо согласуется с таким же понятием реальной развивающейся системы. Более того, само развитие системы можно трактовать как объединение последовательностей смен состояний всех ее элементов. В реальных системах такое объединение достигается за счет привязки смен состояний к единой временной оси, что, как было показано выше, недостаточно для синхронизации взаимодействий в модельных системах. Здесь требуется отражать в модели причины перехода элемента из одного состояния в другое: в ходе проведения модельных расчетов элемент должен получить сигнал о необходимости выполнения этого перехода. Адекватным способом такой сигнализации является достаточно общий *механизм событий*, применимый не только для изменения состояний элементов. Суть его сводится к следующим операциям, выполняемым в указанном порядке:

- 1) *Генерация события* некоторым элементом модельной системы или ее окружением (применительно к смене состояний элементов это источник события, причина возможного изменения состояний некоторых элементов);
- 2) *Распознавание события* теми элементами, которые должны получить сигнал (это идентификация сигнала некоторыми элементами как причины возможного изменения их состояний);
- 3) *Реагирование на событие* каждым из элементов, распознавших событие, выполнением определенных для этого события действий (это следствие распознанного элементом события как причины принятия решения об изменении его состояния).

Важно заметить, что реакция на событие, трактуемая как требование выполнить некоторое действие, может оказаться отличной от этого действия. Решение о том, какая реакция будет выполнена, принимает элемент на основе всей доступной для него информации, а не только исходя из распознавания события. Так, если требование перейти в новое состояние обусловливается не одним событием, а некоторой их последовательностью (примером может служить ситуация с накоплением какого-либо ресурса), то оно принимается только в результате реагирования на заключительное событие последовательности. Отметим, что события с неоднозначно выбираемыми реакциями одного и того же элемента легко ликвидировать: достаточно для такого состояния в качестве реакции задать специальную функцию, генерирующую для каждого из вариантов первоначальных реакций вспомогательное событие с единственной реакцией.

Реагирование на событие необязательно является немедленным следствием распознавания. Реакция может быть *отложена* до выполнения условий срабатывания, а в реальной системе или при реализации глобального времени модели она, кроме того, может быть назначена на определенное время. Как и в случае неоднозначных реакций, отложенное реагирование легко имитируется с помощью специального вспомогательного события, генерирующегося при выполнении условий срабатывания. При этом необязательно генерировать это событие с явным назначением отложенной реакции на определенное время. Необходимо лишь, чтобы оно произошло *после* отложенной реакции и *до* зависящих от нее событий.

События связывают элемент системы с другими элементами: само порождение элемента и его дальнейшие состояния зависят от его действий, действий других элементов и окружения, точнее — от результатов этих действий. Все эти действия есть следствия соответствующих событий, являющихся их причинами. Некоторые из реальных событий при моделировании игнорируются — исследователь либо не знает о них, либо абстрагируется от их существования. В обоих случаях причинность действия элемента и, в том числе, изменения его состояния *приписывается* другим событиям или же процессам, инициированным такими событиями. Как причинность, так и приписывание причинности имеют прямое отношение к понятию модельного времени: пока причинное событие (возможно, несколько необходимых событий или одно из них — это зависит от семантики модели) не произойдет, не могут произойти соответствующие реакции. Понятно, что приписывание не должно нарушать причинно-следственные отношения, и, как следствие, запрещается приписывание причинности *позднее* наступления его следствиям и, в том числе, событиям-следствиям.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере фрагмента условной модели чаепития. В качестве одного из элементов модели рассматривается электрический чайник со следующими альтернативными свойствами: пустой и заполненный водой, выключенный

и включенный. Допустимые комбинации этих свойств характеризуют состояния чайника. При корректной эксплуатации чайника событие включения приводит к активизации процесса кипячения. Будем считать, что событие включения чайника без воды контролируется, т. е. для пустого чайника включения не влечет никаких действий, в частности, не меняют его состояние. В случае заполненного водой чайника событию включения приписывается причинность: в модели чаепития полагается, что вода в чайнике закипает из-за него, а закипание до включения не допускается. При этом игнорируется, что закипание невозможно без нагревания, процессов генерации электричества и превращения его в тепло, а событие закипания происходит через некоторый промежуток времени после включения без каких бы то ни было специальных действий. В реальной жизни вопрос, когда это случится, не возникает, но на модельный уровень факт закипания переносится как утверждение о том, что это происходит *после* включения. Чтобы событие закипания произошло, может потребоваться новое включение, например, когда возникло принудительное прекращение нагрева в промежутке между первоначальным включением и окончанием процесса. Но информация о величине этого временного интервала фактически никак не используется.

Осознанное приписывание причинности — естественный прием моделирования, который позволяет корректно абстрагироваться от несущественных деталей изучаемой системы. В то же время, неосознанное приписывание может приводить к нарушению принципа Бритвы Оккама: „Не следует множить сущее без необходимости“ [6] и, как следствие, к неадекватности создаваемых моделей. Это особенно важно учитывать в подходах, которые появляются, когда исследуемые процессы и явления требуют совместного построения набора моделей:

- конкретная система рассматривается как часть, элемент другой системы более высокого уровня, называемой *надсистемой*;
- некоторые элементы системы рассматриваются как состоящие из других элементов, т. е. как системы более низкого уровня, называемые *подсистемами*.

Варианты построения модели, состоящей из нескольких уровней, начиная от элементов низкого уровня путем собирания из них нужных подсистем надсистемы (*восходящий*, т. е. *снизу-вверх подход*), или в обратном направлении (*нисходящий*, т. е. *сверху-вниз подход*), формально эквивалентны. Оба подхода могут использоваться в практике моделирования. И если выбирается один из них, то второй стоит рассматривать в качестве проверочного инструмента. Однако следует отметить, что как трудоемкость построения системы моделей, так и эффективность проведения расчетов во многом зависят от выбора направления конструирования.

Оба подхода позволяют строить как *строго иерархические системы*, когда каждая из подсистем может быть частью, т. е. элементом только одной надсистемы, так и *нестрого иерархические системы*, когда подсистемы-элементы надсистем могут входить в разные надсистемы<sup>2</sup>.

Наблюдаемую реальность, в которую погружен объект изучения, можно рассматривать как систему: она состоит по крайней мере из двух частей: изучаемый объект и его окружение. С точки зрения исследователя уже это разделение является абстракцией: игнорируется то, что не требуется для целей исследования, и фиксируются части-элементы

<sup>2</sup>Свойства иерархичности и способы построения иерархий на базе двух видов бинарных отношений: эквивалентности и субординации подробно изучаются в работах [7, 8]. В них строго и нестрого иерархические системы названы, соответственно, классификационными и субординационными.

создаваемой системы и обычно их наименования. Вот примеры таких систем, уровень которых для соответствующих исследований мог бы оказаться самым высоким: объект земля — это суши, вода и воздух, все остальное — окружение; объект дерево — это крона, ствол и корни, все остальное — окружение; объект научная школа — это учителя-основатели, поколения учеников, периоды роста, апогея, стабилизации и затухания и др., все остальное — окружение.

Именно на уровне наблюдаемой реальности появляется время как особый атрибут системы в целом. Временной порядок, в котором возникают и отрабатываются события наблюдаемой реальности, необязательно имеет прямое отношение к порядку модельных событий подсистем и их элементов, и это может вводить в заблуждение. Рассмотрение реальности как системы, состоящей из элементов, не означает отождествление ее с модельной системой. В частности, события и их временной порядок в реальности определяются огромным множеством факторов, влияющих на развитие объекта исследований, а не только теми из них, которые остались после отсева игнорируемых или незамеченных, и, конечно, в реальности просто нет места приписываниям и искусственно конструируемым причинно-следственным связям. Реальность, в которую погружен объект изучения, является цельной, единой и неделимой на части.

Как же тогда добиться согласованности модельной концепции времени с реально существующей или только субъективно ощущаемой, субстанциональной или лишь реляционной сущностью времени<sup>3</sup>, интерес к которой зародился на заре человечества и не прекращается до сих пор? Не претендуя на универсальность, мы предлагаем решение проблемы времени при моделировании развивающихся систем, поведение которых существенно зависит от активности их элементов. Основой решения является организация взаимодействия элементов, опосредованная событийным управлением вычислениями.

Последовательность событий, которые распознает элемент модели и на которые он реагирует в ходе развития системы, далее называется *протоколом поведения элемента*. Именно протокол естественно отождествлять с *локальным временем* элемента. Протоколы могут пересекаться, т. е. иметь общие события, что означает синхронизированное поведение элементов системы — они вовлечены в действия, которые следует считать общей реакцией элементов на распознанное ими событие.

Совокупность всех протоколов всех элементов модельной системы некоторого уровня частично упорядочивает множество всех событий этой системы. И именно этот частичный порядок имеет смысл считать представлением наблюдаемого времени реальной системы, т. е. *глобальным временем модельной системы*. При совместном построении моделей разных уровней это представление является атрибутом системы самого верхнего уровня. Переход от системы некоторого уровня вниз по иерархии модели дает возможность согласования локальных времен подсистем с временем их общей надсистемы.

Отметим, что протоколы не имитируют в модели реальное наблюдаемое время (они не претендуют, например, на отражение длительности интервалов между событиями), но выполняют такую важную для развития функцию, как задание бинарных отношений „раньше“, „позже“ и „несравнимы“ на множестве всех событий.

Требование имитации длительности может оказаться полезным в некоторых видах моделей, например, для апостериорного, исторического анализа, но не в случаях моделирования развития, для которого прямое соответствие между реальным наблюдаемым време-

<sup>3</sup> В Приложении к данной работе приведена схема взаимосвязей различных концепций времени, представленная в 2000-летней истории развития естествознания.

нем объекта моделирования и модельным его представлением означало дополнительную сущность без каких бы то ни было преимуществ — еще одно нарушение принципа Бритвы Оккама.

**3. События, протоколы, локальное время.** В данном разделе формализуются понятия, относящиеся к событийной концепции времени. Формализация фиксирует тот минимально необходимый уровень требований, достаточный для точного задания предлагаемой концепции времени и взаимодействий.

Определение 1. Под термином *событие* понимается сущность поведения системы, которая обладает следующими свойствами. События

- а) *вырабатываются* окружением или элементами системы;
- б) могут *отрабатывать* некоторыми элементами, про которые говорят, что они *реагируют* на событие, т. е. *идентифицируют* или *распознают* событие и активизируют обработку, т. е. *программу реакции* на событие;
- с) могут *отслеживаться*, т. е. фиксироваться для каждого элемента в последовательности, в которой он реагирует на события системы;
- д) *не повторяются*, т. е. в последовательности событий, на которые реагирует каждый из элементов, не существует двух или более одинаковых событий.

Тогда для каждого элемента системы *локальное время* определяется как последовательность всех событий, на которые этот элемент реагирует. Эта последовательность называется *протоколом поведения элемента*.

Комментарий к определению 1.

(а). Появление событий, на которые реагируют элементы, — неопределенное понятие. Достаточно знать лишь то, что элементы системы взаимодействуют посредством реакций на события, которые возникают в результате внешних воздействий или поведения каких-либо элементов. Не исключается возможность элемента объявить событие „для себя“, т. е. такое, на которое он реагирует сам, возможно, совместно с другими элементами.

Множество событий, на которые реагирует элемент, меняется в процессе функционирования системы. В результате различных реакций динамически меняется набор распознаваемых событий, а значит, меняется реакция элемента на события (неважно, внешние для системы или внутренние). Это допущение позволяет говорить о развитии элементов и системы в целом.

(б). Отработка события элементом, — это идентификация события и выполнение программы реакции, которая использует информацию, связанную с событием. Поведение элемента, который не реагирует на событие, не зависит от этого события. Он про него ничего не знает. Можно сказать, что такие события для элемента не существуют. В то же время, неизвестные элементу события могут косвенно влиять на его поведение, поскольку другие события в ходе своих реакций могут изменять атрибутивные описания элементов и общий контекст выполнения действий элементов.

(б.I). Постулируется *мгновенность идентификации события* элементом:

— событие не влияет ни на какие на действия системы и ее элементов, кроме как на те из них, которые обнаруживают событие;

— в ходе идентификации другие события не возникают.

Идентификация — это спусковая функция (предикат), которая предписывает выполнение или невыполнение программы реакции.

(б.II). Выполнение программы реакции на идентифицированное событие может быть *мгновенным*, если в ходе выполнения невозможно возникновение других событий. Если

это неверно, то выполнение реакции называется *длительным*. Последнее означает допустимость изменения поведения, в том числе и самой реакции из-за появления и отработки других событий, реакция на которые меняет атрибутивные описания элементов. Если есть тому основание, то задавать подобные изменения можно в качестве событий, предписывающих элементу осуществить их как реакцию на это событие. Тогда у элемента появляется возможность планировать изменения: выполнять их немедленно или после того, как его текущее действие завершится.

(с). Отслеживание элементом событий, на которые он реагирует, приводит к возможности доступа к истории элемента, т. е. к его протоколу, в котором отмечаются в порядке появления все события, связанные с элементом. Поэтому протоколы рассматриваются как *ретроспективное локальное время элемента*. Можно рассматривать и *перспективное*, или *прогнозное локальное время элемента*, понимая под этим совокупность всех возможных продолжений текущего состояния протокола, тем самым пополнив ретроспективное время будущими вариантами продолжений протоколов.

Протоколы могут пересекаться. Это означает, что два или более элемента реагируют на одно и то же событие совместно, т. е. никак не определяются ни порядок выполнения программ обработки, ни побочные эффекты, возможные в результате такой совместности. При моделировании необходимо уточнение поведения в подобных случаях с тем, чтобы при интерпретации не возникали коллизии, связанные с параллелизмом (см., например, [9]).

(д). Невозможность повторения событий означает, что, когда требуется реакция элементов на событие, совпадающая с реакцией на какое-либо событие, уже представленное в протоколах, это всегда новый экземпляр события, пусть даже функционально идентичный прежнему. При необходимости можно определять *типы событий* как классы эквивалентности по отношению идентичности реакции элементов системы.

Из pragматических соображений будем считать, что *поведение каждого элемента конечно*, т. е. он не может реагировать на потенциально бесконечное число событий. Или по-другому: все протоколы — конечные последовательности. Вместе с тем, множество потенциально возможных событий может оказаться бесконечным из-за появления в системе новых элементов, а значит, и новых будущих продолжений протоколов.

#### **4. Цикл функционирования элемента.**

Определение 2. Создание, активизация и деактивизация элемента.

Пусть на какое-то событие реагируют некоторые элементы системы таким образом, что в результате оказывается выполненным:

- *появление* атрибутного представления элемента, отвечающего его типу и отражающего включение элемента во все представленные в системе структуры;
- *порождение пустого* протокола нового элемента;
- *объявление* в качестве единственного события, идентифицируемого элементом, *события активизации*, планируемая реакция на которое начинает активное поведение элемента (*фактическое рождение*).

Такое событие называется *созданием элемента*. Создание — общее событие нового элемента и всех элементов, реагирующих на него.

Декларируется, что для каждого элемента системы определено событие, реакция на которое включает в себя прекращение его активности, т. е. он перестает реагировать на другие события. Такое событие называется *деактивацией* элемента.

События создания и активизации являются первыми членами протокола нового элемента. Событие деактивации — последний член протокола. Эти три события могут быть как внешними, так и внутренними для системы. Считается, что элементы системы, имеющиеся в начале ее функционирования, созданы фиктивным элементом, неактивным в дальнейшем.

Активизация может возникнуть либо сразу же после создания, либо оказаться отложеной, но до тех пор, пока она не произойдет, новый элемент не в состоянии реагировать на другие события. Это обеспечивается инициализацией атрибутивного описания элемента, которая рассматривается в качестве реакции на событие активизации.

Задачи изучения развивающейся системы можно подразделить на *исторические* и *прогнозные*. Первые связаны с анализом реализованных протоколов, вторые — с возможными вариантами продолжений протоколов. Если изучение касается только реализованных протоколов, то можно указать два ограничения для рассмотрения истории: начало функционирования системы и ее текущий момент. Технически удобно считать их формальными событиями, генерируемыми внешним образом. Будем обозначать их, как  $\vdash$  и  $\dashv$  соответственно.

На *начальное событие*  $\vdash$  реагируют все активные элементы, которые представлены в системе первоначально. Их реакцией на него является инициализация соответствующих атрибутивных описаний. Т. е. для первоначальных элементов начальное событие является активизацией.

Событие  $\dashv$  является *завершающим* либо *приостанавливающим* в зависимости от того, предполагается или нет возобновление функционирования системы. На него реагируют активные элементы, запоминая свое текущее состояние и замораживая все действия. Таким образом, завершающее/приостанавливающее событие понимается как событие деактивации.

Возобновление целесообразно обеспечивать для выполнения анализа сложившейся конфигурации системы. Принудительное изменение конфигурации допустимо, но только в тех случаях, когда измененная конфигурация достижима естественным развитием системы из ее начальной конфигурации. В противном случае картина развития будет заведомо нереалистична.

В связи с возобновлением уместно расширить трактовку начального события, допуская его не только как „создание“ системы, но и в качестве средства возобновления функционирования в приостановленной конфигурации. В новой трактовке на  $\vdash$  реагируют элементы, представленные в приостановленной конфигурации. Это не отменяет понимания начального события как активизации, но требует коррекции содержания реакции на него, которая обеспечивает восстановление атрибутивных описаний. Корректность возобновления гарантируется, когда *все* элементы, активные при приостановке, реагируют на событие  $\vdash$ . В противном случае дальнейшее поведение системы может оказаться недостижимым из начальной конфигурации.

Событие  $\vdash$  начинает протокол любого элемента, представленного в системе первоначально. Приостановка приводит к дополнению всех протоколов событием  $\dashv$ , а возобновление — к дополнению их событием  $\vdash$ . Чтобы не противоречить требованию неповторяемости событий (см. условие (d) в определении 1), считается, что два последних члена протокольной последовательности  $\dashv$  и  $\vdash$  взаимно уничтожают друг друга в ходе возобновляющей инициализации элемента. Тем самым достигается „незаметность“ приостановки.

Определение 3. Исторические и перспективные события.

Множество всех событий, происходивших в течение функционирования системы, т. е. зафиксированных в протоколах всех ее элементов, обозначается как  $\Omega$ . Это *исторические или реализованные события*.  $\Omega$  формируется путем пополнения возникающими событиями первоначально пустого множества.

Множество всех событий, которые могут произойти в течение какого бы то ни было функционирования системы, называется *множеством всех потенциально возможных событий*. Оно обозначается как  $\Omega^*$ .

Множество  $\Omega$  состоит из событий, на которые реагирует хотя бы один элемент. Оно не включает потенциально возможные события, на которые была бы реакция при другом стечении обстоятельств, а также прогнозные события из вариантов продолжений протоколов.  $\Omega$  всегда конечно. Именно с ним связано решение исторических задач изучения системы. Что касается задач прогнозных, то они относятся к изучению множества потенциально возможных событий  $\Omega^*$ . Но требуется не все это множество, а только та его часть, которая содержит в себе продолжения протоколов, содержащих лишь реализованные события. Для коротких прогнозов можно воспользоваться вариантами продолжений развития приостановленной конфигурации системы, но для изучения тенденций это слишком тяжеловесный инструмент.

Мы отождествляем протоколы и ретроспективное локальное время, но не отказываемся от синхронизированных взаимодействий. Следовательно, необходимо понятие, которое отражает то, что на бытовом уровне рассматривается как шкала времени, и которая дает необходимые и достаточные средства для описания взаимодействий.

##### **5. Временной порядок событий и глобальное время.**

Определение 4. Отношение временного частичного порядка на множестве событий и глобальное время.

Пусть  $s_1, s_2 \in \Omega$  — два события, а отношение  $\prec$  на множестве всех событий задается следующим образом:

- a) Если  $s_1$  и  $s_2$  принадлежат одному протоколу, то  $s_1 \prec s_2$  ( $s_1$  „раньше“  $s_2$ , обратное отношение —  $s_2$  „позже“  $s_1$ ) в соответствии с их порядком в протокольной последовательности;
- b) Если  $s_1, s_2$  принадлежат разным протоколам, имеющим общие события, то  $s_1 \prec s_2$  тогда и только тогда, когда существует общее для двух протоколов событие  $s$  и  $s_1 \prec s$ , а  $s \prec s_2$ ;
- c) Отношение *транзитивно*  $\prec$ , т. е.

$$\forall s_1, s_2, s_3 (s_1 \prec s_2) \& (s_2 \prec s_3) \supset (s_1 \prec s_3)$$

(это условие необходимо постулировать только для таких троек  $s_1, s_2$  и  $s_3$ , у которых первое и последнее события принадлежат разным протоколам, а  $s_2$  — общее событие);

d) Для некоторых событий  $s_1$  и  $s_2$  отношение  $\prec$  может задаваться *принудительно*, если такое задание не нарушает асимметричность отношения:

$$\forall s', s'' \in \Omega (s' \prec s'') \supset \neg(s' \prec s'')$$

(достаточно требовать этого только для тех  $s'$  и  $s''$ , одно или оба из которых совпадают с  $s_1$  или с  $s_2$ );

- e) Во всех других случаях отношение  $\prec$  между  $s_1$  и  $s_2$  не устанавливается.

Тогда  $\prec$  называется *отношением временного частичного порядка*. Это отношение объявляется *глобальным временем системы*.

Утверждение 1

Отношение  $\prec$  является строгим частичным порядком на множестве всех реализованных событий  $\Omega$ . Цепями такого порядка являются все протоколы и все *ветвления протоколов*, т. е. последовательности событий, которые строятся следующим образом. Начало цепи берется из одного протокола или из ранее построенной цепи, а продолжение — из другого, имеющего общее событие с началом.

Заметим, что для множества всех потенциальных событий  $\Omega^*$  подобное утверждение не имеет места, что хорошо согласуется с интерпретацией: при различных стечениях обстоятельств одни и те же события могут реализовываться в различном порядке.

— **Периоды возникновения событий и синхронизация протоколов.** Глобальное время можно чисто механически использовать для построения иерархий множества всех событий. Однако это построение довольно искусственно. В частности, не имеет под собой интерпретационной основы разнесение исторических событий по уровням, осмысленным для системных иерархий. События сами по себе не образуют систему, они могут являться лишь проявлением развития системы элементов. Иерархия событий представляет не структуру системы как набор ее элементов со связями, а лишь дает некоторую информацию о поведении системы в целом и ее элементов. Ее можно (и нужно!) использовать при рассмотрении системы как черного ящика, если предполагается, что связь между событиями и поведением элементов априори не известна (и стоит задача раскрытия этой связи), или как серого ящика, когда известны некоторые сведения о структуре, например, сами элементы. Иерархия событий в состоянии определять пределы, вне которых (раньше и позже) событие произойти не может — *периоды возникновения событий*.

Определение 5. Период возникновения событий.

Пусть  $\prec$  — отношение временного порядка на множестве реализованных событий  $\Omega$ ,  $x$  — произвольное событие из  $\Omega$ . Тогда множества  $L(x)$  и  $H(x)$  определяются следующим образом:

$$L(x) = \{a \in \Omega | (a \prec x) \& \neg \exists b \in \Omega ((a \prec b) \& (b \prec x))\};$$

$$H(x) = \{b \in \Omega | (x \prec b) \& \neg \exists a \in \Omega ((x \prec a) \& (a \prec b))\}$$

и называются *нижним и верхним пределами периода возможного возникновения события*  $x$  соответственно.

Утверждение 2.

Определение 5 корректно, т. е. для любого реализованного  $x$  множества  $L(x)$  и  $H(x)$  не пересекаются и задают по крайней мере по одному событию, раньше и позже которых  $x$  произойти не может (наличие элементов в  $L(x)$  и  $H(x)$  следует из того, что  $\vdash \prec x$  и  $x \prec \dashv$ ; если бы эти множества пересекались, то для их общего элемента  $a$  было бы одновременно верно  $x \prec a$  и  $a \prec x$ ).

Определение 6. Синхронизация событий протоколов.

Пусть на множестве реализованных событий  $\Omega$  определено отношением временного порядка  $\prec$ , а  $E_1$  и  $E_2$  — элементы системы, а  $m(E_1)$  и  $m(E_2)$  — протоколы этих элементов:  $m(E_1) = \{s_1, \dots, s_{n_1}\}$ ,  $m(E_2) = \{s'_1, \dots, s'_{n_2}\}$  соответственно.

Пусть, далее,  $x$  — событие, на которое реагирует элемент  $E_1$ , т. е.  $m(E_1) = \{s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_{n_1}\}$ ,  $1 \leq i \leq n_1$ .

Тогда считается, что

а)  $x$  синхронизован с  $m(E_2)$  слева, если в  $m(E_2)$  имеется подпоследовательность  $s'_1, \dots, s'_{j_l}$  такая, что  $s'_k \prec x$  при  $k \leq j_l$  и  $\neg(s'_k \prec x)$  при  $k > j_l$ . В этом случае *событие x не может произойти ранее события  $s'_{j_l}$* . Если при этом  $s'_{j_l} \in L(x)$ , то  $x$  синхронизован с  $m(E_2)$  слева точно;

б)  $x$  синхронизован с  $m(E_2)$  справа, если в  $m(E_2)$  имеется подпоследовательность  $s'_{j_r}, \dots, s'_{n_2}$  такая, что  $x \prec s'_k$  при  $k \geq j_r$  и  $\neg(x \prec s'_k)$  при  $k < j_r$ . В этом случае *событие x не может произойти позднее события  $s'_{j_r}$* . Если при этом  $s'_{j_r} \in H(x)$ , то  $x$  синхронизован с  $m(E_2)$  справа точно.

Считается, что  $x$  синхронизован с  $m(E_2)$  полностью, если  $x$  синхронизован с  $m(E_2)$  слева и справа, т. е.  $\exists s'_{j_l}, s'_{j_r} \in m(E_2)$ , удовлетворяющие условиям (а) и (б). Если при этом  $x$  синхронизован с  $m(E_2)$  слева и справа точно, т. е.  $s'_{j_l} \in L(x)$  и  $s'_{j_r} \in H(x)$ , то  $x$  полностью синхронизован с  $m(E_2)$  точно.

Если  $x \in m(E_1)$  и  $x \in m(E_2)$ , то  $x$  — общее событие протоколов  $m(E_1)$  и  $m(E_2)$ , т. е. для некоторого  $k$ ,  $k < n_2$ ,

$$m(E_2) = \{s'_1, \dots, s'_{k-1}, x, s'_{k+1}, \dots, s'_{n_1}\}.$$

Тогда, по определению,  $s'_{j_l} = s'_{k-1}$  и  $s'_{j_r} = s'_{k+1}$ . В этом случае происходит *совместная реакция элементов  $E_1$  и  $E_2$  на общее событие x*.

Утверждение 3.

Определение 6 корректно, т. е. для любого  $x$ , на который реагирует хотя бы один элемент, и любого протокола  $m$  некоторого элемента либо  $x \in m$ , либо существуют события этого протокола  $s'_{j_l}$  и  $s'_{j_r}$ , которые указывают на синхронизацию  $x$  с  $m$  слева и справа. Существуют протоколы, для которых эти свойства выполняются точно.

Для доказательства достаточно заметить, что любое событие происходит не ранее  $\vdash$  и не позднее  $\dashv$ . Эти события — первые кандидаты на  $s'_{j_l}$  и  $s'_{j_r}$ . Последовательный просмотр выбранного протокола отбраковывает события, не удовлетворяющие требуемым свойствам. Если все члены протокола за исключением начального и завершающего события оказываются отбракованными, то искомыми остаются события  $\vdash$  и  $\dashv$ . Для элементов, которые возникают в ходе активного функционирования системы, процедура отбраковки остается осуществимой, поскольку всегда есть возможность выбора родительского элемента, ветвление которого означает создание нового элемента. Пропуск при отбраковке всех членов родительской протокольной последовательности до события создания элемента правомерен, т. к. в этой части цепи заведомо нет требуемых событий. С учетом того, что любой протокол является цепью, т. е. его члены упорядочены линейно, нужные события определяются однозначно.

Резюмируя сказанное выше, можно утверждать, что корректное глобальное время — это частичный порядок на множестве событий. Если при моделировании этого недостаточно, то желаемую шкалу времени можно задать с помощью специального элемента системы, который естественно трактовать как *генератор времени* или *системные часы*. Его роль — постоянное порождение моментов времени. На некоторые из них реагируют другие элементы, что означает привязку их активности к временной шкале: элемент „знает“, в какой момент он должен выполнить соответствующую реакцию. Некоторые события принудительно ставятся в отношении временного порядка с моментами времени. Это корректно, если сохраняется условие асимметричности (d) из определения 4 и выполнено транзи-

тивное замыкание для расширения частичного порядка. Таким построением дозировано достигается все, что требуется от традиционного глобального времени, и сохраняется неопределенность там, где привязка к времени является лишь гипотетической.

**Заключение.** Понятия глобального и локального времени, временного частичного порядка, синхронизации и др. в рамках представленной концепции удается определить точно, и это дает возможность проверять формальную корректность взаимодействия элементов, которые совместно реагируют на общие события. Мы показали достаточность введенной системы понятий для обеспечения корректного моделирования взаимодействий элементов системы в рамках механизма событий без привлечения глобального времени в виде мировых часов.

Общепринято считать, что механизм синхронизации событий должен удовлетворять требованию локального ограничения причинной связи (*local causality constraint*), обеспечивающего для модельного времени имитацию естественного порядка событий „от причины — к следствию“ [10]. Понятно, что никакой формализм не в состоянии гарантировать автоматическое выполнение этого или ему подобного требования. Наша формализация не исключение. Однако, используя ее, разработчик модели будет точно знать, какие свойства модельной системы нужно проверять для верификации ее корректности. Организация такой проверки выходит за рамки рассмотрения настоящей работы. В связи с этим стоит упомянуть публикации [11–15], в которых специальное внимание уделяется алгоритмам синхронизации взаимодействия процессов и верификации моделирования времени.

Наша концепция времени как частичного порядка на множестве событий не претендует на роль единственного возможного формального определения системы понятий для моделирования развития. Исторически первым и в некотором смысле альтернативным решением из этого ряда следует считать так называемую квазипараллельную систему дискретных событий языка Симула [16], а затем и Симулы 67 [17], предложенную О. И. Далом и К. Нюгордом еще в 60-х годах.<sup>4</sup> Это решение примечательно тем, что доказывает возможность отображения взаимодействия автономных процессов, о которых программист может и должен думать как о параллельных, в схему последовательно выполняемых программных модулей. При этом эффект параллелизма сохраняется. Вычислительное оборудование того времени не позволяло рассчитывать на реализацию параллельных расчетов, и поэтому пришлось строить строго последовательное выполнение моделей и имитировать параллелизм. Быть может, именно это ограничение позволило авторам проекта Симула предложить сбалансированное решение, которое не перестало быть актуальным и сегодня.

В отличие от модельного времени, определяемого на основе отношений между событиями, квазипараллельная система Симулы и Симулы 67 задает или, лучше сказать, конструирует прогнозируемое модельное глобальное время, упорядочивая элементы системы в соответствии с динамически формирующимся планом выполнения программ этих элементов и главной программы модели, симулирующей поведение внешней среды системы. Для упорядочения выполнения модельных расчетов используется специальная структура данных, называемая *управляющим списком*, в который вносятся элементы (ссылки на них), планируемые для активизации. В каждый момент модельных расчетов единственным активным элементом является тот, на который ссылается первый элемент управляющего списка. Как только элемент перестает быть активным, он удаляется из управляющего

---

<sup>4</sup>История развития Симулы, его концепций, пользовательских средств и других особенностей представлена в очень интересной публикации авторов языка [18].

списка. Все последующие элементы, представленные в списке, ожидают своей очереди на выполнение.

Процесс, выполняемый элементом, может находиться в одном из четырех состояний:

a) *активном*, когда (реально) выполняется программа процесса;

b) *приостановленном*, когда выполнение программы процесса прервано, но запомнена точка возобновления и процесс находится в управляющем списке;

c) *пассивном*, когда процесс не выполняется и не находится в управляющем списке, но точка возобновления активности запомнена;

d) *завершенном*, когда выполнение его программы прервано, и точка возобновления активности не запомнена.

Конструкция управляющего списка имитирует время. Первый процесс единственный активный. Когда он прерывает свое выполнение, следующим активным становится следующий за ним приостановленный процесс.

Процесс может быть вставлен в управляющий список (перед каким-либо процессом в списке или после него, через определенное время) или удален из него. Процесс также может быть назначен на определенное время. Это означает, что он вставляется перед тем процессом, время выполнения которого — минимальное время, превосходящее назначаемое. Возможно случайное (псевдослучайное) действие по вставке процесса в то или иное место управляющего списка. Можно считать, что с помощью управляющего списка процессам задаются относительные приоритеты. Постулируется, что все оперирование с управляющим списком и с состояниями активности процессов является следствием событий, дискретно происходящих в системе. Пока не произошло какое-либо из событий, реакция на которое предусматривает соответствующие изменения, состояние процесса и его положение в управляющем списке не могут изменяться.

Самое существенное в системе с дискретными событиями Симулы — это то, что ее средства оперирования позволяют программисту думать об элементах системы как о параллельно действующих агентах в условиях неявно определенного глобального времени. Фактически элементы выполняют свои программы последовательно и в строгом соответствии с динамически меняющимся управляющим списком, который обеспечивает глобальное время как полностью упорядоченное множество уже возникших и планируемых к возникновению событий. Вычислительное оборудование времени, когда создавалась Симула, не позволяло рассчитывать на реализацию параллелизма, а потому решение использовать специальную структуру данных, поддерживающую полное упорядочивание активизации элементов модельной системы, предложенное Далом и Нюгордом, вполне оправдано (анализ этой концепции представлен в монографии [19]).

Сегодня хотелось бы видеть развитие систем с дискретными событиями, которое ориентировало бы вычисления на продуктивное использование многопроцессорного ресурса в сочетании с эффектом параллелизма, обеспеченного управляющим списком. Однако эта проблема не так проста, как может показаться при поверхностном рассмотрении. Дело в том, что строго упорядоченная последовательность событий создает видимость дополнительной зависимости процессов, выполняемых как реакции на события. Задача распознавания того, какие из процессов можно выполнять параллельно, очень трудоемка — она требует проведения анализа связей между процессами на уровне всех контекстов, к которым обращаются процессы, что для программ моделирования практически нереально. Нужны подходы, которые отказываются от прямолинейного следования упорядочивания вычислений на базе глобального времени модельной системы.

Очевидный способ организации вычислений, способствующий сокращению расходов на анализ зависимостей, — это сокращение связей процессов через общий глобальный контекст. Применительно к событийному управлению в развивающихся системах это прямо указывает на необходимость отказа от моделирования глобального времени. И здесь надо говорить о развитии языковых моделей вычислений, нацеленном на реализацию удобных и понятных средств поддержки задания локального оперирования. В качестве перспективных направлений в этой области можно назвать языки функционального стиля программирования и системы фрагментированного программирования<sup>5</sup>. К первому из этих направлений относятся чистый Лисп с поддержкой объектно-ориентированного программирования (система CLOS [22]), Haskell [23] и др., ко второму — язык и система программирования Luna [24, 25]. Оба направления доказали свою эффективности при конструировании программ во многих прикладных и системных областях, однако адекватность их использования при моделировании развития систем еще предстоит исследовать.

Современное состояние проблематики моделирования времени отражает подробный обзор В. В. Окольнишникова [26], содержащий достаточно полную информацию о подходах к решению имитации развития. Ценность этой публикации в том, что автор указывает на побудительные причины выбора того или иного способа отражения времени в моделях, исходя из потребностей решения реальных задач моделирования. В частности, он обосновывает причины появления стандарта архитектуры верхнего уровня для систем моделирования и симуляции [27], а также сопутствующих ему стандартов, которые были разработаны в IEEE для унификации методов решения задач в этой отрасли. Автор обзора отмечает, что все рассматриваемые им модели имитационного времени в настоящее время используются в различных областях применения моделирования, а их различия связаны с особенностями этих областей.

Исследование, представленное в настоящей работе, показало, что преодоление трудных проблем глобализации времени на основе мировых часов достижимо, если глобальное время рассматривать как сущность, вторичную по отношению к локальным временам элементов системы. На этой основе можно строить шаблоны проектирования, которые реализуют достаточно общие методы построения моделей эволюционного развития. Выявление ситуаций, в которых требуются такие шаблоны, мы рассматриваем в качестве перспективной работы.

#### **Приложение. Методологические концепции времени и их связь с видами научно-исследовательской деятельности.**

Понятие времени и его соотношения с понятием пространства занимала исследователей с древнейших времен и до наших дней. В представленной схеме (рис. 1.) представлена классификация сложившихся концепций времени. Основой построенной иерархии служат научно-исследовательские направления, с которыми можно соотнести те или иные концепции. В результате определилось пять кластеров: (1) естественно-научное направление; (2) экономические науки; (3) системные исследования; для направлений

---

<sup>5</sup>Несмотря на то, что первому функциональному языку Лиспу почти столько же лет, сколько и Фортрану, стартом широкого обсуждения функциональности стал 1978 год после публикации Дж. Бэкусом лекции, которую он прочитал при присуждении ему тьюринговской премии [20]. Фрагментированное программирование [21] не имеет столь же давней истории. Тем не менее, опыт конструирования программ путем подготовки фрагментов, которые для задания требуемых вычислений комбинируются с учетом свойств и особенностей, как составляемых алгоритмов, так и используемой реальной среды вычислений, показывает очень хорошие результаты.



Рис. 1. Классификация сложившихся концепций времени

(4) и (5) сформулировать адекватные названия не удалось. На схеме выделены имена представителей направлений, суждения которых цитируются (в кратком пересказе).

## Список литературы

1. Августин А. Исповедь. Серия „Памятники религиозно-философской мысли“. Пер. с лат. М. К. Сергеенко. 1991. М.: Издательство „Ренессанс“, СП ИВО СиД. ISBN 5-7664-0472-7.
2. Наместников А. М. Разработка имитационных моделей в среде MATLAB // Методические указания для студентов специальностей 01719, 351400. Ульяновск, УлГТУ, 2004.
3. Шевченко А. А. Управление временем при проектировании имитационных моделей // Часть сб. Прикладная информатика. № 3. 2006. Лаборатория Математического и компьютерного моделирования. С. 113–119.
4. Скопин И. Н. Локальное и глобальное время при моделировании развивающихся систем. В сб. трудов Седьмой международной конференции памяти академика А. П. Ершова „Перспективы систем информатики“. Рабочий семинар „Наукоемкое программное обеспечение“. Новосибирск: ООО „Сибирское Научное Издательство“, 2009. С. 255–259.
5. Система. Большой Российской энциклопедический словарь. М.: БРЭ. 2003, С. 1437.
6. Смирнов Г. А. Оккам, Уильям // Новая философская энциклопедия / Ин-т философии РАН; Нац. обществ.-науч. фонд. 2-е изд., испр. и допол. М.: Мысль, 2010. ISBN 978-5-244-01115-9.
7. Скопин И. Н. Иерархические отношения — методологическая основа изучения понятия иерархий // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия „Информатизация образования“. М.: РУДН, 2014. № 1. С. 56–63.
8. Скопин И. Н. Субординационные отношения в методике изучения понятия иерархичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия „Информатизация образования“. М.: РУДН, 2014. № 2. С. 35–49.
9. Дейкстра Э. Взаимодействие последовательных процессов. В сб. „Языки программирования“, под ред. Ф. Женюи. Пер. с англ. М.: „Мир“, 1972.

10. Lamport L. Time, clocks, and the ordering of events in a distributed systems // Commun. ACM. 1978. Vol. 21(7). P. 558–565.
11. Chandy K. M., Misra J. Distributed simulation: a case study in design and verification of distributed programs // IEEE Transactions on Software Engineering. 1978. Vol. SE-5(5). P. 440–452.
12. Ferscha A. Parallel and distributed simulation of discrete event systems // Parallel and Distributed Computing Handbook. McGraw-Hill. 1996. P. 1003–1041.
13. Казаков Ю. П., Смелянский Р. Л. Об организации распределенного имитационного моделирования // Программирование. 1994. № 2. С. 45–63.
14. Fujimoto R. M. Parallel and Distributed Simulation Systems // Wiley Interscience, 2000.
15. Fujimoto R. M. Parallel and Distributed Simulation Systems // Proc. of the Winter Simulation Conf. 2001. P. 147–157.
16. Дал О. И., Нюгорд К. Симула — язык для программирования и описания систем с дискретными событиями // Алгоритмы и алгоритмические языки. Вып. 2. М.: ВЦ АН СССР, 1967.
17. Дал О. И., Мюрхаг Б., Нюгорд К. Симула 67 универсальный язык программирования // Перевод с англ. К. С. Кузьмина и Е. И. Яковleva. М.: Мир, 1969.
18. Nygaard K., Dahl O.-J. The Development of the SIMULA Languages // History of programming languages. ACM New York, NY, USA, 1981. P. 439–480.
19. Непейвода Н. Н. Скопин И. Н. Основания программирования. Изд-во: Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. ISBN: 5-93972-299-7.
20. Backus J. Can programming be liberated from the von Neumann style? A functional style and its algebra of programs // CACM, 21(8), August 1978. P. 613–641.
21. Malyshkin V. Assembling of Parallel Programs for Large Scale Numerical Modeling. In the Handbook of Research on Scalable Computing Technologies. IGI Global, USA, 2010. Chapter 13, P. 295–311. ISBN 978-1-60566-661-7.
22. Keene S. Object-Oriented Programming in Common Lisp: A Programmer's Guide to CLOS, 1988, Addison-Wesley. ISBN 0-201-17589-4
23. Haskell 98 Language and Libraries. The Revised Report. Dec. [Electron. Res.]: <https://www.haskell.org/onlinereport/>.
24. Akhmed-Zaki D., Lebedev D., Malyshkin V., Perepelkin V. Automated Construction of High Performance Distributed Programs in LuNA System // PaCT-2019 proceedings, LNCS 11657, Springer, 2019, P. 3–9. DOI: 10.1007/978-3-030-25636-4\_1.
25. Ахмед-Заки Д. Ж., Лебедев Д. В., Малышкин В. Э., Перепелкин В. А. Автоматизация конструирования распределенных программ численного моделирования в системе LuNA на примере модельной задачи // Проблемы информатики, № 4, 2019. С. 53–64. DOI: 10.24411/2073-0667-2019-00017.
26. Окольнишников В. В. Представление времени в имитационном моделировании // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 57–80.
27. IEEE Std P1516. IEEE Standard for Modeling and Simulation (M&S) High Level Architecture (HLA) — Framework and Rules. N.Y.: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2000.



**Скопин Игорь Николаевич**, тел: +7 (983) 126-26-86; e-mail: [iskophin@gmail.com](mailto:iskophin@gmail.com) — старший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики (ИВМиМГ) СО РАН; доцент механико-

математического факультета Новосибирского государственного университета (НГУ);

Интерес **Игоря Николаевича** к проблематике разработки языков программирования и к конструированию компиляторов восходит к 1968–70 годам, когда он был студентом механико-математического факультета НГУ и проходил производственную практику в Новосибирском филиале Института точной ме-

хники и вычислительной техники АН СССР (ныне Новосибирский институт программных систем). В этой организации он принимал участие в разработке ряда систем программирования и инструментов. В 1974–76 годах он руководил группой специалистов, которая конструировала специализированную систему поддержки обработки текстовой информации. Эта работа послужила основой кандидатской диссертации „Функциональное структурирование текстовой информации, его реализация и приложения“ (научный руководитель А. П. Ершов), которую И. Н. Скопин защитил 1981 году.

В 1986 году И. Н. Скопин получил приглашение заведовать лабораторией в Институте информатики и вычислительной техники Академии педагогических наук СССР (после реорганизации — Институт компьютерных систем в обучении). В качестве целей работы этой лаборатории были обозначены исследования и разработка базовых программных средств поддержки преподавания. Проблемы образовательной информатики пришлось решать в период становления института, а потому одной из существенных задач стала организация команды программистов, способной эффективно работать в новой прикладной области. Результативности деятельности И. Н. Скопина в этой области способствовало его преподавание в НГУ. Эта работа всегда была и остается одним из главных направлений деятельности И. Н. Скопина.

Среди других наиболее значимых мест работы И. Н. Скопина следует указать Новосибирский Центр исследований и разработки корпорации Интел, где он участвовал в решении задач, связанных с пакетом математических программ MKL.

В настоящее время И. Н. Скопин является сотрудником Лаборатории синтеза параллельных программ ИВМ и МГ СО РАН. Основное направление его исследований связано с проблемами разработки инструментария для решения задач вычислительной математики и математического моделирования.

**Igor Skopin**, tel: +7 (983) 126-26-86; e-mail: [iskopin@gmail.com](mailto:iskopin@gmail.com). Senior Researcher of Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics (ICMMG) SB RAS; Associate Professor, Mechanics and Mathematics

Department of Novosibirsk State University (NSU);

The interest of **Igor Skopin** in problems of programming languages developing and in the construction of compilers dates back to 1968–70, when he was a student in the Mechanics and Mathematics Department of NSU. He had practices at the Novosibirsk branch of Lebedev Institute of Precision Mechanics and Computer Engineering with Academy of Sciences of the USSR (now it is called as the Novosibirsk Institute of Software Systems), where he took part in the development of programming systems and tools. In 1974–76 he led a team of programmers who designed a specialized support system for processing text information. This work served as the basis for his dissertation „Functional structuring of textual information, its implementation and applications“ (supervisor A. P. Ershov), which Skopin defended 1981.

In 1986 Igor Skopin received an invitation to head the laboratory at the Institute of Informatics and Computer Engineering of the USSR Academy of Pedagogical Sciences (after the reorganization it was called as the Institute of Computer Systems in Education). As the goal of this laboratory, research and development of basic teaching support software were identified. The problems of educational informatics had to be solved during the formation of the institute, and therefore one of the essential tasks was the organization of a team of programmers capable of working effectively in a new applied field. The performance of Igor Skopin in this area contributed to his teaching at NSU. This activity has always been and remains one of the most businesses of Skopin.

Among the other most significant places of work Skopin should be pointed out by the Novosibirsk Research and Development Center of Intel Corporation, where he participated in solving problems associated with the MKL mathematical software packages.

Currently Igor Skopin is an employee of the Laboratory of Computational Physics, ICMMG. The main direction of his researches is related to the problems of developing tools for solving problems of computational mathematics and mathematical modeling.



## ANALYSIS OF NETWORKS WITH NON-STATIONARY TOPOLOGY. SURVEY

V. V. Shakhov\*,\*\*, O. D. Sokolova\*

\*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics  
630090, Novosibirsk, Russia

\*\*Novosibirsk State Technical University  
630073, Novosibirsk, Russia

---

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10014

In recent years, the great technological leap comes with non-stationary network topology. The examples include systems with mobile subscribers, networks with nodes on vehicles (VANET, Vehicle ad-hoc network), unmanned aerial vehicles, etc. In addition, the topology of fixed networks can also change due to intentional or unintentional destructive effects, features network protocols (multiple relays, transmission range and route are highly variable., etc.). The methods used to solve problems of classical networks (for example, centralized routing with a hierarchy of pre-assigned routers) turn out to be ineffective under the new conditions; adaptation of models and approaches is required.

Both foreign and Russian companies are engaged in research on the optimization of data transmission in non-stationary networks, international projects are being carried out. Among the urgent tasks are the following: the impact of node mobility on network performance, localization of mobile nodes, determination of the effective transmission coverage area, energy efficiency, etc. One of these tasks is to improve the quality of communication between transport means and the Internet. In VANET networks, the role of stations transmitting information from moving objects to the network is performed by roadside equipment (RSU, road side unit). But their disadvantage is that they are stationary, after being installed on the side of the road, they cannot be moved. Therefore, as the traffic flow changes, there will be either a shortage or an excess of such facilities. Compared to stationary RSUs, unmanned aerial vehicles can move depending on changes in traffic flow. So, there is a problem of increasing the network coverage for VANET using unmanned aerial vehicles that act as base stations. Many publications are devoted to the description of technologies for localization of wireless mobile sensors, for example, based on the Monte-Carlo Location algorithm.

To solve some important applied problems, there is no need to analyze the behavior of the entire network with mobile nodes; it is enough to consider the behavior of the system in some neighborhood of interest to the researcher. For example, it can be the coverage area of the transceiver, which is equipped with a roadside infrastructure device, road segments where deliberate interference occurs, an area of increased air pollution, etc. In this case, to analyze various indicators of network efficiency, the theory of random processes is used, and here, Markov chains with continuous time occupy a special place, since they allow a fairly accurate description of the behavior of real systems. Also the mathematical apparatus is well developed for them. In particular, when studying automobile networks (VANET, V2X, IoV), Poisson streams of events are often used. The relevant Markov chain changes state under the influence of these streams. Using the Poisson process, both vehicle traffic and transmitted data packets flows are modeled.

---

The study was supported by grant of the RFBR № 19-01-00562-a.

In many publications, random graphs and hypergraphs are considered as models of non-stationary networks. The use of models and algorithms of graph theory allows you to investigate the relationship between various elements in the network, to solve the problems of optimizing data transmission. For example, hypergraph models are useful for accounting for interference in networks with a large number of mobile nodes. The use of graph theory algorithms for solving problems is mainly divided into two categories: researching data on mobile users to determine traffic patterns and planning the functioning of a cellular network with a resource spectrum.

Further, in the proposed review, publications of recent years are analyzed, in which various methods of modeling networks with mobile nodes and algorithms for the optimal functioning of such networks are investigated.

**Key words:** non-stationary networks, models of networks with mobile nodes, queuing systems, simulation.

## References

1. Wu X. A Hybrid View of Mobility in MANETs: Analytical Models and Simulation Study // Computer Comm. 2008. Vol. 31. N. 16. P. 3810–3821.
2. Barani, H., Fathy, M. An Algorithm for Localization in Vehicular Ad-Hoc Networks. // Journal of Computer Science. 2010. Vol. 6. N 2. P. 168–172.
3. Liu C., Yang O., Li G, Shu Y. Effective Transmission Coverage Area-Based Link Dynamics Characterization of VANET in Highway Scenario // International Journal of Distributed Sensor Networks. 2015. Vol. 11. N 10.
4. Elhoseny M., Shankar K. Energy Efficient Optimal Routing for Communication in VANETs via Clustering Model. // Emerging Technologies for Connected Internet of Vehicles and Intelligent Transportation System Networks. Studies in Systems, Decision and Control. 2020. Vol. 242.
5. Liu T., Zhao L., Li B., Zhao C. Research on the Enhancement of VANET Coverage Based on UAV. // Liang Q., Wang W., Liu X., Na Z., Jia M., Zhang B. (eds) Communications, Signal Processing, and Systems. CSPS.2019. Lecture Notes in Electrical Engineering. Vol. 571. Springer, Singapore.
6. Qiu, Z., Wu, L., Zhang, P. An Efficient Localization Method for Mobile Nodes in Wireless Sensor Networks // International Journal of Online Engineering.2017. Vol. 13. N 3.
7. Sokolova O., Yurgenson A. Using graph, hypergraph, and hypernet models for network analysis problems // Proc. 7th International Forum on Strategic Technology (IFOST), 2012.
8. Reddy A. R., Venkatesh D., Ramesh K. Hypergraph Interference Models in Wireless Ad-Hoc Networks with Low Complexity Distributed Scheduling // International journal of scientific research. 2012. 2. P. 237–240.
9. Webb J., Docemilli F., Bonin, M. Graph Theory Applications in Network Security // ArXiv.2015. abs/1511.04785.
10. Yang L., Yu Y. H. A Mobile Frequency Allocation Algorithm Based on the Graph Theory // International Conference on Computer Information Systems and Industrial Applications. 2015.
11. Goldin D., Attia S. A. Unit Disk Graph Based Modelling of a Network of Mobile Agents // Proceedings of the First IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems. Venice, Italy. 2009.
12. Sorokin A. A., Dmitriev V. N. Opisanie sistem svyazi s dinamicheskoy topologiej seti pri pomoshchi modeli „mercayushchego grafa“ // Vestnik AGTU. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika. 2009. N 2. S. 134–139.
13. Eiza M. H., Ni Q. An Evolving Graph-Based Reliable Routing Scheme for VANETs // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2013. Vol. 62. N. 4. P. 1493–1504.

14. Liu K., Ng J. K. Y., Lee V. C. S., Son S. H., Stojmenovic I. Cooperative Data Scheduling in Hybrid Vehicular Ad Hoc Networks: VANET as a Software Defined Network // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2016. Vol. 24. N 3. P. 1759–1773.
15. Mokdad, L., Ben-Othman, J., Nguyen, A.T. DJAVAN: Detecting jamming attacks in Vehicle Ad hoc Networks // Performance Evaluation. 2015. Vol. 87. P. 47–59.
16. Shakhov V., Sokolova O. Towards Air Pollution Detection with Internet of Vehicles // 15th International Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems, Novosibirsk, Russia, 2019, P. 183–186.
17. Deng D., Lien S., Lin C., Hung S., Chen W. Latency Control in Software-Defined Mobile-Edge Vehicular Networking // IEEE Communications Magazine. 2017. Vol. 55. N 8, P. 87–93.
18. Zhou S., Sun Y., Jiang Z., Niu Z. Exploiting Moving Intelligence: Delay-Optimized Computation Offloading in Vehicular Fog Networks // IEEE Communications Magazine. 2019. Vol. 57. N 5. P. 49–55.
19. Zhou Z., Yu H., Xu C., Chang Z., Mumtaz S., Rodriguez J. BEGIN: Big Data Enabled Energy-Efficient Vehicular Edge Computing // IEEE Communications Magazine. 2018. Vol. 56. N 12. P. 82–89.
20. Bertsekas D., Gallager R. Seti peredachi dannyh. M.: Mir, 1989.
21. Zhu H., Fu L., Xue G., Zhu Y., Li M., NiL. M. Recognizing Exponential Inter-Contact Time in VANETs // Proceedings IEEE INFOCOM, San Diego, CA, 2010. P. 1–5.
22. Jiang R., Zhu Y., Yang Y. Improving Throughput and Fairness of Converge cast in Vehicular Networks // IEEE Transactions on Mobile Computing. 2017. Vol. 16. N 11. P. 3070–3083.
23. Li Y., Jin D., Hui P., ChenS. Contact-aware data replication in roadside unit aided vehicular delay tolerant networks // IEEE Transactions on Mobile Computing. 2016. Vol. 15. N 2. P. 306–321.
24. LiuY., Peng M., Shou G., Chen Y., Chen S. Toward Edge Intelligence: Multiaccess Edge Computing for 5G and Internet of Things // IEEE Internet of Things Journal. 2020. Vol. 7. N 8. P. 6722–6747.
25. Guo H., Liu J., Zhang J. Computation Offloading for Multi-Access Mobile Edge Computing in Ultra-Dense Networks // IEEE Communications Magazine. 2018. Vol. 56. N 8. P. 14–19.
26. Mao Y., You, C. Zhang J., Huang K., Letaief K. B. A Survey on Mobile Edge Computing: The Communication Perspective // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2017. Vol. 19. N 4. P. 2322–2358.
27. Krylov V. V., Samohvalova S. S. Teoriya teletrafika i ee prilozheniya // SPb.: BHV-Peterburg, 2005.
28. Hashim M. F., Abdul Razak, N. I. Ultra-Dense Networks: Integration with Device to Device (D2D) Communication // Wireless Personal Communications. 2019. Vol. 106. P. 911–925.
29. Zhang K., Mao, Y. Leng S., He Y., Zhang Y. Mobile-Edge Computing for Vehicular Networks: A Promising Network Paradigm with Predictive Off-Loading // IEEE Vehicular Technology Magazine. 2017. Vol. 12. N 2. P. 36–44.
30. Thai M., Lin Y., Lai Y., Chien H. Workload and Capacity Optimization for Cloud-Edge Computing Systems with Vertical and Horizontal Offloading // IEEE Transactions on Network and Service Management. 2020. Vol. 17. N 1. P. 227–238.
31. Cui L., Xu C., Yang S., Huang J. Z., Li J., Wang X., Ming Z., Lu N. Joint Optimization of Energy Consumption and Latency in Mobile Edge Computing for Internet of Things // IEEE Internet of Things Journal. 2019. Vol. 6. P. 4791–4803.
32. Chen Y., Sun Y., Feng T., Li S. A Collaborative Service Deployment and Application Assignment Method for Regional Edge Computing Enabled IoT // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 112659–112673.
33. Islambouli R., Sharafeddine S. Optimized 3D Deployment of UAV-Mounted Cloudlets to Support Latency-Sensitive Services in IoT Networks // IEEE Access. 2019. Vol. 7. P. 172860–172870.

34. Ebrahimzadeh A., Maier M. Cooperative Computation Offloading in FiWi Enhanced 4G HetNets Using Self-Organizing MEC // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2020. Vol. 19. N 7. P. 4480–4493.
35. Wang S., Zhang X., Yan Z., Wenbo W. Cooperative Edge Computing With Sleep Control Under Nonuniform Traffic in Mobile Edge Networks // IEEE Internet of Things Journal. 2019. Vol. 6. N 3. P. 4295–4306.
36. Hajipour J. Stochastic Buffer-Aided Relay-Assisted MEC // IEEE Communications Letters. 2020. Vol. 24. N 4. P. 931–934.
37. Doan T. V., You D., Salah H., Nguyen G. T., Fitzek H. P. F. MEC-assisted Immersive Services: Orchestration Framework and Protocol // IEEE Intern. Symposium on Broadband Multimedia Systems and Broadcasting (BMSB), Jeju, Korea (South), 2019. P. 1–6.
38. Wu S., Xia W., Cui W., Chao Q., Lan Z., Yan F., Shen L. An Efficient Offloading Algorithm Based on Support Vector Machine for Mobile Edge Computing in Vehicular Networks // 10th International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP), Hangzhou. 2018. P. 1–6.
39. Zhang Q., Chen J., Ji L., Feng Z., Han Z., Chen Z. Response Delay Optimization in Mobile Edge Computing Enabled UAV Swarm // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2020. Vol. 69. N 3. P. 3280–3295.
40. Belogaev A., Elokhin A., Krasilov A., Khorov E., Akyildiz I. F. Cost-Effective V2X Task Offloading in MEC-Assisted Intelligent Transportation Systems // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 169010–169023.
41. Zhou Z., Yu S., Chen W., Chen X. CE-IoT: Cost-Effective Cloud-Edge Resource Provisioning for Heterogeneous IoT Applications // IEEE Internet of Things Journal. 2020. Vol. 7. N 9. P. 8600–8614.
42. Nguyen M. N. H., Zaw C. W., Kim K., Tran N. H., Hong C. S. Let's Share the Resource When We're Co-Located: Co-location Edge Computing // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2020. Vol. 69. N 5. P. 5618–5633.
43. Wang Y., Yang J., Guo X., Qu Z. A Game-Theoretic Approach to Computation Offloading in Satellite Edge Computing // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 12510–12520.
44. Al-Mayouf Y. R. B., Ismail M., Abdullah N. F., Al-Qaraawi S. M., Mahdi O. A. Survey on VANET technologies and simulation models // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2016. Vol. 11. N 15. P. 9414–9427.
45. Jukic Z., Arshad M. Review of Simulation Based Comparison of VANET Protocols // New Technologies, Development and Application. NT 2018. Lecture Notes in Networks and Systems. Vol. 42. Springer.
46. Sanguesa J. A., Fogue M., Garrido P., Martinez F. J., Cano J.-C., Calafate C. T. A survey and comparative study of broadcast warning message dissemination schemes for VANETs / Mobile Information Systems. 2016, art.ID 8714142, 18 p.
47. Elgazzar M. M. A., Alshareef A. VANET Simulator: Full Design Architecture // International Journal of Engineering and Advanced Technology. 2020. Vol. 9. N 3.
48. Jia D., Lu K., Wang J., Zhang X., Shen X. A Survey on Platoon-Based Vehicular Cyber-Physical Systems // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2016. Vol. 18. N 1. P. 263–284.
49. VISSIM. [Electron. Res.]: <http://www.ptv-vision.com/en-uk/products/vision-traffic-suite/ptv-vissim/overview/>.
50. Harri J., Fiore M., Bonnet F. Vehicular mobility simulation with Vanet MobiSim // Simulation. 2009. Vol. 87. N 4. P. 275–300.
51. Behrisch M., Bieker L., Erdmann J., Krajzewicz D. SUMO simulation of urban Mobility—an overview // in Proc. 3rd Int. Conf. Adv. Syst. SIMUL. 2011. P. 63–68.
52. NS-3. [Electron. Res.]: <https://www.nsnam.org/>.
53. Omnetpp. [Electron. Res.]: [www.omnetpp.org](http://www.omnetpp.org).

54. TraNS. [Electron. Res.]: <http://lca.epfl.ch/projects/trans/>.
55. Rudometov S. V., Sokolova O. D. Modelirovanie peredachi soobshchenij mezhdu dvizhushchimisya obektami v transportnoj srede // Programmnye produkty i sistemy. 2019. T. 32. N 1. S. 141–145.
56. Sanguesa J.A., Fogue M., Garrido P., Martinez F., Cano J., Calafate C. A Survey and Comparative Study of Broadcast Warning Message Dissemination Schemes for VANETs // Mob. Inf. Syst. 2016.
57. Yang F., Wu N., Qiao Y., Zhou M., Su R., Qu T. Modeling and Optimal Cyclic Scheduling of Time-Constrained Single-Robot-Arm Cluster Tools via Petri Nets and Linear Programming // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2020. Vol. 50. N 3. P. 871–883.
58. Alam T., Bobadilla L., Shell D. A. Space-Efficient Filters for Mobile Robot Localization from Discrete Limit Cycles // IEEE Robotics and Automation Letters. 2018. Vol. 3. N 1. P. 257–264.
59. Zhang H., Niu M. Modeling and Analysis of Long-Term Average User Throughput in Mobile Ultra Dense Networks // IEEE Wireless Communications Letters. 2019. Vol. 8. N 5. P. 1498–1501.
60. Abdel-Aziz M. K., Samarakoon S., Liu C., Bennis M., Saad W. Optimized Age of Information Tail for Ultra-Reliable Low-Latency Communications in Vehicular Networks // IEEE Transactions on Communications. 2020. Vol. 68. N 3. P. 1911–1924.
61. Centenaro M., Tomasin S., Benvenuto N., Yang S. Predictive Voice-Over-Internet Protocol Fallback Over Vehicular Channels: Employing Artificial Intelligence at the Edge of 5G Networks // IEEE Vehicular Technology Magazine. 2020. Vol. 15. N 2. P. 72–78.



## АНАЛИЗ СЕТЕЙ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ

В. В. Шахов\*,\*\*, О. Д. Соколова\*

\*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090, Новосибирск, Россия

\*\*Новосибирский государственный технический университет,  
630073, Новосибирск, Россия

---

УДК 004.738.2

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10014

Статья представляет собой обзор научных публикаций на тему моделирования и анализа беспроводных самоорганизующихся сетей, не имеющих постоянной структуры. Основные задачи функционирования таких сетей связаны со сбором информации, распространением сообщений между движущимися узлами. В статье рассматриваются различные подходы к анализу функционирования сетей, описывается применение соответствующего математического аппарата, сравниваются системы имитационного моделирования.

**Ключевые слова:** нестационарные сети, модели сетей с подвижными узлами, системы массового обслуживания, имитационное моделирование.

**Введение.** В последние годы произошел большой технологический скачок, обусловленный появлением сетей связи с нестационарной топологией. Примерами таких сетей являются сети с мобильными абонентами, с узлами на транспортных средствах (VANET, Vehicle ad-hoc network), на беспилотных летающих аппаратах и др. Кроме того, топология стационарных сетей тоже может меняться из-за преднамеренных или непреднамеренных разрушающих воздействий, особенностей сетевых протоколов (ретранслятор может меняться, радиус передачи и маршруты варьируются и т. п.). Методы, используемые для решения задач в классических сетях (например, централизованная маршрутизация с иерархией заранее назначенных маршрутизаторов), в новых условиях оказываются неэффективными, необходима адаптация моделей и подходов.

Исследованиями по теме оптимизации передачи данных в нестационарных сетях занимаются как зарубежные, так и российские компании, реализуются международные научно-технические проекты. Среди актуальных задач можно выделить следующие: влияние мобильности узлов на производительность сети [1], локализация мобильных узлов [2], определение эффективной зоны покрытия передачи [3], энергоэффективность [4] и др. Одна из таких задач — улучшение качества связи между транспортными средствами и сетью Интернет. В сетях VANET роль станций, передающих информацию от движущихся объектов в сеть, выполняют объекты придорожного оборудования (RSU, road side unit). Но их недостаток в том, что они неподвижны, после установки на обочине дороги их нельзя перемещать. Следовательно, по мере изменения потока транспорта будет либо

---

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант № 19-01-00562-а.

недостаток, либо избыток таких объектов. По сравнению с неподвижными RSU, беспилотные летательные аппараты (БЛА) могут перемещаться в зависимости от изменения транспортного потока. В статье [5] авторы изучают проблему увеличения покрытия сети для VANET с помощью беспилотных летательных аппаратов, которые выполняют роль базовых станций. Много публикаций посвящено описанию технологий локализации беспроводных мобильных датчиков. Например, в [6] подробно описан принцип работы метода определения локализации на основе алгоритма Monte-Carlo Location.

Далее в предлагаемом обзоре анализируются публикации последних лет, в которых исследуются различные способы моделирования сетей с подвижными узлами и алгоритмы оптимизации функционирования таких сетей.

**1. Теоретико-графовые методы для решения оптимизационных задач в сетях с нестационарной топологией.** Во многих публикациях в качестве моделей нестационарных сетей рассматриваются случайные графы, гиперграфы [7–8]. Использование моделей и алгоритмов теории графов позволяет исследовать отношения между различными элементами в сети, решать задачи оптимизации передачи данных. Например, гиперграфовые модели удобны для учета интерференции в сетях с большим количеством подвижных узлов. Применение алгоритмов теории графов для решения задач в основном делится на две категории: исследование данных о мобильных пользователях для определения моделей движения и планирование функционирования сотовой сети с ресурсным спектром. В статьях [9, 10] авторы анализируют применение известных теоретико-графовых алгоритмов в некоторых задачах оптимизации функционирования мобильных сетей. Так, известная в теории графов теорема о четырех красках имеет приложения в беспроводных мобильных сетях. Топология сети, состоящая из базовых станций, моделируется плоским графом. Задача оптимизации распределения частот в сети сводится к задаче раскраски вершин графа. Алгоритм раскраски может использоваться для оптимального размещения вышек и минимизации интерференции.

Статья [11] посвящена проблеме изменения топологии связи, вызванной перемещением набора мобильных агентов. Сеть моделируется как граф кругов единичного радиуса (Unit Disk Graph, UDG) на плоскости в Евклидовом пространстве, где каждый единичный круг центрируется в узле, а топология связи задается мгновенным положением узлов. Все мобильные устройства оснащены простыми приемо-передатчиками с ограниченной дальностью связи. UDG-графы позволяют компактно представить топологию сети в виде пересечения единичных кругов, а свойства этих графов используются для различных алгоритмов. Цель авторов — смоделировать все возможные топологии, которые могут быть созданы путем перемещения мобильных устройств с ограниченным диапазоном связи в двумерном пространстве при следующих предположениях: количество мобильных узлов постоянно; на каждом шаге удаляется или создается одно соединение; граф связан в любой момент времени. Показано, что с помощью комбинаторных методов можно сгенерировать все возможные топологии.

В статье [12] исследуются сети связи с узлами на крупных подвижных объектах с прогнозируемой траекторией передвижения (самолеты, поезда). Авторы рассматривают анализ модели системы связи на основе дискретно-временного подхода. Последовательность топологических изменений сети представляется в виде конечной последовательности состояний статического графа, каждое последующее состояние отличается от предыдущего на некоторое приращение  $\Delta$ . Изменения в топологии графа определяются параметрами движения узлов сети и характеристиками каналов связи между узлами. Авторы использу-

зуют понятие „граф, эволюционирующий по определенному закону“, (в англоязычной литературе подобный термин — *evolving graph*). Протокол маршрутизации должен обеспечивать поиск альтернативных маршрутов при переходе системы связи из одного топологического состояния в другое. Авторы показали, что использование модели дискретного времени и модели, основанной на методах теории случайных графов, недостаточно корректно для описания систем связи, в которых в качестве узлов используются крупные подвижные объекты. Была предложена модель „мерцающего“ графа, в которой менялись каналы, пригодные для передачи информации с заданными параметрами качества. Такая же модель на основе эволюционирующего графа применяется авторами статьи [13] для оптимизации функционирования сетей VANET. Предложен алгоритм для поиска наиболее надежного маршрута в сети от источника до пункта назначения. Фиксируются изменяющиеся характеристики топологии автомобильной сети и заранее определяются надежные маршруты для поддержки качества обслуживания в процессе маршрутизации.

**2. Марковские процессы.** Для решения некоторых важных прикладных проблем не возникает необходимости анализировать поведение всей сети с мобильными узлами, достаточно рассмотреть поведение системы в некоторой окрестности, представляющей интерес для исследователя. Например, область покрытия приемо-передатчика, которым оснащено устройство придорожной инфраструктуры [14], сегменты дорог, где действуют преднамеренно созданные помехи [15], зона повышенного загрязнения воздуха [16] и т. д. В этом случае для анализа различных показателей эффективности сети используется теория случайных процессов, в которой особое место занимают Марковские цепи с непрерывным временем, поскольку они позволяют достаточно точно описывать поведение реальных систем, и, кроме того, для них хорошо развит математический аппарат. В частности, при исследовании автомобильных сетей (VANET, V2X, IoV) часто используются Пуассоновские потоки событий [17–19], под действием которых происходят переходы из одного состояния Марковской цепи в другое. С использованием Пуассоновского процесса моделируются и потоки транспортных средств, и потоки передаваемых пакетов данных.

Пуассоновский процесс наблюдается при весьма распространенных условиях [20]. Пусть  $N(t)$  — число объектов (пакетов, требований на обслуживание, мобильных узлов и т. п.), поступивших в рассматриваемую систему на временном интервале  $(0; t)$ . Предположим, что  $N(0) = 0$ . Обозначим через  $\lambda$  некоторую положительную константу. Сформулируем указанные условия.

- 1)  $\forall t_1, t_2, t_3, t_4 : t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ , числа  $N(t_2 - t_1)$  и  $N(t_4 - t_3)$  являются независимыми.
- 2) Вероятность, отражающая число объектов, поступивших в систему на некотором интервале  $(t; t + \Delta)$ , зависит только от длины  $\Delta$  и не зависит от начала интервала  $t$ .
- 3) Для достаточно малого  $\Delta$  выполняются следующие равенства для вероятностей событий:

$$\begin{aligned} P[N(t + \Delta) - N(t) = 1] &= \lambda\Delta + o(\Delta) \\ P[N(t + \Delta) - N(t) = 0] &= 1 - \lambda\Delta + o(\Delta) \\ P[N(t + \Delta) - N(t) > 1] &= o(\Delta) \end{aligned},$$

(Δ)

где  $o(\Delta)$  — функция, удовлетворяющая условию:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Условие 3) означает, что вероятность поступления в систему более одного объекта за достаточно малое время пренебрежимо мала, имеет смысл учитывать лишь вероятности отсутствия поступлений в систему и поступления одного требования. Если указанные условия выполнены, то поток объектов в систему является Пуассоновским, случайная величина  $N(t)$  распределена следующим образом:

$$p[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n \geq 0.$$

При этом случайная величина  $i$ , характеризующая интервалы между соседними поступлениями, будет иметь экспоненциальное распределение с плотностью:

$$f_i(x) = \begin{cases} \lambda t^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Верно и обратное: если время между соседними поступлениями распределено по экспоненциальному закону, то количество поступлений за некоторое время соответствует распределению Пуассона. Крупномасштабные экспериментальные исследования современных реальных сетей с подвижными узлами подтвердили обоснованность применения экспоненциального распределения [21–23] и соответствующих математических инструментов, среди которых выделяются Марковские модели очередей, которые традиционно используются для анализа телекоммуникационных систем.

В настоящее время теория очередей или теория систем массового обслуживания (СМО) активно применяется при исследовании и разработке сетей с мобильными узлами, в частности, технологий Multi-access Edge Computing (MEC), которые играют ключевую роль для развития сетей 5G и Интернета вещей [24]. Концепция MEC была предложена группой отраслевых спецификаций (ISG, Industry Specification Group) Европейского института телекоммуникационных стандартов (ETSI, European Telecommunications Standards Institute) в 2014 г. с целью разрешить противоречие между ресурсоемкими приложениями, используемыми мобильными пользователями, и ограниченными ресурсами мобильных терминалов [25]. В основе концепции MEC лежит предложение делегировать выполнение большей части пользовательских вычислительных задач MEC серверам, находящимся в непосредственной близости от мобильных пользователей. В результате не только ускорится выполнение запросов пользователей, усилия возможны для обеспечения их конфиденциальности, уменьшится энергопотребление пользовательских устройств терминалов, но также существенно снизится объем передаваемого трафика в локальных и опорных сетях и, следовательно, соответствующие расходы. Следует отметить, что изначально аббревиатура MEC расшифровывалась как Mobile Edge Computing, но в 2016 г. на всемирном конгрессе MEC, где были представлены основные положения концепции, по инициативе ISGETSI „Mobile“ заменили на „Multi-access“ для того, чтобы отразить возрастающий интерес к MEC со стороны несотовых операторов. И уже с новым названием концепция MEC была включена в стандарт 5G консорциумом 3GPP (3rd Generation Partnership Project), разрабатывающим протоколы для мобильной связи [26].

Наиболее часто в исследованиях по тематике MEC используется простейшая Марковская цепь с непрерывным временем, описывающая поведение СМО, обозначаемой, согласно классификации по Кендалу, как M/M/1, т. е. на вход системы поступает Пуассоновский

поток запросов пользователей, время обслуживания поступивших запросов предполагается экспоненциальным, в системе имеется одно устройство для обслуживания запросов, очередь для запросов, ожидающих обработки, считается неограниченной. Подробное описание свойств данной системы и классификацию СМО по Кендалу можно найти, например, в монографии [27]. С помощью системы М/М/1 моделируется функционирование МЕС сервера:

- при исследовании стратегии разгрузки МЕС сервера [25] в ультраплотных сетях (ultra-dense network [28]);
- для сравнительного анализа задержки и стоимости обработки пользовательских запросов в автомобильных сетях, когда используются разные способы организации связи: V2V, V2I и их комбинации [29];
- для оптимизации предложенной нагрузки и вычислительной мощности облачных вычислительных систем с вертикальной и горизонтальной загрузкой [30];
- для одновременной оптимизации энергопотребления и задержки в приложениях IoT [31];
- при решении задачи размещения МЕС серверов [32];
- для оптимизации трехмерного развертывания МЕС серверов, установленных на беспилотных летательных аппаратах [33];
- при разработке двухуровневой иерархической архитектуры МЕС, с использованием технологий оптических и беспроводных сетей, а также эффективного механизма оркестровки разгрузки серверов для улучшения QoE мобильных пользователей [34].

Также имеется множество других недавних публикаций, где для оптимизации МЕС технологий используется СМО вида М/М/1, например [35–38].

Некоторое развитие данный подход получил в статье [39], где рассматривается функционирование роя беспилотных летательных аппаратов (БЛА). Из соображений энергосбережения вычисления проводят не все участники роя аппаратов, для этого на некоторых БЛА развернуты МЕС сервера, функционирующие в режиме виртуальных машин для обеспечения множественного доступа. Для моделирования виртуальной машины используется СМО вида М/М/н.

В последнее время исследователи отмечают, что предположение об экспоненциальном законе распределения времени вычисления задачи МЕС сервером не всегда соответствует действительности, выводы на основе данного предположения могут потенциально привести к нарушению качества обслуживания [40]. Для моделирования функционирования МЕС сервера и обслуживания IoT приложений предлагается использовать СМО вида М/Г/1 [40–43].

**3. Имитационное моделирование для тестирования алгоритмов и моделей нестационарных сетей.** Для исследования многих проблем распространения информации и сбора данных в сетях с подвижными узлами широко применяется имитационное моделирование [44–46]. Авторы публикаций отмечают, что симуляторы для транспортных сетей VANET отличаются от симуляторов для мобильных одноранговых сетей MANET, они имеют разные характеристики и разную архитектуру, т. к. в сетях VANET быстро меняется топология сети, узлы движутся с высокими скоростями. В обзоре [46] представлено подробное сравнение различных общедоступных комплексов программ для моделирования функционирования сетей VANET: VANET MobSim, SUMO, CityMob и некоторых других. Описаны характеристики программного обеспечения, графический интерфейс пользователя, требования к вводу, возможность визуализации вывода, точность моделирования.

Авторы считают, что только система Vanet MobiSim обеспечивает хорошую поддержку трассировки, а симулятор CityMob отличается от других лучшим функционалом, в частности поддержкой модели трафика.

Для создания реалистичных сценариев обмена информацией между транспортными средствами требуется система имитационного моделирования, в которой реализованы сценарии, когда подвижные узлы могут безопасно и эффективно передавать данные. Очевидно, что система должна поддерживать как средства имитации движения транспорта, так и средства имитации передачи данных в сети.

Основная функция **симулятора движения** заключается в предоставлении точной модели мобильности каждого транспортного средства, а также взаимодействия между ними в виртуальной транспортной среде, чтобы можно было получить информацию о дорожном движении в каждый момент времени [47, 48]. Для моделирования мобильности транспортных средств можно использовать различные подходы. Например, для моделирования сетей широко используется случайное равномерное распределение узлов в некоторой области. Но эти шаблоны не очень подходят для сетей VANET, т. к. транспортные средства движутся не случайным образом, а по известным траекториям и дорогам. Более удачное предложение — использовать модели потока, т. е. рассматривать поведение транспортных средств во взаимодействии с соседями и окружающей средой. Также находят применение модели движения, при которых учитываются все факторы окружающей среды, светофоры, конечный маршрут следования транспортного средства.

Как правило, симулятор движения состоит из трех основных компонентов: ограничение движения (дороги, перекрестки, ограничения скорости и др.), генератор трафика (создание поездок, схема мобильности) и интерфейс (инструменты визуализации, программная платформа, интерфейс с другим программным обеспечением). Наиболее известные симуляторы транспортной мобильности — это VISSIM [49], Vanet MobiSim [50] и SUMO [51]. VISSIM — это программное обеспечение для моделирования транспортных потоков на основе микроскопических интервалов, поддерживает 3D-визуализацию состояния трафика в режиме реального времени. Vanet MobiSim — это агентный симулятор автомобильного движения, может поддерживать реалистичные модели движения как на макроскопическом, так и на микроскопическом уровне. SUMO (Simulation of Urban MObility) — симулятор движения с открытым исходным кодом, реализует моделирование на основе непрерывного в пространстве и дискретного во времени движения транспортного средства. SUMO также может считывать сети из других симуляторов трафика и позволяет внешнему приложению подключаться к моделированию и взаимодействовать с ним через общий интерфейс управления трафиком, что может сделать возможным соединение имитаторов трафика и сетевых имитаторов.

Симуляторы **передачи данных** обычно используются для моделирования и тестирования производительности сетевых протоколов. Самые популярные системы с открытым исходным кодом — это NS-3 [52] и OMNeT++ [53] — основаны на ядре моделирования дискретных событий. NS-3 — это симулятор сети с дискретными событиями, он является преемником известного симулятора NS-2 и поддерживает как проводные, так и беспроводные сети и, в частности, импортировал множество функций, подходящих для сетей VANET, например, реализацию моделей мобильности транспортных средств.

Среда моделирования передачи данных в сети с меняющейся топологией — это среда, которая интегрируется как с генератором изменения топологии, так и с симулятором сети. Например, среда TraNs [54] использует SUMO в качестве инструмента генератор-

ра мобильности и NS-2 в качестве сетевого симулятора, тем самым обеспечивая связь между поведением транспортного средства и моделью мобильности. В статье [55] представлена система имитационного моделирования на основе системы MTSS (Manufacturing and Transportation Simulation System). Система была разработана для имитации передачи сообщений подвижными приемопередающими модулями ограниченной мощности (как следствие — ограниченного радиуса действия). Использовались различные имитационные визуально-интерактивные модели участков дорожной инфраструктуры (на основе данных сервиса OpenStreetMap). В качестве результатов моделирования представлено влияние интерференции на распространение радиосигналов в плотной конфигурации сети VANET (например, большая загруженность на дороге в 8–10 рядов). Показано, что для дорог с меньшей шириной влияние интерференции незначительно. Следует отметить, что во многих публикациях по исследованиям сетей VANET [56] отмечается проблема конфликтов на уровне канала из-за чрезмерного количества широковещательных пакетов (broadcast storm problem) при одновременной трансляции сообщения сразу несколькими передатчиками. Проведенные с помощью системы MTSS тестирования широковещательной рассылки сообщений на различных топологиях подтверждают эту проблему.

**Заключение.** Представленный в данном обзоре инструментарий не покрывает, конечно, всех методов, используемых для анализа сетей с нестационарной топологией. Они очень разнообразны, включают, например, подход на основе сетей Петри и линейного программирования [57], конечные автоматы [58], стохастическую геометрию [59], невыпуклую оптимизацию [60] и т. д. В последнее время набирают популярность методы машинного обучения [61]. Однако рассмотренные в этом обзоре подходы являются наиболее часто используемыми и будут оставаться таковыми в обозримой перспективе.

## Список литературы

1. Wu X. A Hybrid View of Mobility in MANETs: Analytical Models and Simulation Study // Computer Comm. 2008. Vol. 31. N. 16. P. 3810–3821.
2. Barani, H., Fathy, M. An Algorithm for Localization in Vehicular Ad-Hoc Networks. // Journal of Computer Science. 2010. Vol. 6. N 2. P. 168–172.
3. Liu C., Yang O., Li G, Shu Y. Effective Transmission Coverage Area-Based Link Dynamics Characterization of VANET in Highway Scenario // International Journal of Distributed Sensor Networks. 2015. Vol. 11. N 10.
4. Elhoseny M., Shankar K. Energy Efficient Optimal Routing for Communication in VANETs via Clustering Model. // Emerging Technologies for Connected Internet of Vehicles and Intelligent Transportation System Networks. Studies in Systems, Decision and Control. 2020. Vol. 242.
5. Liu T., Zhao L., Li B., Zhao C. Research on the Enhancement of VANET Coverage Based on UAV // Liang Q., Wang W., Liu X., Na Z., Jia M., Zhang B. (eds) Communications, Signal Processing, and Systems. CSPS. 2019. Lecture Notes in Electrical Engineering. Vol. 571. Springer, Singapore.
6. Qiu, Z., Wu, L., Zhang, P. An Efficient Localization Method for Mobile Nodes in Wireless Sensor Networks // International Journal of Online Engineering. 2017. Vol. 13. N 3.
7. Sokolova O., Yurgenson A. Using graph, hypergraph, and hypernet models for network analysis problems // Proc. 7th International Forum on Strategic Technology (IFOST), 2012.
8. Reddy A. R., Venkatesh D., Ramesh K. Hypergraph Interference Models in Wireless Ad-Hoc Networks with Low Complexity Distributed Scheduling // International journal of scientific research. 2012. 2. P. 237–240.
9. Webb J., Docemilli F., Bonin, M. Graph Theory Applications in Network Security // ArXiv.2015. abs/1511.04785.

10. Yang L., Yu Y. H. A Mobile Frequency Allocation Algorithm Based on the Graph Theory // International Conference on Computer Information Systems and Industrial Applications. 2015.
11. Goldin D., Attia S. A. Unit Disk Graph Based Modelling of a Network of Mobile Agents // Proceedings of the First IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems. Venice, Italy. 2009.
12. Сорокин А. А., Дмитриев В. Н. Описание систем связи с динамической топологией сети при помощи модели „мерцающего графа“ // Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2. С. 134–139.
13. Eiza M. H., Ni Q. An Evolving Graph-Based Reliable Routing Scheme for VANETs // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2013. Vol. 62. N. 4. P. 1493–1504.
14. Liu K., Ng J. K. Y., Lee V. C. S., Son S. H., Stojmenovic I. Cooperative Data Scheduling in Hybrid Vehicular Ad Hoc Networks: VANET as a Software Defined Network // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2016. Vol. 24. N 3. P. 1759–1773.
15. Mokdad, L., Ben-Othman, J., Nguyen, A.T. DJAVAN: Detecting jamming attacks in Vehicle Ad hoc Networks // Performance Evaluation. 2015. Vol. 87. P. 47–59.
16. Shakhov V., Sokolova O. Towards Air Pollution Detection with Internet of Vehicles // 15th International Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems, Novosibirsk, Russia, 2019, P. 183–186.
17. Deng D., Lien S., Lin C., Hung S., Chen W. Latency Control in Software-Defined Mobile-Edge Vehicular Networking // IEEE Communications Magazine. 2017. Vol. 55. N 8, P. 87–93.
18. Zhou S., Sun Y., Jiang Z., Niu Z. Exploiting Moving Intelligence: Delay-Optimized Computation Offloading in Vehicular Fog Networks // IEEE Communications Magazine. 2019. Vol. 57. N 5. P. 49–55.
19. Zhou Z., Yu H., Xu C., Chang Z., Mumtaz S., Rodriguez J. BEGIN: Big Data Enabled Energy-Efficient Vehicular Edge Computing // IEEE Communications Magazine. 2018. Vol. 56. N 12. P. 82–89.
20. Бертsekas Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
21. Zhu H., Fu L., Xue G., Zhu Y., Li M., Nil. M. Recognizing Exponential Inter-Contact Time in VANETs // Proceedings IEEE INFOCOM, San Diego, CA, 2010. P. 1–5.
22. Jiang R., Zhu Y., Yang Y. Improving Throughput and Fairness of Converge cast in Vehicular Networks // IEEE Transactions on Mobile Computing. 2017. Vol. 16. N 11. P. 3070–3083.
23. Li Y., Jin D., Hui P., ChenS. Contact-aware data replication in roadside unit aided vehicular delay tolerant networks // IEEE Transactions on Mobile Computing. 2016. Vol. 15. N 2. P. 306–321.
24. LiuY., Peng M., Shou G., Chen Y., Chen S. Toward Edge Intelligence: Multiaccess Edge Computing for 5G and Internet of Things // IEEE Internet of Things Journal. 2020. Vol. 7. N 8. P. 6722–6747.
25. Guo H., Liu J., Zhang J. Computation Offloading for Multi-Access Mobile Edge Computing in Ultra-Dense Networks // IEEE Communications Magazine. 2018. Vol. 56. N 8. P. 14–19.
26. Mao Y., You, C. Zhang J., Huang K., Letaief K. B. A Survey on Mobile Edge Computing: The Communication Perspective // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2017. Vol. 19. N 4. P. 2322–2358.
27. Крылов В. В., Самохвалова С. С. Теория телеграфика и ее приложения // СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
28. Hashim M. F., Abdul Razak, N. I. Ultra-Dense Networks: Integration with Device to Device (D2D) Communication // Wireless Personal Communications. 2019. Vol. 106. P. 911–925.
29. Zhang K., Mao, Y. Leng S., He Y., Zhang Y. Mobile-Edge Computing for Vehicular Networks: A Promising Network Paradigm with Predictive Off-Loading // IEEE Vehicular Technology Magazine. 2017. Vol. 12. N 2. P. 36–44.
30. Thai M., Lin Y., Lai Y., Chien H. Workload and Capacity Optimization for Cloud-Edge Computing Systems with Vertical and Horizontal Offloading // IEEE Transactions on Network and Service Management. 2020. Vol. 17. N 1. P. 227–238.

31. Cui L., Xu C., Yang S., Huang J. Z., Li J., Wang X., Ming Z., Lu N. Joint Optimization of Energy Consumption and Latency in Mobile Edge Computing for Internet of Things // IEEE Internet of Things Journal. 2019. Vol. 6. P. 4791–4803.
32. Chen Y., Sun Y., Feng T., Li S. A Collaborative Service Deployment and Application Assignment Method for Regional Edge Computing Enabled IoT // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 112659–112673.
33. Islambouli R., Sharafeddine S. Optimized 3D Deployment of UAV-Mounted Cloudlets to Support Latency-Sensitive Services in IoT Networks // IEEE Access. 2019. Vol. 7. P. 172860–172870.
34. Ebrahimzadeh A., Maier M. Cooperative Computation Offloading in FiWi Enhanced 4G HetNets Using Self-Organizing MEC // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2020. Vol. 19. N 7. P. 4480–4493.
35. Wang S., Zhang X., Yan Z., Wenbo W. Cooperative Edge Computing With Sleep Control Under Nonuniform Traffic in Mobile Edge Networks // IEEE Internet of Things Journal. 2019. Vol. 6. N 3. P. 4295–4306.
36. Hajipour J. Stochastic Buffer-Aided Relay-Assisted MEC // IEEE Communications Letters. 2020. Vol. 24. N 4. P. 931–934.
37. Doan T. V., You D., Salah H., Nguyen G. T., Fitzek H. P. F. MEC-assisted Immersive Services: Orchestration Framework and Protocol // IEEE Intern. Symposium on Broadband Multimedia Systems and Broadcasting (BMSB), Jeju, Korea (South), 2019. P. 1–6.
38. Wu S., Xia W., Cui W., Chao Q., Lan Z., Yan F., Shen L. An Efficient Offloading Algorithm Based on Support Vector Machine for Mobile Edge Computing in Vehicular Networks // 10th International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP), Hangzhou. 2018. P. 1–6.
39. Zhang Q., Chen J., Ji L., Feng Z., Han Z., Chen Z. Response Delay Optimization in Mobile Edge Computing Enabled UAV Swarm // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2020. Vol. 69. N 3. P. 3280–3295.
40. Belogaev A., Elokhin A., Krasilov A., Khorov E., Akyildiz I. F. Cost-Effective V2X Task Offloading in MEC-Assisted Intelligent Transportation Systems // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 169010–169023.
41. Zhou Z., Yu S., Chen W., Chen X. CE-IoT: Cost-Effective Cloud-Edge Resource Provisioning for Heterogeneous IoT Applications // IEEE Internet of Things Journal. 2020. Vol. 7. N 9. P. 8600–8614.
42. Nguyen M. N. H., Zaw C. W., Kim K., Tran N. H., Hong C. S. Let's Share the Resource When We're Co-Located: Co-location Edge Computing // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2020. Vol. 69. N 5. P. 5618–5633.
43. Wang Y., Yang J., Guo X., Qu Z. A Game-Theoretic Approach to Computation Offloading in Satellite Edge Computing // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 12510–12520.
44. Al-Mayouf Y. R. B., Ismail M., Abdullah N. F., Al-Qaraawi S. M., Mahdi O. A. Survey on VANET technologies and simulation models // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2016. Vol. 11. N 15. P. 9414–9427.
45. Jukic Z., Arshad M. Review of Simulation Based Comparison of VANET Protocols // New Technologies, Development and Application. NT 2018. Lecture Notes in Networks and Systems. Vol. 42. Springer.
46. Sanguesa J. A., Fogue M., Garrido P., Martinez F. J., Cano J.-C., Calafate C. T. A survey and comparative study of broadcast warning message dissemination schemes for VANETs / Mobile Information Systems. 2016, art.ID 8714142, 18 p.
47. Elgazzar M. M. A., Alshareef A. VANET Simulator: Full Design Architecture // International Journal of Engineering and Advanced Technology. 2020. Vol. 9. N 3.
48. Jia D., Lu K., Wang J., Zhang X., Shen X. A Survey on Platoon-Based Vehicular Cyber-Physical Systems // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2016. Vol. 18. N 1. P. 263–284.

49. VISSIM. [Electron. Res.]: <http://www.ptv-vision.com/en-uk/products/vision-traffic-suite/ptv-vissim/overview/>.
50. Harri J., Fiore M., Bonnet F. Vehicular mobility simulation with Vanet MobiSim // Simulation. 2009. Vol. 87. N 4. P. 275–300.
51. Behrisch M., Bieker L., Erdmann J., Krajzewicz D. SUMO simulation of urban Mobility—an overview // in Proc. 3rd Int. Conf. Adv. Syst. SIMUL. 2011. P. 63–68.
52. NS-3. [Electron. Res.]: <https://www.nsnam.org/>.
53. Omnetpp. [Electron. Res.]: [www.omnetpp.org](http://www.omnetpp.org).
54. TraNS. [Electron. Res.]: <http://lca.epfl.ch/projects/trans/>.
55. Рудометов С. В., Соколова О. Д. Моделирование передачи сообщений между движущимися объектами в транспортной среде // Программные продукты и системы. 2019. Т. 32. № 1. С. 141–145.
56. Sanguesa J. A., Fogue M., Garrido P., Martinez F., Cano J., Calafate C. A Survey and Comparative Study of Broadcast Warning Message Dissemination Schemes for VANETs // Mob. Inf. Syst. 2016.
57. Yang F., Wu N., Qiao Y., Zhou M., Su R., Qu T. Modeling and Optimal Cyclic Scheduling of Time-Constrained Single-Robot-Arm Cluster Tools via Petri Nets and Linear Programming // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2020. Vol. 50. N 3. P. 871–883.
58. Alam T., Bobadilla L., Shell D. A. Space-Efficient Filters for Mobile Robot Localization from Discrete Limit Cycles // IEEE Robotics and Automation Letters. 2018. Vol. 3. N 1. P. 257–264.
59. Zhang H., Niu M. Modeling and Analysis of Long-Term Average User Throughput in Mobile Ultra Dense Networks // IEEE Wireless Communications Letters. 2019. Vol. 8. N 5. P. 1498–1501.
60. Abdel-Aziz M. K., Samarakoon S., Liu C., Bennis M., Saad W. Optimized Age of Information Tail for Ultra-Reliable Low-Latency Communications in Vehicular Networks // IEEE Transactions on Communications. 2020. Vol. 68. N 3. P. 1911–1924.
61. Centenaro M., Tomasin S., Benvenuto N., Yang S. Predictive Voice-Over-Internet Protocol Fallback Over Vehicular Channels: Employing Artificial Intelligence at the Edge of 5G Networks // IEEE Vehicular Technology Magazine. 2020. Vol. 15. N 2. P. 72–78.



**Шахов Владимир Владимирович** — старший научный сотрудник Лаборатории системного моделирования и оптимизации Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, доцент Новосибирского государственного технического университета. Окончил механико-математический факультет Новосибирского государственного университета, получил степень кандидата физико-математических наук. Является вице-председателем Сибирской секции IEEE. Научные интересы включают моделирование и оценку производительности технических систем, технологии Интернета вещей, интеллектуальный анализ данных.

**Dr. Vladimir Shakhov** is a Senior Researcher with the Laboratory of system modeling and optimization of Institute of

Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS and Associate Professor of Novosibirsk State Technical University. He received the B.S. in mechanics and applied mathematics, M.S. degrees in mathematics, and Ph.D. degree in computer science from the Novosibirsk State University. He is the Vice Chair of the IEEE Russian Siberia Section. His research interests include Applied Mathematics with Computer Science Applications, IoT Technologies, and Data Analytics.



интересы: математическое моделирование, со-

**Соколова Ольга Дмитриевна**, e-mail: [olga@rav.sccc.ru](mailto:olga@rav.sccc.ru) — канд. техн. наук, старший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Научные

временные сети передачи данных, беспроводные сенсорные сети, задачи оптимизации.

**Olga Sokolova** is a Senior Researcher of Institute of Computational Mathematics and

Mathematical Geophysics (ICMMG SB RAS). PhD in computer science. Research interests: modern data networks, wireless sensor networks.

*Дата поступления — 09.10.2020*

## REVIEW ON MODELS OF POLLING SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS TO TELECOMMUNICATION NETWORKS

V. M. Vishnevsky, O. V. Semenova

Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences  
117997, Moscow, Russia

---

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10015

The paper provides an overview of studies on stochastic polling systems published in 2007–2019. Due to the applicability of the stochastic polling models, the researchers face new and more complicated polling models. Stochastic polling models are effectively used for performance evaluation, design and optimization of the telecommunication systems and networks, transport systems and road management systems, traffic, production systems and inventory management systems. Polling systems are queuing systems with multiple queues and a common server (or a multiple servers). Each queue has its own input of customers. Following to a certain rule, the server visits the queues and serves the customers. In the review, we separately discuss the results for two-queue systems as a special case of polling systems. Then we discuss new and already known methods for polling system analysis including the mean value analysis and its application to the systems with heavy load to approximate the performance characteristics. We also present the results concerning the specifics in polling models: a polling order, service disciplines, methods to queue or to group arriving customers, and a feedback in polling systems. The new direction in the polling system models is investigation of how the customer service order within a queue affects the performance characteristics. The results on polling systems with correlated arrivals (MAP, BMAP, and the group Poisson arrivals simultaneously to all queues) are also considered. Then we briefly present the results on multi-server and non-discrete polling systems (the continuous systems where the number of waiting places are nondenumerable and the fluid polling models) are briefly presented.

**Key words:** polling systems, polling order, queue service discipline, mean value analysis, probability generating function method, broadband wireless networks.

### References

1. Vishnevsky V. M., Semenova O. V. Sistemy pollinga: teoriya i primeneniye v shirokopolosnykh besprovodnykh setyakh. M.: Tekhnosfera, 2007. [in Russian]
2. Vishnevsky V., Semenova O. Polling Systems: Theory and Applications for Broadband Wireless Networks // LAMBERT Academic Publishing, 2012.
3. Boon M. A. A., van der Mei R. D., Winands E. M. M. Applications of polling systems // Surveys in Operations Research and Management Science. 2011. V. 16, N 2. P. 67–82.
4. Cao J., Feng W., Chen Y., Ge N., Wang S. Performance analysis of a polling model with BMAP and across-queue state-dependent service discipline // IEEE Access. 2019. V. 7. P. 127230–127253.
5. He M., Guan Z., Wu Z., Lu L., Zhou Z., Anisetti M., Damiani E. A polling access control with exhaustive service in wireless body area networks for mobile healthcare using the sleeping schema // Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 2019. V. 10, N 10. P. 3761–3774.

---

The research is supported by the Russian Foundation for Basic Research, project N 19-29-06043.

6. Granville K., Drekic S. A 2-class maintenance model with dynamic server behavior // TOP. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11750-019-00509-1>.
7. Takagi H. Analysis of polling systems. MIT Press, 1986.
8. Borst S. C. Polling systems. Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1996.
9. Vishnevskii V. M., Semenova O. V. Mathematical methods to study the polling systems // Automation and Remote Control. 2006. V. 67, N 2. P. 173–220.
10. Vishnevsky V. M., Mishkoy G. K., Semenova O. V. New models and methods to study polling systems // Proceedings of the International Conference proceedings Distributed Computer and Communication Networks. Theory and Applications (DCCN-2009, Moscow). M.: R&D Company „Information and Networking Technologies“, 2009. P. 79–85. [in Russian]
11. Borst S. C., Boxma O. J. Polling: past, present, and perspective // TOP. 2018. V. 26, N 3. P. 335–369.
12. Vishnevsky V. M., Semenova O. V., Bui D. T., Sokolov A. M. Adaptive cyclic polling systems: analysis and application to the broadband wireless networks // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11965. P. 30–42.
13. Winands E. M. M., Adan I. J. B. F., van Houtum G. J., Down D. G. A state-dependent polling model with  $k$ -limited service // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2009. V. 23, N 2. P. 385–408.
14. Boon M. A. A., Adan I. J. B. F., Boxma O. J. A two-queue polling model with two priority levels in the first queue // Discrete Event Dynamic Systems. 2010. V. 20, N 4. P. 511–536.
15. Vlasiou M., Adan I. J. B. F., Boxma O. J. A two-station queue with dependent preparation and service times // European Journal of Operational Research. 2009. V. 195, N 1. P. 104–116.
16. Chernova N., Foss S., Kim B. A polling system whose stability region depends on the whole distribution of service times // Operations Research Letters. 2013. V. 41, N 2. P. 188–190.
17. Dorsman J.-P. L., Boxma O. J., van der Mei R. D. On two-queue Markovian polling systems with exhaustive service // Queueing Systems. 2014. V. 78, N 4. P. 287–311.
18. Boon M. A. A., Winands E. M. M. Heavy-traffic analysis of  $k$ -limited polling systems // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2014. V. 28, N 4. P. 451–471.
19. Adan I. J. B. F., Boxma O. J., Kapodistria S., Kulkarni V. G. The shorter queue polling model // Annals of Operations Research. 2016. V. 241, N 1. P. 167–200.
20. Gaidamaka Yu.V. Model with threshold control for analysing a server with SIP protocol in the overload mode // Automatic Control and Computer Science. 2013. V. 47, N 4. P. 211–218.
21. Shorgin S., Samouylov K., Gaidamaka Y., Etezov S. Polling system with threshold control for modeling of SIP server under overload // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2014. V. 240. P. 97–107.
22. Avrachenkov K., Perel E., Yechiali U. Finite-buffer polling system with threshold-based switching policy // TOP. 2016. V. 24, No. 3. P. 541–571.
23. Perel E., Yechiali U. Two-queue polling systems with switching policy based on the queue that is not being served // Stochastic Models. 2017. V. 33, N 3. P. 430–450.
24. Jolles A., Perel E., Yechiali U. Alternating server with non-zero switch-over times and opposite-queue threshold-based switching policy // Performance Evaluation. 2018. V. 126. P. 22–38.
25. Perel E., Perel N., Yechiali U. A polling system with „Join the shortest — serve the longest“ policy // Computers & Operations Research. 2019. V. 114, 104809.
26. Liu Z., Chu Y., Wu J. On the three-queue priority polling system with threshold service policy // Journal of Applied Mathematics and Computing. 2017. V. 53, N 1. P. 445–470.
27. Chernova N., Foss S., Kim B. On the stability of a polling system with an adaptive service mechanism // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 125–144.
28. Winands E. M. M., Adan I. J. B. F., van Houtum G. J. Mean value analysis for polling systems // Queueing Systems. 2006. V. 54. P. 35–44.

29. van Vuuren M., Winands E. M. M. Iterative approximation of  $k$ -limited polling systems // Queueing Systems. 2007. V. 55. N 3. P. 161–178.
30. van der Mei R. D., Winands E. Heavy traffic analysis of polling models by mean value analysis // Performance Evaluation. 2008. V. 65, N 6–7. P. 400–416.
31. Vishnevsky V. M., Semenova O. V. Adaptive dynamical polling in wireless networks // Cybernetics and Information Technologies. 2008. V. 8, N 1. P. 3–11.
32. Wierman A., Winands E., Boxma O. J. Scheduling in polling systems // Performance Evaluation. 2007. V. 64, N 9–12. P. 1009–1028.
33. Boon M. A. A., van Wijk A. C. C., Adan I. J. B. F., Boxma O. J. A polling model with smart customers // Queueing Systems. 2010. V. 66. P. 239–274.
34. Vishnevskii V. M., Semenova O. V., Shpilev S. A. A duplex cyclic polling system for mixed queues // Automation and Remote Control. 2009. V. 70. P. 2050–2060.
35. Yechiali U. Analysis and control of polling systems // Performance Evaluations of Computer and Communication Systems. Ed. Donatiello L., Nelson R. Springer-Verlag. 1993. P. 630–650.
36. Boxma O. J., Kella O., Kosinski K. M. Queue lengths and workloads in polling systems // Operations Research Letters. 2011. V. 39. N 6. P. 401–405.
37. Resing J. A. C. Polling systems and multitype branching processes // Queueing Systems. 1993. V. 13. P. 413–426.
38. Guan Z., Zhao D. A delay-guaranteed two-level polling model // Advances in Computer Science and Information Engineering. Advances in Intelligent and Soft Computing. 2012. V. 168. P. 153–158.
39. Saffer Z., Telek M. Unified analysis of  $BMAP/G/1$  cyclic polling models // Queueing Systems. 2010. V. 64, N 1. P. 69–102.
40. Vishnevsky V. M., Dudin A. N., Klimenok V. I. Stokhasticheskiye sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh. M.: Tekhnosfera, 2018.
41. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. Methods to Study Queuing Systems with Correlated Arrivals. 2020. Springer. 410 p.
42. Hirayama T., Hong S. J., Krunz M. M. A new approach to analysis of polling systems // Queueing Systems. 2004. V. 48, N 1–2. P. 135–158.
43. Hirayama T. Multiclass polling systems with Markovian feedback: mean sojourn times in gated and exhaustive systems with local priority and FCFS service orders // Journal of the Operations Research Society of Japan. 2005. V. 48, N 3. P. 226–255.
44. Hirayama T. Markovian polling systems: functional computation for mean waiting times and its computational complexity // Advances in Queueing Theory and Network Applications. W. Yue et al. (eds.) 2009. P. 119–146.
45. Rykov V. V. On analysis of periodic polling systems // Automation and Remote Control. 2009. V. 70. P. 997–1018.
46. van der Mei R. D. Towards a unifying theory on branching-type polling systems in heavy traffic // Queueing Systems. 2007. V. 57, N 1. P. 29–46.
47. Semenova O. V., Bui D. T. Paket prikladnykh programm dlya issledovaniya sistem pollinga // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika. 2020. N 50. P. 106–113. [in Russian]
48. Saffer Z.  $BMAP/G/1$  cyclic polling model with binomial disciplines // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. 2013. V. 356. P. 157–166.
49. Vishnevsky V. M., Semenova O. V., Bui D. T. Using machine learning to study polling systems with correlated flow input // Proceedings of the Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2020 (ITTMM 2020). Moscow, RUDN, April 13–17, 2020. P. 248–253. [in Russian]

50. Saffer Z., Telek M. Stability of periodic polling system with BMAP arrivals // European Journal of Operational Research. 2009. V. 197, N 1. P. 188–195.
51. Vis P., Bekker R., van der Mei R. D. Transient analysis of cycle lengths in cyclic polling systems // Performance Evaluation. 2015. V. 91. P. 303–317.
52. Dorsman J.-P. L., Borst S. C., Boxma O. J., Vlasiou M. Markovian polling systems with an application to wireless random-access networks // Performance Evaluation. 2015. V. 85–86. P. 33–51.
53. Hirayama T. Analysis of multiclass Markovian polling systems with feedback and composite scheduling algorithms // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 83–123.
54. Fiems D., Altman E. Gated polling with stationary ergodic walking times, Markovian routing and random feedback // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 145–164.
55. MacPhee I., Menshikov M., Petritis D., Popov S. A Markov chain model of a polling system with parameter regeneration // Annals of Applied Probability. 2007. V. 17, N 5–6. P. 1447–1473.
56. MacPhee I., Menshikov M., Petritis D., Popov S. Polling systems with parameter regeneration, the general case // Annals of Applied Probability. 2008. V. 18, N 6. P. 2131–2155.
57. Lee T. Analysis of single buffer random polling system with state-dependent input process and server/station breakdowns // International Journal of Operations Research and Information Systems (IJORIS). 2018. V. 9, N 1. P. 22–50.
58. Guan Z., Zhao D., Zhao Y. A discrete time two-level mixed service parallel polling model // Journal of Electronics (China). 2012. V. 29, N 1–2. P. 103–110.
59. Yang Z., Ding H. Characteristics of a two-class polling system model // Tsinghua Science and Technology. 2014. V. 19, N 5. P. 516–520.
60. Bao L., Zhao D., Zhao Y. A priority-based polling scheduling algorithm for arbitration policy in Network on Chip // Journal of Electronics (China). 2012. V. 29, N 1–2. P. 120–127.
61. Vishnevsky V. M., Dudin A. N., Semenova O. V., Klimenok V. I. Performance analysis of the *BMAP/G/1* queue with gated servicing and adaptive vacations // Performance Evaluation. 2011. V. 68, N 5. P. 446–462.
62. Vishnevsky V. M., Dudin A. N., Klimenok V. I., Semenova O. V., Shpilev S. Approximate method to study *M/G/1*-type polling system with adaptive polling mechanism // Quality Technology and Quantitative Management. 2012. V. 2. P. 211–228.
63. Semenova O. V., Bui D. T. Method of generating functions for performance characteristic analysis of the polling systems with adaptive polling and gated service // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 348–359.
64. Boon M. A. A., Adan I. J. B. F. Mixed gated/exhaustive service in a polling model with priorities // Queueing Systems. 2009. V. 63, N 1–4. P. 383–399.
65. Boon M. A. A., Adan I. J. B. F., Boxma O. J. A polling model with multiple priority levels // Performance Evaluation. 2010. V. 67, N 6. P. 468–484.
66. Shapira G., Levy H. On fairness in polling systems // Annals of Operations Research. 2016. <https://doi.org/10.1007/s10479-016-2247-8>
67. Boon M., Boxma O. J., Winands E. J. J. On open problem in polling systems // Queueing Systems. 2011. V. 68. N 3–4. P. 365–374.
68. Winands E. M. M. Branching-type polling systems with large setups // OR Spectrum. 2011. V. 33. P. 77–97.
69. Hanbali A. A., de Haan R., Boucherie R. J., van Ommeren J.-K. Time-limited polling systems with batch arrivals and phase-type service times // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 57–82.
70. Boxma O. J., Groenendijk W. P. Pseudo conservation laws in cyclic-service systems // Journal of Applied Probability. 1987. V. 24, N 4. P. 949–964.
71. Leonovich A., Ferng H.-W. Modeling the IEEE 802.11e HCCA mode // Wireless Networks. 2013. V. 19, N 5. P. 771–783.

72. de Haan R., Boucherie R. J., van Ommeren J.-K. A polling model with an autonomous server // Queueing Systems. 2009. V. 62, N 3. P. 279–308.
73. Horng S.-C., Lin S.-Y. Ordinal optimization of  $G/G/1/K$  polling systems with  $k$ -limited service discipline // Journal of Optimization Theory and Applications. 2009. V. 140, N 2. P. 213–231.
74. van der Mei R. D., Roubos A. Polling models with multi-phase gated service // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 25–56.
75. van Wijk A. C. C., Adan I. J. B. F., Boxma O. J., Wierman A. Fairness and efficiency for polling models with the  $k$ -gated service discipline // Performance Evaluation. 2012. V. 69, N 6. P. 274–288.
76. Remerova M., Foss S., Zwart B. Random fluid limit of an overloaded polling model // Advances in Applied Probability. 2014. V. 46, N 1. P. 76–101.
77. Ling Y., Liu C., Li Y. Study on queue strategy of gated polling multi-access communication system // Recent Advances in Computer Science and Information Engineering. Lecture Notes in Electrical Engineering. 2012. V. 124. P. 99–105.
78. Vishnevskii V. M., Lakontcev D. V., Semenova O. V., Shpilev S. A. Model sistemy pollinga dlia issledovaniia shirokopolosnykh besprovodnykh setei // Avtomatika i telemehanika. 2006. N 12. P. 123–135.
79. Vatutin V. A. Multitype Branching processes with immigration in random environment, and polling systems // Siberian Advances in Mathematics. 2011. V. 21, N 1. P. 42–72.
80. Abidini M. A., Boxma O., Resing J. Analysis and optimization of vacation and polling models with retrials // Performance Evaluation. 2016. V. 98. P. 52–69.
81. Kim B., Kim J. Analysis of the waiting time distribution for polling systems with retrials and glue periods // Annals of Operations Research. 2019. V. 277, N 2. P. 197–212.
82. Dorsman J. L., van der Mei R. D., Winands E. M. M. Polling systems with batch service // OR Spectrum. 2012. V. 34. P. 743–761.
83. Boon M. A. A., Winands E. M. M., Adan I. J. B. F., van Wijk A. C. C. Closed-form waiting time approximations for polling systems // Performance Evaluation. 2011. V. 68, N 3. P. 290–306.
84. Jiang T., Liu L., Zhu Y. Analysis of a batch service polling system in a multi-phase random environment // Methodology and Computing in Applied Probability. 2017. P. 1–20.
85. Shomrony M., Yechiali U. Polling systems with positive and negative customers // Technical Report, Department of Statistics and Operations Research, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel. 2006.
86. Shomrony M., Yechiali U. Polling systems with job failures and with station failures // Technical Report, Department of Statistics and Operations Research, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel. 2006.
87. Zorine A. V. On ergodicity conditions in a polling model with Markov modulated input and state-dependent routing // Queueing Systems. 2014. V. 76, N 2. P. 223–241.
88. Boon M. A. A. A polling model with reneging at polling instants // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 5–23.
89. Granville K., Dreikic S. On a 2-class polling model with reneging and  $k_i$ -limited service // Annals of Operations Research. 2019. V. 274, N 1. P. 267–290.
90. Neuts M. F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1981.
91. Boxma O. J., Bruin J., Fralix B. H. Sojourn times in polling systems with various service disciplines // Performance Evaluation. 2009. V. 66, N 11. P. 621–639.
92. Bekker R., Vis P., Dorsman J. L., van der Mei R. D., Winands E. M. M. The impact of scheduling policies on the waiting-time distributions in polling systems // Queueing Systems: Theory and Applications. 2015. V. 79, N 2. P. 145–172.
93. Vis P., Bekker R., van der Mei R. D. Heavy-traffic limits for polling models with exhaustive service and non-FCFS service order policies // Advances in Applied Probability. 2015. V. 47, N 4. P. 989–1014.

94. Kim B., Kim J. Sojourn time distribution in polling systems with processor-sharing policy // Performance Evaluation. 2017. Vol. 114, N 9. P. 97–112.
95. Cao J., Xie W. Stability of a two-queue cyclic polling system with BMAPs under gated service and state-dependent time-limited service disciplines // Queueing Systems. 2016. V. 85, N 1–2. P. 117–147.
96. Chen W.-L. Computing the moments of polling models with batch Poisson arrivals by transform inversion // INFORMS Journal of Computing. 2019. V. 31, N 3. P. 411–632.
97. Suman R., Krishnamurthy A. Analysis of tandem polling queues with finite buffers // Annals of Operations Research. 2019. <https://doi.org/10.1007/s10479-019-03358-0>
98. Antunes N., Fricker C., Roberts J. Stability of multi-server polling system with server limits // Queueing Systems. 2011. Vol. 68. P. 229–235.
99. Boxma O., van der Wal J., Yechiali U. Polling with batch service // Stochastic Models. 2008. V. 24, No.4. P. 604–625.
100. Vlasiou M., Yechiali U.  $M/G/\infty$  polling systems with random visit times // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2008. V. 22, N 1. P. 212–245.
101. van der Mei R. D., Winands E. M. M. A note on polling models with renewal arrivals and nonzero switch-over times // Operations Research Letters. 2008. V. 36. P. 500–505.
102. van der Mei R. D., Levy H. Polling systems in heavy traffic: Exhaustiveness of service policies // Queueing Systems. 1997. V. 27, N 3–4. P. 227–250.
103. Dorsman J. L., van der Mei R. D., Winands E. M. M. A new method for deriving waiting-time approximations in polling systems with renewal arrivals // Stochastic Models. 2011. V. 27. P. 318–332.
104. Boon M. A. A., van der Mei R. D., Winands E. M. M. Heavy traffic analysis of roving server networks // Stochastic Models. 2017. V. 33, N 3. P. 1–21.
105. Meyfroyt T. M. M., Boon M. A. A., Borst S. C., Boxma O. J. Performance of large-scale polling systems with branching-type and limited service // Performance Evaluation. 2019. V. 133. P. 1–24.
106. Kavitha V., Combes R. Mixed polling with rerouting and applications // Performance Evaluation. 2013. V. 70, N 11. P. 1001–1027.
107. Boxma O., Ivanovs J., Kosinski K., Mandjes M. Levy-driven polling systems and continuous-state branching processes // Stochastic Systems. 2011. V. 1, N 2. P. 411–436.
108. Leskela L., Unger F. Stability of a spatial polling system with greedy myopic service // Annals of Operations Research. 2012. Vol. 198, N 1. P. 165–183.
109. Kavitha V., Altman E. Continuous polling models and application to ferry assisted WLAN // Annals of Operations Research. 2012. Vol. 198, N 1. P. 185–218.
110. Beekhuizen P., Denteneer D., Resing J. Reduction of a polling network to a single node // Queueing Systems. 2008. V. 58, No. 4. P. 303–319.
111. Matveev A., Feoktistova V., Bolshakova K. On global near optimality of special periodic protocols for fluid polling systems with setups // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. V. 171, N 3. P. 1055–1070.
112. Saffer Z., Telek M., Horvath G. Fluid polling system with Markov modulated load and gated discipline // Lecture Notes in Computer Science. 2018. V. 10932. P. 86–102.
113. Yechiali U., Czerniak O. Fluid polling systems // Queueing Systems. 2009. V. 63, N 12. P. 401–435.
114. Czerniak O., Altman E., Yechiali U. Orchestrating parallel TCP connections: cyclic and probabilistic polling policies // Performance Evaluation. 2012. V. 69, N 3–4. P. 150–163.



# ОБЗОР МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ПОЛЛИНГА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ

В. М. Вишневский, О. В. Семенова

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН  
117997, Москва, Россия

---

УДК 519.872

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10015

В статье представлен обзор работ по исследованию стохастических систем поллинга, опубликованных в период 2007–2019 гг. Приведена классификация дискретных и непрерывных систем поллинга. Описаны точные и приближенные методы исследования систем поллинга с различными типами входящих потоков (пуассоновские и ВМАР-потоки) и количеством очередей, а также различными дисциплинами обслуживания и порядком опроса очередей. Приводится описание применения моделей поллинга в различных приложениях, в частности, для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей с централизованным механизмом управления.

**Ключевые слова:** системы поллинга, порядок опроса, дисциплина обслуживания очереди, метод анализа средних, метод производящих функций, широкополосные беспроводные сети.

*Окончание. Начало в предыдущем номере.*

**6. Дисциплины обслуживания очередей.** В работе [66] ставится вопрос о справедливости дисциплин обслуживания в системах поллинга (как для дискретных, с конечным числом очередей, так и для непрерывных систем поллинга). Рассматриваются следующие дисциплины: шлюзовая, исчерпывающая, биномиально-шлюзовая, двухфазная шлюзовая и глобально шлюзовая. Под количественным выражением справедливости  $F$  для произвольной заявки понимается отношение среднего числа заявок, обслуженных перед данной заявкой, к общему среднему числу заявок, находящихся в системе в момент ее поступления. Показано, что с точки зрения порядка обслуживания заявок внутри очереди наиболее справедливым является порядок FIFO (первым пришел, первым обслужился), в этом случае  $F = 1$ , а LIFO (последним пришел, первым обслужился) — самый несправедливый порядок,  $F = 0$ . Случайный выбор заявки на обслуживание дает  $F = 0,5$ . В случае дискретных систем поллинга для пяти рассмотренных дисциплин обслуживания очередей в данной работе изложен алгоритм вычисления  $F$ . Показано, что для систем поллинга с большим числом очередей значение  $F$  при шлюзовом и исчерпывающем обслуживании становится близкими, а при увеличении числа фаз в многофазном шлюзовом обслуживании  $F \rightarrow 1$ . Глобально-шлюзовое обслуживание является более справедливым, чем исчерпывающее или шлюзовое, но менее, чем любое многофазное обслуживание. Самым несправедливым обслуживанием из рассмотренных является биномиально-шлюзовое. Для

---

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 19-29-06043.

случая непрерывной системы  $F = 2/3$  при исчерпывающем и шлюзовом обслуживании,  $F = 8/9$  при двухфазном шлюзовом обслуживании,  $F = \frac{6k-4}{6k-3}$  при  $k$ -фазном шлюзовом и

$$F = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \left( \frac{3-p}{12-6p} + \frac{n}{2} \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n (1/2 + n)}$$

при биномиально-шлюзовом обслуживании с параметром  $p$ , и при  $0 < p \leq 1$  имеет место  $1/2 \leq F \leq 2/3$ .

Далее отдельно выделим работы, касающиеся ограниченного обслуживания и многофазного шлюзового обслуживания, а также остальных дисциплин обслуживания.

6.1. *Ограниченнное обслуживание.* Как отмечено выше, система двух очередей типа  $M/M/1$  с  $k$ -ограниченным обслуживанием исследована в [18]. В [29] для системы поллинга типа  $M/G/1$  с ограниченным обслуживанием применен метод анализа средних (подробнее см. раздел 4.1).

Работа [67] посвящена двум нерешенным проблемам в теории систем поллинга: анализ системы с двумя очередями, одна из которых получает шлюзовое, а другая — 1-ограниченное обслуживание, а также анализ системы с детерминированными, бесконечно большими временами переключения сервера между очередями. Приведен обзор работ, касающихся этих вопросов, а также описаны трудности анализа этих систем. Вторая проблема более подробно исследуется в работе [68], при этом предполагается, что дисциплины обслуживания очередей являются дисциплинами ветвящегося типа [37] (см. раздел 4.2). Предложен асимптотический анализ распределений вероятностей состояний в таких системах.

В статье [69] рассмотрена модель с автономным (самоуправляющимся) сервером и ограниченной по времени ( $T$ -ограниченной) дисциплиной обслуживания очередей для системы поллинга типа  $M_K/G/1$  с групповым поступлением заявок. Напомним, что при  $T$ -ограниченной дисциплине сервер обслуживает очередь до тех пор, пока время его пребывания не истечет (это время еще называют временем таймера), либо пока очередь не опустела. Автономный же сервер должен находиться у очереди все время его пребывания (независимо от того, опустела очередь или нет). Эти два способа посещения сервером очереди не являются дисциплинами ветвящегося типа, что затрудняет точный анализ характеристик системы [70]. Авторы предлагают итерационную схему нахождения совместных распределений числа заявок в очередях в моменты подключения и опроса сервером очереди. В [71]  $T$ -ограниченная дисциплина рассмотрена для системы поллинга типа  $M/G/1/K$ .

В статье [48] исследуется система поллинга с очередями типа  $BMAP/G/1$  с групповым марковским входным потоком  $BMAP$  и биномиально-шлюзовым (биномиально-исчерпывающим) обслуживанием очередей. Статья обобщает результаты работы [39]. Напомним, что при биномиально-шлюзовой дисциплине каждая заявка, находящаяся в очереди  $Q_i$  в момент ее опроса будет обслужена с вероятностью  $p_i$ , а с дополнительной вероятностью  $1 - p_i$  она игнорируется сервером и остается в очереди. При биномиально-исчерпывающей дисциплине, если за время обслуживания заявок в очередь поступили новые заявки, то каждая из них будет обслужена с вероятностью  $p_i$  в этом же периоде обслуживания очереди. Такая система исследована методом производящих функций и получены функциональные уравнения для вероятностей состояний системы в моменты опроса очереди и моменты ухода сервера из очереди. Отмечено, что эти уравнения могут быть решены численно.

В [72] исследуется система поллинга типа  $M/G/1$  с  $T$ -ограниченной (с экспоненциальным распределением) дисциплиной обслуживания очередей с прерыванием обслуживания. Сервер в данной модели, как и в [69], предполагается автономным. Получено условие существования стационарного режима  $\rho_i < \zeta_i$ , где

$$\rho_i = \lambda_i \frac{1 - \tilde{B}_i(\xi_i)}{\xi_i \tilde{B}_i(\xi_i)}, \quad \zeta_i = \frac{1/\xi_i}{\sum_{j=1}^N (1/\xi_j + s_j)},$$

где  $\xi_i$  — среднее время пребывания сервера у очереди  $i$ ,  $\zeta_i$  — доля времени пребывания сервера у очереди  $i$  в цикле.

Далее система исследуется методом вложенных цепей Маркова. Также приводится приближенный анализ системы путем ее декомпозиции на отдельные системы массового обслуживания с отдыхами прибора. Распределения  $\omega^i(\mathbf{z})$ ,  $\pi_*^i(\mathbf{z})$  и  $\pi^i(\mathbf{z})$  числа заявок, соответственно, в моменты начала обслуживания, прерывания обслуживания и успешного окончания обслуживания очереди соотносятся как

$$\begin{aligned} \pi^i(\mathbf{z}) &= \frac{1}{\lambda} \tilde{B}_i(\xi_i) \left( \sum_{j=1}^N \lambda_j \tilde{B}_j(\xi_j) \right) \check{X}_i((\mathbf{z}) \frac{\omega^i(\mathbf{z})}{z_i}, \\ \pi_*^i(\mathbf{z}) &= (1 - \tilde{B}_i(\xi_i)) \left( \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{\tilde{B}_j(\xi_j)} - \lambda_i \right) X_i^*(\mathbf{z}) \omega^i(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \check{X}_i((\mathbf{z}) &= \frac{\tilde{B}_i(\xi_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j(1 - z_j))}{\tilde{B}_i(\xi_i)}, \\ X_i^*(\mathbf{z}) &= \frac{\xi_i}{(\xi_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j(1 - z_j))} \cdot \frac{1 - \tilde{B}_i(\xi_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j(1 - z_j))}{1 - \tilde{B}_i(\xi_i)}. \end{aligned}$$

Далее распределения  $a^i(\mathbf{z})$ ,  $b_*^i(\mathbf{z})$  и  $b^i(\mathbf{z})$  числа заявок, соответственно, начала, прерывания и окончания периода простоя сервера у очереди соотносятся как

$$b^i(\mathbf{z}) = \check{I}_i(\mathbf{z}) z_i a^i(\mathbf{z}), \quad b_*^i(\mathbf{z}) = \check{I}_i(\mathbf{z}) a^i(\mathbf{z}),$$

где  $\check{I}_i(\mathbf{z}) = \frac{\tilde{I}_i(\xi_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j(1 - z_j))}{\tilde{I}_i(\xi_i)}$ , а  $\tilde{I}_i(s)$  — ПЛС распределения времени между моментами поступления заявок в очередь  $i$ .

Система поллинга с очередями типа  $G/G/1/K$  и  $k$ -ограниченным обслуживанием рассмотрена в [73]. Параметры системы симметричны (не зависят от номера очереди  $i$ ), за исключением параметров входных потоков. Исследуется задача нахождения оптимальных значений  $k_i$  (ограничений на число заявок, которые могут быть обслужены за одно посещение сервером очереди), минимизирующих целевую функцию (среднюю стоимость ожидания заявки в системе в единицу времени, а также штрафа за потерю поступающих в очередь заявок, если буфер очереди полон). Для решения задачи оптимизации строится искусственная нейронная сеть, а все характеристики производительности вычисляются с помощью имитационного моделирования.

**6.2. Многофазное шлюзовое обслуживание.** Многофазное шлюзовое обслуживание как обобщение шлюзовой дисциплины введено в статье [74]. Каждая заявка, поступающая

в очередь  $Q_i$ , должна ждать  $k_i$  циклов перед тем, как она будет обслужена сервером,  $i = \overline{1, N}$ . Как отмечают авторы, целью такой дисциплины является предотвращение „монополизации“ сервера более загруженными очередями путем выбора подходящего уровня  $k_i$ . Ставится задача поиска оптимальных значений  $k_i$  для всех  $i = \overline{1, N}$ , минимизирующих взвешенную сумму средних времен ожидания в очередях. Как отмечается в работе, эта задача будет нетривиальной, если система находится в условиях большой загрузки, и для этого случая получено асимптотическое распределение времен ожидания для вычисления приближенных значений моментов и хвоста распределения времен ожидания в условиях обычной загрузки. Еще одна задача оптимизации значений  $k_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  решается в работе [75]. Ставится задача максимизировать попарную разность между средними временами ожидания в очередях (так называемую „справедливость“ обслуживания) и в то же время сохранить эффективность как взвешенную сумму средних времен ожидания, т. е. в качестве критерия оптимизации выбирается выражение

$$\gamma(\alpha) = (1 - \alpha) \max_{i,j=\overline{1, N}} (\mathbf{M}[W_i] - \mathbf{M}[W_j]) + \alpha \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{M}[W_i]$$

для некоторого параметра  $\alpha \in (0, 1)$ , который позволяет учитывать желаемое соотношение между „справедливостью“ и „эффективностью“.

В работе [76] для системы с многофазным шлюзовым обслуживанием проведен асимптотический анализ случного процесса, описывающего длину отдельной очереди с помощью жидкостной модели. В [60, 77] рассматривается система с трехфазным шлюзовым обслуживанием.

**6.3. Другие виды дисциплин.** В [78] рассмотрена система с исчерпывающей пороговой дисциплиной обслуживания очередей. Очередь может быть обслужена, если ее длина превышает заданный порог. В случае, если все очереди имеют длину, недостаточную для начала обслуживания, обслуживающий прибор прекращает обход очередей и возобновляет его в момент, когда какая-либо из них не накопит требуемое число заявок. Пороговые дисциплины обслуживания также рассматривались для систем поллинга с двумя очередями [22, 24], а в [26] — для системы с тремя очередями (раздел 3).

Для многомерного ветвящегося процесса с миграцией, функционирующем в случайной среде и производящего готовый продукт, в [79] получен „хвост“ распределения объемов готового продукта, произведенного за время жизни процесса. С использованием этого результата исследуется „хвост“ распределения периода занятости систем поллинга со случайными дисциплинами обслуживания очередей ветвящегося типа [37].

**7. Способы формирования очереди.** В данном разделе перечислены работы, исследующие различные способы формирования очередей на обслуживание или способы упорядочивания и группирования поступающих заявок. К одному из таких способов можно отнести повторные вызовы. В системе с повторными вызовами заявка (первичная заявка), поступающая в систему в момент, когда сервер занят, уходит на так называемую орбиту и становится повторной. Далее она через случайные промежутки времени, независимо от других заявок на орбите, делает попытки занять сервер и обслужиться. Если попытка не удалась, заявка вновь возвращается на орбиту. В модели [80] каждая очередь системы поллинга представляет собой систему с повторными вызовами. После того как сервер подключился к очереди, он начинает период ожидания (или подготовки к обслуживанию), имеющему фиксированную длительность. Если в этот период заявка впервые поступает в

очередь или совершают повторную попытку занять место в очереди, то она принимается в очередь, и по окончании периода ожидания сервер начинает обслуживать накопившиеся таким образом заявки. По завершении обслуживания заявок сервер покидает очередь. Если же заявки делают попытки занять место в очереди в любой другой момент времени (вне периода ожидания), то в очередь они не принимаются и уходят на так называемую орбиту, откуда, независимо от других заявок, делают попытки попасть в очередь через случайное, экспоненциально распределенное время.

Дополнением к [80] является модель [81], в которой перед тем как начать обслуживание, сервер выжидает детеминированное время перед началом обслуживания очереди. И в этот период первичные заявки, поступающие в очередь, и повторные, сделавшие попытку занять место в очереди, принимаются в очередь. По истечении периода ожидания сервер приступает к обслуживанию очереди. С применением метода производящих функций получено ПЛС времени ожидания произвольной заявки. В [19] заявки в симметричную систему из двух очередей поступают из общего потока, но присоединяются к очереди меньшей длины.

Далее отметим работы, в которых заявки получают обслуживание группами, различаются лишь способы формирования групп на обслуживание. В статье [82] рассматривается модель поллинга типа  $G/G/1$  с внутренней и внешней частью, в которой заявки (продукты) могут получать обслуживание группами. Заявки  $i$ -го типа поступают вначале во внешнюю систему и скапливаются в группе типа  $i$ . Как только накопится  $D_i$  заявок, вся группа направляется в  $i$ -ю очередь внутренней системы и далее получает обслуживание как целая заявка. Группы, поступившие во внутреннюю часть системы в очередь  $Q_i$ , далее обслуживаются в порядке поступления при очередном посещении сервером очереди. Для нахождения взвешенной суммы средних времен ожидания используется приближенный метод [83], поскольку такая модель не поддается точному анализу. Ставится задача оптимизации размеров групп  $D_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , минимизирующих взвешенную сумму средних времен ожидания, и эта задача решается численно.

В статье [84] исследована система поллинга, в которой все заявки, находящиеся в очереди, обслуживаются группой (без ограничения размера группы). Система функционирует в случайной среде и состоит из двух зон: зоны обслуживания и зоны ожидания. Заявка, поступающая в систему, с некоторой вероятностью присоединяется к одной из существующих групп или создает новую группу (не более  $M$  групп в системе), а с дополнительной вероятностью заявка поступает в зону для ожидания. Заявки в зоне для ожидания формируют общую очередь. Как только заканчивается обслуживание одной из групп, заявка, стоящая первой в линии для ожидания, перемещается в зону для обслуживания и может формировать свою группу заявок. Система функционирует в случайной многофазной среде, управляемой цепью Маркова с конечным пространством состояний. Если случайная среда находится в состоянии  $i$ , то заявки в систему поступают с параметром  $\lambda_i$  и обслуживаются согласно экспоненциальному распределению с параметром  $\mu_i$ . Случайная среда находится в состоянии  $i$ , экспоненциально распределенном с параметром  $\theta_i$  время. При этом переходы возможны лишь в соседние состояния  $i - 1$  или  $i + 1$ . Для такой системы получены условия существования стационарного режима, и для нее удается применить матрично-аналитический подход нахождения стационарных вероятностей состояний системы. Получены различные характеристики производительности, такие как среднее число групп на обслуживании и ПЛС распределения времени ожидания.

**8. Перемещение и удаление заявок в системе.** В некоторых моделях систем предполагается, что по окончании своего обслуживания заявки могут не покинуть систему, а вернуться в очередь для повторного обслуживания, либо перейти в другую очередь. Подобным образом в системах поллинга с приоритетом заявка может поменять свой приоритет, как, например, в [53]. Такая процедура перемещения заявок внутри системы иногда называется *обратной связью*.

Система поллинга с отрицательными заявками рассмотрена в [85]. Отрицательная заявка — это особый вид заявок, которые определенным образом воздействуют на систему (удаляют из нее одну или несколько обычных заявок). Для такой системы методом производящих функций получено распределение числа заявок в очередях и распределение времени ожидания в терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса.

В [86] рассмотрена система поллинга с отказами двух типов: отказы в обслуживании заявки и отказы в обслуживании очереди, что можно рассматривать как аналог отрицательных заявок двух типов. Отказ первого типа происходит во время обслуживания заявки, в результате чего она покидает систему, а обслуживающий прибор переходит к обслуживанию следующей заявки в очереди. Если же очередь на обслуживается, то отказ удаляет первую стоящую в очереди заявку. При отказе второго типа обслуживающий прибор немедленно прерывает обслуживание заявки, покидает очередь и переходит к следующей очереди.

В [54] обратная связь описывается полулинейным случайным процессом, а порядок опроса — случайный марковский. Показано, как поведение системы может быть описано с помощью полулинейных стохастических рекурсивных уравнений в случайной марковской среде. Получены выражения для первых и вторых моментов числа заявок в системе в моменты опроса, а также среднее число заявок в системе в произвольный момент времени. Обратная связь подразумевает собой не количество заявок, которое порождает обслуженная заявка, а количество нагрузки, которое образуется в системе после ухода обслуженной заявки, процесс обслуживания отдельной очереди при этом моделируется полулинейным процессом.

Для системы поллинга с очередями типа  $M/M/1$ , 1-ограниченным обслуживанием и обратной связью в [87] устанавливаются условия существования стационарного режима. Входные потоки управляются случайной средой.

В [88] рассмотрена система поллинга, в которой заявки, не дождавшись обслуживания, могут принять решение покинуть систему (так называемые нетерпеливые заявки), однако это возможно лишь в моменты отключения сервера от очереди или в моменты ее опроса. Вероятность, с которой заявка покидает очередь, зависит от двух параметров: от номера очереди, в которой находится заявка, и номера очереди, к которой обращен сервер. Такой способ выхода из системы назван синхронизированным, а заявки, покидающие систему, названы в статье *умными* заявками. Основной сложностью такой системы является то, что заявки могут покидать систему группами. С использованием обобщенного закона Литтла в форме распределения, для такой системы получены распределения длительности цикла, времени ожидания и длин очередей.

Система поллинга с нетерпеливыми заявками рассмотрена также в [89]. Система представлена двумя очередями типа  $M/PH/1/b$  с  $k$ -ограниченным обслуживанием. Состояние системы описывается процессом размножения и гибели, и с помощью матрично-аналитического подхода [90] решается задача нахождения стационарного распределения

состояний системы, также получено распределение времени ожидания в очередях системы.

**9. Порядок обслуживания заявок внутри очереди.** В данном разделе изложены результаты, полученные для систем поллинга с точки зрения порядка обслуживания заявок внутри очереди.

В статье [91] рассматривается система поллинга типа  $M/G/1$  и различными типами порядка обслуживания заявок внутри очереди: LCFS (Last-Come-First-Served, инверсионный порядок обслуживания), PS (Processor Sharing, дисциплина разделения процессора), случайный порядок, SJF (Shortest Job First, первой на обслуживание выбирается заявка с наименьшим временем обслуживания) и другие.

ПЛС времени цикла для системы поллинга, дисциплина обслуживания в которой согласуется со свойством ветвления [37], определяется формулой

$$\mathbf{M}(e^{-\omega C} | X_i = m_i, i = \overline{1, N}) = \prod_{i=1}^N \sigma(\psi_{i,N}(\omega)) \theta_i^{m_i}(\psi_{i,N}(\omega)),$$

где  $X_i$  — число заявок в  $i$ -й очереди в произвольный момент ее опроса,  $\theta_i(\omega)$  — ПЛС времени, которое сервер проводит в этой очереди, если бы в ней в момент ее опроса была бы лишь 1 заявка. В случае шлюзового обслуживания  $\theta_i(\omega) = \tilde{B}_i(\omega)$ , при исчерпывающем обслуживании  $\theta_i(\omega) = \pi_i(\omega)$ , т. е. эта величина есть период занятости сервера в  $i$ -й очереди, порожденный одной заявкой, а функции  $\psi_i(\omega)$  и  $\psi_{i,j}(\omega)$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_i(\omega) &= \omega + \lambda_i(1 - \theta_i(\omega)), \quad i = \overline{1, N}, \\ \psi_{i,N}(\omega) &= \psi_{i+1}(\psi_{i+2}(\dots(\psi_N(\omega)))), \quad i = \overline{1, N}, \quad \psi(N, N)(\omega) = \omega. \end{aligned}$$

ПЛС времени ожидания заявки в очереди, получающей шлюзовое обслуживание, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(e^{-\omega D_{FCFS}}) &= 1 - \mathbf{M}(R_C)(1 + \rho_i)\omega + \frac{1}{2} [\lambda_i \mathbf{M}(B_i^2) \mathbf{M}(R_C) + M(R_C^2)(1 + \rho_i + \rho_i^2)] \omega^2 + o(\omega^3), \\ \mathbf{M}(e^{-\omega D_{LCFS}}) &= 1 - \mathbf{M}(R_C)(1 + \rho_i)\omega + \frac{1}{2} [\lambda_i \mathbf{M}(B_i^2) \mathbf{M}(R_C) + M(R_C^2)(1 + \rho_i)^2] \omega^2 + o(\omega^3) \end{aligned}$$

при  $\omega \downarrow 0$ , а первые два момента этого времени вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(D_{FCFS}) &= \mathbf{M}(D_{LCFS}) = (1 + \rho_i)M(R_C), \\ \mathbf{M}(D_{FCFS}^2) &= \lambda_i \mathbf{M}(B_i) \mathbf{M}(R_C) + \mathbf{M}(R_C^2)(1 + \rho_i + \rho_i^2), \\ \mathbf{M}(D_{LCFS}^2) &= \lambda_i \mathbf{M}(B_i) \mathbf{M}(R_C) + \mathbf{M}(R_C^2)(1 + \rho_i)^2. \end{aligned}$$

Случайный порядок обслуживания определяется следующим образом: каждой заявке, поступающей в очередь с такой дисциплиной обслуживания заявок, ставится в соответствие метка — значение случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ . Далее, после опроса очереди сервером, все заявки, ожидающие обслуживание, упорядочиваются по возрастанию значений их меток и далее обслуживаются в установленном порядке.

ПЛС времени пребывания заявки, имеющей метку  $x$ , в очереди  $Q_i$  имеет вид

$$\mathbf{M}(e^{-\omega T(x)}) = \frac{\beta_1(\omega)}{\omega \mathbf{M}(C)} [\mathbf{M}(e^{-\lambda_i x(1-\beta_1(\omega))C}) - \mathbf{M}(e^{-(\omega+\lambda_i x(1-\beta_1(\omega)))C})],$$

при этом безусловные по  $x$  моменты вычисляются как

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(T) &= \mathbf{M}(B_i) + \mathbf{M}(R_C)(1 + \rho_i), \\ \mathbf{M}(T^2) &= \mathbf{M}(T_{FCFS}^2) + \frac{\rho_i}{2} = \mathbf{M}(B_i^2) + \mathbf{M}(R_C)(2(1 + \rho_i)\mathbf{M}(B_i) + \lambda_i \mathbf{M}(B_i^2)) + \\ &\quad + \mathbf{M}(R_C^2) \left(1 + \rho_i^2 + \frac{3}{2}\rho_i\right).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что вторые моменты средних времен пребывания заявок для рассматриваемых дисциплин обслуживания удовлетворяют неравенству

$$\mathbf{M}(T_{LCFS}^2) > \mathbf{M}(T_{ROS}^2) > \mathbf{M}(T_{FCFS}^2).$$

Для дисциплины разделения процессора ( $PS$ ) и дисциплины, при которой ранее всех обрабатывается заявка с наименьшим требуемым временем обслуживания ( $SJF$ , Shortest Job First), не удается получить выражения для ПЛС времени пребывания заявки в явном виде для произвольной функции распределения  $B_i(t)$  времени обслуживания заявок. Однако для случая экспоненциального распределения данное ПЛС в случае  $PS$  совпадает с ПЛС при случайному порядке обслуживания заявок.

Пусть некоторая заявка поступает в очередь  $Q_i$  с заранее известным временем ее обслуживания  $x$ , тогда

$$\mathbf{M}(T_{PS}(x)) = x + \mathbf{M}(R_C)[1 + 2\lambda_i \mathbf{M}(\min(B_i, x))],$$

а ПЛС ее времени ожидания

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(e^{-\omega D_{PS}(x)}) &= 1 - \mathbf{M}(R_C)(1 + 2\mathbf{M}(\min(B_i, x)))\omega + \\ &+ \left[\lambda_i \mathbf{M}(\min^2(B_i, x))\mathbf{M}(R_C) + \frac{\mathbf{M}(R_C^2)}{2} \left(1 + 3\mathbf{M}(\min(B_i, x)) + 3\mathbf{M}^2(\min(B_i, x))\right)\right]\omega^2 + o(\omega^3)\end{aligned}$$

при  $\omega \downarrow 0$ , тогда

$$\mathbf{M}(D_{PS}(x)) = \mathbf{M}(R_C)(1 + 2\mathbf{M}(\min(B_i, x))),$$

$$\mathbf{M}(D_{PS}(x)) = 2\lambda_i \mathbf{M}(\min(B_i, x))\mathbf{M}(R_C) + \mathbf{M}(R_C^2) \left(1 + 3\mathbf{M}(\min(B_i, x)) + 3\mathbf{M}^2(\min(B_i, x))\right).$$

В случае дисциплины  $SJF$

$$\mathbf{M}(e^{-\omega D_{SJF}(x)}) = e^{-\omega x} \frac{\mathbf{M}(e^{-\lambda_i(1-\phi(\omega, x))C}) - \mathbf{M}(e^{-(\omega+\lambda_i(1-\phi(\omega, x)))C})}{\omega C},$$

где  $\phi(\omega, x) = \mathbf{M}(e^{-\omega B_i \mathbf{1}(B_i \leq x)})$ , а  $\mathbf{1}(A)$  — функция-индикатор события  $A$ ,  $\mathbf{1}(A) = 1$ , если  $A$  — достоверное событие, и равно 0 в противном случае.

Далее проведен анализ ПЛС в случае глобально-шлюзового обслуживания очередей. Заметим, что в [91] рассматриваются лишь шлюзовые дисциплины обслуживания очередей, которые являются более удобными с точки зрения анализа системы в силу того, что времена пребывания заявок, ожидающих обслуживания в текущем цикле, никак не зависит

от заявок, поступающих в очередь в течение периода обслуживания сервером данной очереди. В случае же исчерпывающего обслуживания такой анализ представляется гораздо более сложным.

В статье [92] исследуется влияние порядка обслуживания заявок внутри очереди на распределение времени ожидания в условиях большой загрузки при шлюзовом или глобально-шлюзовом обслуживании. Известно, что при обслуживании заявок в порядке их поступления асимптотическое распределение времени ожидания имеет вид произведения равномерного и гамма-распределения. Показано, что при случайному порядке выбора заявки на обслуживание равномерное распределение сменяется на трапециевидное, а при дисциплине разделения процессора и дисциплине, при которой обслуживается заявка с самым коротким временем обслуживания — на обобщенное трапециевидное распределение. Показано также, как выбор дисциплины обслуживания заявок в каждой очереди может повлиять на поведение всей системы. Получены способы приближенного вычисления средних времен ожидания.

Статья [93] продолжает исследование [92] для систем поллинга с исчерпывающим обслуживанием и различными дисциплинами обслуживания заявок внутри очереди, в том числе с инверсионным порядком, приоритетным порядком и другими. Показано, что асимптотическое распределение длительности цикла имеет вид гамма-распределения с параметрами  $\alpha = \frac{s\delta}{\sigma^2}$  и  $\mu = \frac{\delta}{\sigma^2}$ , где  $\sigma^2 = \frac{b^{(2)}}{b}$ ,  $\delta = \sum_{i=1}^N \hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)$ ,  $\hat{\rho}_i$  — значение загрузки  $\rho_i$   $i$ -й очереди при общей загрузке  $\rho = 1$ ,

$$b^{(k)} = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i b_i^{(k)}}{\lambda},$$

а  $b_i^{(k)}$  —  $k$ -й момент времени обслуживания заявки в  $i$ -й очереди.

ПЛС асимптотического распределения времени ожидания в  $i$ -й очереди при обслуживании заявок в порядке их поступления имеет вид

$$W_i^*(x) = \frac{1}{(1 - \hat{\rho}_i)sx} \left[ 1 - \left( \frac{\mu_i}{\mu_i + x} \right)^\alpha \right],$$

где  $\mu_i = \frac{\delta}{(1 - \hat{\rho}_i)\sigma^2}$ .

В случае инверсионного порядка, когда на обслуживание выбирается заявка, которая поступила позже всех (для случаев прерывания обслуживания при поступлении новой заявки в очередь и без прерывания) это распределение имеет вид

$$W_i^*(x) = \hat{\rho}_i + (1 - \hat{\rho}_i) \frac{1}{sx} \left[ 1 - \left( \frac{\mu}{\mu + x} \right)^\alpha \right],$$

где  $\mu = \frac{\delta}{\sigma^2}$ . Формулы для остальных дисциплин обслуживания можно найти в [93].

В статье [94] рассматривается система поллинга типа  $M/G/1$ , в которой одна из очередей имеет дисциплину разделения процессора для обслуживания заявок, а время обслуживания заявок имеет распределение фазового типа, в остальных очередях заявки обслуживаются в порядке поступления.

**10. Системы с коррелированными входными потоками и матрично-аналитический подход.** В данном разделе отметим работы, посвященные системам поллинга с коррелированными входными потоками. Наиболее часто используемый тип

входного потока — это *BMAP*, марковский групповой входной поток [40], который позволяет описывать свойства реальных потоков данных в современных телекоммуникационных сетях. *BMAP*-поток не является стационарным, ординарным, а интервалы времени между моментами поступления заявок в общем случае зависят. *BMAP*-поток управляется неприводимой непериодической цепью Маркова с непрерывным временем и конечным пространством состояний. Поступление заявок может происходить лишь в моменты скачков управляющего процесса и описывается матрицами  $D_k$ ,  $k \geq 0$ . Матрица  $D_0$  ( $D_k$ ) определяет интенсивности переходов управляющего процесса, не сопровождающихся поступлением заявок (сопровождающихся поступлением группы заявок размера  $k$ ,  $k \geq 1$ ). Описание *BMAP*-потока имеет матричный вид, что приводит к необходимости применять матрично-аналитический подход [90] для многомерных цепей Маркова, описывающих функционирование систем с входными потоками такого типа. Далее кратко изложим суть матрично-аналитического подхода. Этот подход применяется для систем, состояния которых описываются многомерным марковским случайным процессом

$$\xi_n = (i_n, x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Nn}), \quad n \geq 0,$$

у которого компоненты  $x_{in}$  имеют конечное число состояний, а  $i_n$  — не более чем счетное,  $x_{in} \in \{1, \dots, M_i\}$ ,  $i_n \geq 0$ . Процесс может быть как с непрерывным, так и с дискретным временем. Здесь рассмотрим случай процесса с непрерывным временем. Состояния процесса  $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Nn}$  занумеровываются в лексикографическом порядке, и, таким образом, мы приходим к двумерному процессу  $\tilde{\xi}_n = (i_n, \tilde{x}_n)$ ,  $n \geq 0$ , где  $\tilde{x}_n \in \{1, \dots, \prod_{i=1}^N M_i\}$ , а его инфинитезимальный генератор  $\tilde{Q}$  имеет блочную структуру

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ B_1 & A_1 & A_0 & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ & & & A_2 & A_1 & \dots \\ & & & & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

при этом предполагается, что эта структура является неприводимой,  $(B_0 + A_0)\mathbf{1} = (B_1 + A_1 + A_0)\mathbf{1} = (A_0 + A_1 + A_2)\mathbf{1} = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{1}$  — вектор-столбец, состоящий из единиц,  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор-строка.

Пусть далее  $\pi$  — вектор стационарных вероятностей матрицы  $A = A_0 + A_1 + A_2$ ,  $\pi A = \mathbf{0}$ . Тогда случайный процесс  $\tilde{\xi}_n$ ,  $n \geq 1$  имеет стационарное распределение вероятностей  $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots\}$  тогда и только тогда

$$\pi A_2 \mathbf{1} > \pi A_0 \mathbf{1}.$$

$i$ -я компонента вектора  $\mathbf{x}$  — это вектор  $\mathbf{x}_i$  стационарных вероятностей случайного процесса  $\tilde{\xi}_n = (i_n, \tilde{x}_n)$ ,  $n \geq 0$  при значении  $i$  компоненты  $i_n$ . Векторы  $\mathbf{x}_i$ ,  $i \geq 1$  находятся в виде

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 R^i, \quad i \geq 1,$$

где матрица  $R$  — это минимальное неотрицательное решение матричного уравнения  $R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = O$ , а вектор  $\mathbf{x}_0$  находится как решение системы уравнений

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0(B_0 + RB_1) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}_0(I - R)^{-1}\mathbf{1} &= 1.\end{aligned}$$

Для систем, поведение которых описывается случайными процессами с инфинитезимальными генераторами более сложного вида (например, в которых структура блоков зависит от уровня  $i$ ), существуют модификации матрично-аналитического подхода, более подробно о которых можно узнать в [40].

Напомним, что обобщенный анализ системы поллинга типа  $BMAP/G/1$  со шлюзовой или исчерпывающей дисциплиной представлен в статье [39]. Получены уравнения для векторных производящих функций среднего числа заявок в очередях, которые справедливы для широкого класса дисциплин обслуживания очередей и как для мгновенного, так и немгновенного переключения сервера между очередями. Эти уравнения могут быть численно решены как система линейных алгебраических уравнений (подробнее см. раздел 4.2).

В статье [4] рассматривается система двух очередей типа  $BMAP/PN/1$  с ограниченным числом мест для ожидания, входящими потоками заявок типа  $BMAP$  и распределением времени обслуживания заявок фазового типа. Данная модель отражает особенности современных стандартов сжатия видеоданных. Первая очередь обслуживается согласно шлюзовой дисциплине, а вторая — согласно  $T$ -ограниченной дисциплине, зависящей от состояния первой очереди в момент, когда ее покидает сервер. Методом вложенных цепей Маркова и с помощь матрично-аналитического подхода [90] получено совместное распределение вероятностей состояний системы. Условия существования стационарного режима для такой системы в случае неограниченного числа мест для ожидания в очередях получены в [95].

В [96] рассмотрена система, в которой заявки в очереди системы поступают одновременно и группами, интервалы между моментами поступлений заявок распределены экспоненциально, а размеры групп определяются значением случайного вектора  $K = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ , распределение которого определено производящей функцией  $\mathbf{k}(z) = k(z_1, z_2, \dots, z_N)$ . Поскольку среднее время ожидания в очередях зависит от вида распределений времени обслуживания, переключения сервера и входных потоков лишь через два первых их момента, то автор предлагает применить псевдо-преобразование исходных распределений производящей функцией моментов, что позволяет уменьшить объем требуемых вычислений по сравнению с классическим методом производящих функций для систем поллинга.

Отметим также здесь работы, исследующие модели поллинга с некоррелированными входными потоками, но использующие матрично-аналитический подход для нахождения стационарного распределения состояний системы. Описание этих работ приводится в других разделах обзора. В [24] на основе матрично-аналитического подхода исследуется система с двумя очередями и пороговой стратегией переключения сервера, а в [25] рассматривается система с политикой выбора на обслуживание самой длинной из очередей. В статье [84] исследована система поллинга, в которой все заявки, находящиеся в очереди, обслуживаются группой (без ограничения размера группы). Система функционирует в случайной многофазной среде, управляемой цепью Маркова с конечным пространством состояний, которые определяют параметры входных потоков и обслуживания (см. раздел 8). В [89] матрично-аналитический подход применен к анализу системы поллинга типа  $M/PN/1/b$ .

с двумя очередями,  $k$ -ограниченным обслуживанием и нетерпеливыми заявками, а в [97] — к анализу тандема из двух систем поллинга типа  $M/M/1$  с двумя очередями.

**11. Системы с более чем одним обслуживающим прибором.** Система поллинга с несколькими серверами рассмотрена в [98] в предположении ограничения на число серверов, которые одновременно могут быть обращены к одной очереди. Серверы посещают очереди независимо друг от друга в случайном порядке, определяемом вероятностями перехода сервера между очередями. Для такой системы получены условия существования стационарного режима для дисциплин обслуживания очереди неограниченного типа, т. е. дисциплин, при которых число заявок, которое может обслужить сервер за одно посещение очереди, неограничено. Сюда также отнесем работу [34], исследующую модель поллинга с дуплексным опросом очередей, при котором опрос производится двумя независимыми серверами. Часть очередей является общей для серверов, остальные очереди обслуживаются лишь одним сервером. Для исследования такой системы применен метод анализа средних.

В [99] представлен анализ системы поллинга с неограниченным ресурсом обслуживающего прибора (одновременно обслуживаются все заявки, находящиеся в очереди в момент ее опроса), такую систему можно также представить как систему с неограниченным числом серверов, посещающих очереди одновременно. Такая система анализируется методом производящих функций, и для нее получено распределение времени ожидания. Аналогичная система с  $T$ -ограниченным обслуживанием исследована в [100]. Очередь получает обслуживание в течение случайного времени, по истечении которого обслуживание прерывается, а заявки, обслуживание которых прервано, обслуживаются заново при следующем посещении очереди. Для такой системы получено ПЛС распределения времени пребывания заявки в системе.

**12. Системы поллинга в условиях большой загрузки.** В данном разделе перечислим основные работы, исследующие поведение систем поллинга в условиях, когда загрузка  $\rho$  близка к 1. В таких условиях для некоторых систем удается получить приближенные формулы для требуемых характеристик производительности путем рассмотрения  $\rho$  как переменной, а параметров, описывающих систему, как функцию от  $\rho$ .

В статье [101] рассматривается система поллинга со шлюзовой дисциплиной обслуживания, а входные потоки в очереди представлены процессами восстановления с параметрами  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Величина загрузки  $\rho$  в данной системе увеличивается таким образом, что увеличиваются лишь параметры входных потоков заявок, а распределения времени обслуживания заявок и доли загрузок очередей системы  $\frac{\rho_i}{\rho}$  остаются неизменными. С увеличением загрузки системы  $\rho$  все очереди системы становятся нестабильными и средние времена ожидания  $\mathbf{M}[W_i]$  в очередях устремляются к бесконечности при всех  $i = \overline{1, N}$ . Таким образом,  $\mathbf{M}[W_i]$ , как функция  $\rho$ , имеет полюс первого порядка в точке  $\rho = 1$  [102], то есть

$$\mathbf{M}[W_i] = \frac{\omega_i}{1 - \rho} + o((1 - \rho)^{-1}), \quad \rho \uparrow 1, i = \overline{1, N},$$

где  $\omega_i$  называется средним асимптотически нормированным временем ожидания для очереди  $Q_i$ , которая означает скорость, с которой  $\mathbf{M}[W_i] \rightarrow \infty$  при  $\rho \uparrow 1$ .

Параметры  $\omega_i$  определяются следующим образом:

$$\omega_i = \frac{(1 + \hat{\rho}_i)}{2} \left( \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^N \hat{\rho}_j (1 + \hat{\rho}_j)} + r \right),$$

где  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i (\mathbf{D}[B_i] + \hat{\rho}_i^2 \mathbf{D}[\hat{A}_i])$ ,  $\mathbf{D}[B_i]$  — дисперсия времени обслуживания, а  $\hat{\lambda}_i = \frac{1}{\mathbf{M}[\hat{A}_i]}$  и  $\mathbf{D}[\hat{A}_i]$ , соответственно, параметр и дисперсия времени между моментами поступления заявок в очередь  $Q_i$  при  $\rho = 1$ ,  $\hat{\rho}_i = \hat{\lambda}_i b_i$ .

В [103] рассмотрена система поллинга с произвольными функциями распределения времени между моментами поступления заявок в очереди в условиях большой загрузки, для которой применяются результаты [83]. Система поллинга типа  $G/G/1$  в условиях большой загрузки рассмотрена в [104], и исследован ее жидкостной аналог. В [30] предлагается новый подход к приближенному анализу систем поллинга с шлюзовым или исчерпывающим обслуживанием в условиях большой загрузки, при котором  $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i \rightarrow 1$ . Используется известный метод средних [28], с помощью которого получена система линейных уравнений для величин  $\mathbf{M}[L_{i,j}]$ , где  $L_{i,j}$  — это число заявок в очереди  $Q_i$  в произвольный момент времени, когда сервер обращен к очереди  $Q_j$ . При переходе к большой загрузке все параметры, описывающие систему (входных потоков, обслуживания, переключения сервера между очередями), рассматриваются как функции от загрузки  $\rho$ . И значение параметра  $x$  в точке  $\rho = 1$  обозначается как  $\hat{x}$ . Пусть также  $\mathbf{M}[L_{i,j}^*] = \lim_{\rho \uparrow 1} (1 - \rho) \mathbf{M}[L_{i,j}]$ , тогда для исчерпывающего обслуживания

$$\begin{aligned}\mathbf{M}[L_{i,i}^*] &= c \hat{\lambda}_i (1 - \hat{\rho}_i), \\ \mathbf{M}[L_{i,i+n}^*] &= c \hat{\lambda}_i \left( 2 \sum_{m=1}^{n-1} \hat{\rho}_{i+m} + \hat{\rho}_{i+n} \right), \quad i = \overline{1, N}, n = \overline{1, N-1},\end{aligned}$$

где  $c = \frac{1+\beta\delta s}{2\beta\delta}$ ,  $\beta = \frac{b}{b(2)}$ ,  $\delta = 1 - \sum_{i=1}^N \hat{\rho}_i^2$ , а для шлюзового обслуживания имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}[\hat{L}_{i,i}^*] &= c \hat{\lambda}_i, \quad \mathbf{M}[\tilde{L}_{i,i}^*] = c \hat{\lambda}_i \hat{\rho}_i, \\ \mathbf{M}[\tilde{L}_{i,i+n}^*] &= c \hat{\lambda}_i \left( 2 \sum_{m=1}^{n-1} \hat{\rho}_{i+m} + \hat{\rho}_{i+n} \right), \quad i = \overline{1, N}, n = \overline{1, N-1},\end{aligned}$$

где величины  $\hat{L}_{i,i}$  и  $\tilde{L}_{i,i}$  характеризуют длину очереди перед шлюзом (заявки, которые будут обслужены сервером при текущем посещении) и за шлюзом (заявки, которые будут обслужены при следующем посещении сервера).

Асимптотическое значение средних (отмасштабированных относительно  $1 - \rho$ ) времен ожидания определяется как  $\mathbf{M}[W_i^*] = c(1 - \hat{\rho}_i)$  при исчерпывающем обслуживании и  $\mathbf{M}[W_i^*] = c(1 + \hat{\rho}_i)$  при шлюзовом обслуживании.

В работе [46] показано, что для случайной величины  $X_{i,i+n}$  ( $Y_{i,i+n}$ ), обозначающей число заявок в очереди  $Q_i$  в начале (конце) произвольного периода посещения сервером очереди  $Q_{i+n}$ , справедливо свойство

$$\begin{aligned}(1 - \rho X_{i,i+n}) &\rightarrow_d d \hat{\lambda}_i \left( \sum_{m=1}^{n-1} \hat{\rho}_{i+m} \right) \Gamma(\alpha, 1), \\ (1 - \rho Y_{i,i+n}) &\rightarrow_d d \hat{\lambda}_i \left( \sum_{m=1}^{n-1} \hat{\rho}_{i+m} + \hat{\rho}_{i+n} \right) \Gamma(\alpha, 1), \quad i = \overline{1, N}, n = \overline{1, N-1},\end{aligned}$$

где  $\rightarrow_d$  означает сходимость по распределению,  $d$  — известная константа,  $\Gamma(\alpha, 1)$  — гамма-распределение, параметр  $\alpha$  при этом не зависит от  $i$  и  $i+n$ .

Напомним, что система с двумя очередями типа  $M/M/1$  и ограниченной дисциплиной обслуживания в условиях большой загрузки исследована в [18] (см. раздел 3). К данному разделу также отнесем работу [105], рассматривающую симметричную систему поллинга с большим числом очередей. Показано, что с ростом числа очередей, дисциплины обслуживания которых удовлетворяют свойству [37], при сохранении общей загрузки системы случайные величины, описывающие длины очередей, становятся независимыми в пределе, и таким образом показано, как поведение отдельной очереди можно описать в терминах системы массового обслуживания с одной очередью и простоями сервера, что позволяет упростить анализ распределений длин очередей и времени ожидания. Также введена гибкая  $k$ -ограниченная дисциплина обслуживания очередей с целью уменьшения средних длин очередей и среднего времени цикла для приложений, чувствительных к задержкам.

**13. Недискретные модели поллинга и сети поллинга.** К недискретным моделям поллинга в данном разделе отнесем системы (сети) с более чем счетным числом очередей, либо системы, в которых процесс поступления и обслуживания заявок происходит не путем увеличения или уменьшения их числа на некоторое целое число, а изменяется непрерывно (так называемые жидкостные модели поллинга).

В статье [106] приводится обобщенный анализ дискретных систем поллинга (с конечным числом очередей) и непрерывных систем. Такие системы в статье названы смешанными системами поллинга. Предполагается также, что в данных системах заявки после завершения обслуживания могут переходить в другие очереди (или менять свое местоположение в случае непрерывной системы). Для непрерывной системы описан способ ее дискретизации и получено среднее количество виртуальной работы, т. е. среднее время, которое будет работать сервер, чтобы обслужить все заявки, находящиеся в системе в данный момент времени, а также остаточное время обслуживания заявки, если сервер в данный момент занят.

В статье [107] рассматривается циклическая система поллинга со смешанной дисциплиной обслуживания, в которой загрузка очередей (количество работы, которое необходимо обработать серверу) управляет  $N$ -мерным процессом Леви с положительными приращениями. Такой процесс подразумевает зависимость входящих потоков в очереди. Получено стационарное распределение количества работы в системе во вложенные и в произвольные моменты времени.

В [108–109] поступающие заявки размещаются внутри круга. В [108] предполагается, что сервер обслуживает заявки, расположенные в окрестности текущего положения сервера, а для обслуживания сервер выбирает ближайшую к нему заявку. Доказывается классический критерий существования стационарного режима такой системы, при котором параметр обслуживания заявок должен превышать параметр их поступления в систему. В [109] рассматривается система, в которой сервер перемещается по окружности с постоянной скоростью и обслуживает часть заявок согласно глобально-шлюзовой дисциплине, а остальные заявки — по исчерпывающему правилу. Основная идея статьи состоит в использовании дискретной модели поллинга с конечным числом очередей, при котором средняя виртуальная загрузка системы получается как предел средней виртуальной загрузки дискретной системы поллинга со смешанной дисциплиной обслуживания очередей, для которой можно применить закон псевдосохранения.

Отметим здесь также статью [110], в которой исследуется сеть поллинга. Сети поллинга состоят из нескольких систем поллинга, между которыми происходит обмен заявками. Получив обслуживание в очереди одного узла сети, заявка переходит в другой узел (друг-

гую систему поллинга) и занимает место в некоторой очереди узла, дожидаясь своего обслуживания. Сеть поллинга в [110] имеет древовидную структуру, в которой заявка, получив обслуживание в узле сети, переходит в соседний узел, и так далее, пока она не достигает корневого узла, откуда, получив обслуживание, покидает сеть. Показано, как поведение сети поллинга можно описать в терминах одного (корневого) узла.

Жидкостная модель системы поллинга представлена в работе [111]. Очередь системы интерпретируется как уровень некоторой жидкости, который снижается при обслуживании сервером очереди, причем скорость работы сервера может варьироваться в зависимости от уровня жидкости согласно выбранной стратегии управления скоростью.

В статье [112] рассматривается жидкостная модель системы поллинга со шлюзовым обслуживанием. Увеличение количества работы в очереди управляет марковским процессом с непрерывным временем, а снижение его происходит с постоянной скоростью при обслуживании сервером очереди. Получены необходимые условия существования стационарного режима, а также соотношения для векторных преобразований Лапласа стационарных уровней жидкости в очередях системы в моменты опроса и в моменты ухода сервера из очереди, а также в произвольный момент времени, а также другие стационарные распределения, характеризующие поведение системы. Показано, что среднее время цикла для такой модели имеет вид  $C = s/(1 - \rho)$ .

В [113] система поллинга состоит из  $N$  жидкостных систем массового обслуживания и одного обслуживающего устройства. Дисциплины обслуживания предполагаются исчерпывающей, шлюзовой и глобально-шлюзовой. Порядок опроса очередей – циклический или случайный. Получено ПЛС распределения уровня жидкости в очередях системы в момент опроса сервером очередей и в произвольный момент времени. Дополнительно описана процедура нахождения оптимального вероятностного порядка опроса очередей.

В работе [76] для системы с многофазным шлюзовым обслуживанием с помощью жидкостной модели проведен асимптотический анализ случайного процесса, описывающего длину отдельной очереди. Система поллинга типа  $G/G/1$  с обратной связью рассмотрена в [104]. В [27] для системы с тремя очередями и адаптивным опросом исследуется проблема нахождения условий существования стационарного режима. В статье [114] предложен анализ системы поллинга, в которой очереди представлены жидкостными моделями с циклическим и случайным порядком их обслуживания для описания протокола TCP.

Тандем из двух систем поллинга, каждая из которых состоит из двух очередей типа  $M/M/1$  с циклическим опросом и исчерпывающим обслуживанием, исследован в [97]. После завершения обслуживания в первой системе заявка переходит в соответствующую очередь второй системы тандема. Рассмотрены следующие политики обслуживания очередей серверами систем: сервера циклически обслуживают очереди независимо друг от друга, синхронно обращены к очередям с одинаковыми номерами (при этом один из серверов может простоять) или синхронно обращены к очередям с разными номерами. В работе исследуется влияние данных политик обслуживания на время ожидания с помощью матрично-аналитического подхода.

## Список литературы

1. Вишневский В. М., Семенова О. В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. М.: Техносфера, 2007. 312 с.

2. Vishnevsky V., Semenova O. Polling Systems: Theory and Applications for Broadband Wireless Networks // LAMBERT Academic Publishing, 2012. 317 p.
3. Boon M. A. A., van der Mei R. D., Winands E. M. M. Applications of polling systems // Surveys in Operations Research and Management Science. 2011. V. 16, N 2. P. 67–82.
4. Cao J., Feng W., Chen Y., Ge N., Wang S. Performance analysis of a polling model with BMAP and across-queue state-dependent service discipline // IEEE Access. 2019. V. 7. P. 127230–127253.
5. He M., Guan Z., Wu Z., Lu L., Zhou Z., Anisetti M., Damiani E. A polling access control with exhaustive service in wireless body area networks for mobile healthcare using the sleeping schema // Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 2019. V. 10, N 10. P. 3761–3774.
6. Granville K., Drekcic S. A 2-class maintenance model with dynamic server behavior // TOP. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11750-019-00509-1>.
7. Takagi H. Analysis of polling systems. MIT Press, 1986.
8. Borst S. C. Polling systems. Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1996.
9. Вишневский В. М., Семенова О. В. Математические методы исследования систем поллинга // Автоматика и телемеханика. 2006. № 2. С. 3–56.
10. Вишневский В. М., Мишкой Г. К., Семенова О. В. Новые модели и методы исследования систем поллинга // Proceedings of the International Conference proceedings Distributed Computer and Communication Networks. Theory and Applications (DCCN-2009, Moscow). M.: R&D Company „Information and Networking Technologies“, 2009. С. 79–85.
11. Borst S. C., Boxma O. J. Polling: past, present, and perspective // TOP. 2018. V. 26, N 3. P. 335–369.
12. Vishnevsky V. M., Semenova O. V., Bui D. T., Sokolov A. M. Adaptive cyclic polling systems: analysis and application to the broadband wireless networks // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11965. P. 30–42.
13. Winands E. M. M., Adan I. J. B. F., van Houtum G. J., Down D. G. A state-dependent polling model with  $k$ -limited service // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2009. V. 23, N 2. P. 385–408.
14. Boon M. A. A., Adan I. J. B. F., Boxma O. J. A two-queue polling model with two priority levels in the first queue // Discrete Event Dynamic Systems. 2010. V. 20, N 4. P. 511–536.
15. Vlasiou M., Adan I. J. B. F., Boxma O. J. A two-station queue with dependent preparation and service times // European Journal of Operational Research. 2009. V. 195, N 1. P. 104–116.
16. Chernova N., Foss S., Kim B. A polling system whose stability region depends on the whole distribution of service times // Operations Research Letters. 2013. V. 41, N 2. P. 188–190.
17. Dorsman J.-P. L., Boxma O. J., van der Mei R. D. On two-queue Markovian polling systems with exhaustive service // Queueing Systems. 2014. V. 78, N 4. P. 287–311.
18. Boon M. A. A., Winands E. M. M. Heavy-traffic analysis of  $k$ -limited polling systems // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2014. V. 28, N 4. P. 451–471.
19. Adan I. J. B. F., Boxma O. J., Kapodistria S., Kulkarni V. G. The shorter queue polling model // Annals of Operations Research. 2016. V. 241, N 1. P. 167–200.
20. Gaidamaka Yu. V. Model with threshold control for analysing a server with SIP protocol in the overload mode // Automatic Control and Computer Science. 2013. V. 47, N 4. P. 211–218.
21. Shorgin S., Samouylov K., Gaidamaka Y., Etezov S. Polling system with threshold control for modeling of SIP server under overload // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2014. V. 240. P. 97–107.
22. Avrachenkov K., Perel E., Yechiali U. Finite-buffer polling system with threshold-based switching policy // TOP. 2016. V. 24, N. 3. P. 541–571.
23. Perel E., Yechiali U. Two-queue polling systems with switching policy based on the queue that is not being served // Stochastic Models. 2017. V. 33, N 3. P. 430–450.

24. Jolles A., Perel E., Yechiali U. Alternating server with non-zero switch-over times and opposite-queue threshold-based switching policy // Performance Evaluation. 2018. V. 126. P. 22–38.
25. Perel E., Perel N., Yechiali U. A polling system with „Join the shortest — serve the longest“ policy // Computers & Operations Research. 2019. V. 114, 104809.
26. Liu Z., Chu Y., Wu J. On the three-queue priority polling system with threshold service policy // Journal of Applied Mathematics and Computing. 2017. V. 53, N 1. P. 445–470.
27. Chernova N., Foss S., Kim B. On the stability of a polling system with an adaptive service mechanism // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 125–144.
28. Winands E. M. M., Adan I. J. B. F., van Houtum G. J. Mean value analysis for polling systems // Queueing Systems. 2006. V. 54. P. 35–44.
29. van Vuuren M., Winands E. M. M. Iterative approximation of  $k$ -limited polling systems // Queueing Systems. 2007. V. 55. N 3. P. 161–178.
30. van der Mei R. D., Winands E. Heavy traffic analysis of polling models by mean value analysis // Performance Evaluation. 2008. V. 65, N 6–7. P. 400–416.
31. Vishnevsky V. M., Semenova O. V. Adaptive dynamical polling in wireless networks // Cybernetics and Information Technologies. 2008. V. 8, N 1. P. 3–11.
32. Wierman A., Winands E., Boxma O. J. Scheduling in polling systems // Performance Evaluation. 2007. V. 64, N 9–12. P. 1009–1028.
33. Boon M. A. A., van Wijk A. C. C., Adan I. J. B. F., Boxma O. J. A polling model with smart customers // Queueing Systems. 2010. V. 66. P. 239–274.
34. Вишневский В. М., Семенова О. В., Шпилев С. А. Дуплексная система циклического обслуживания смешанных очередей // Автоматика и телемеханика. 2009. № 12. С. 121–133.
35. Yechiali U. Analysis and control of polling systems // Performance Evaluations of Computer and Communication Systems. Ed. Donatiello L., Nelson R. Springer-Verlag. 1993. P. 630–650.
36. Boxma O. J., Kella O., Kosinski K. M. Queue lengths and workloads in polling systems // Operations Research Letters. 2011. V. 39, N 6. P. 401–405.
37. Resing J. A. C. Polling systems and multitype branching processes // Queueing Systems. 1993. V. 13. P. 413–426.
38. Guan Z., Zhao D. A delay-guaranteed two-level polling model // Advances in Computer Science and Information Engineering. Advances in Intelligent and Soft Computing. 2012. V. 168. P. 153–158.
39. Saffer Z., Telek M. Unified analysis of  $BMAP/G/1$  cyclic polling models // Queueing Systems. 2010. V. 64, N 1. P. 69–102.
40. Вишневский В. М., Дудин А. Н., Клименок В. И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Рекламно-издательский центр „ТЕХНОСФЕРА“, 2018.
41. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. Methods to Study Queuing Systems with Correlated Arrivals. 2020. Springer. 410 p.
42. Hirayama T., Hong S. J., Krunz M. M. A new approach to analysis of polling systems // Queueing Systems. 2004. V. 48, N 1–2. P. 135–158.
43. Hirayama T. Multiclass polling systems with Markovian feedback: mean sojourn times in gated and exhaustive systems with local priority and FCFS service orders // Journal of the Operations Research Society of Japan. 2005. V. 48, N 3. P. 226–255.
44. Hirayama T. Markovian polling systems: functional computation for mean waiting times and its computational complexity // Advances in Queueing Theory and Network Applications. W. Yue et al. (eds.) 2009. P. 119–146.
45. Рыков В. В. К анализу поллинг-систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6. С. 90–114.
46. van der Mei R. D. Towards a unifying theory on branching-type polling systems in heavy traffic // Queueing Systems. 2007. V. 57, N 1. P. 29–46.

47. Семенова О. В., Буй З. Т. Пакет прикладных программ для исследования систем поллинга // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 50. С. 106–113.
48. Saffer Z. *BMAP/G/1* cyclic polling model with binomial disciplines // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. 2013. V. 356. P. 157–166.
49. Вишневский В. М., Семенова О. В., Буй Д. Т. Использование машинного обучения для исследования систем поллинга с коррелированным входным потоком // Материалы всероссийской конференции с международным участием (ИТММ 2020). Москва, РУДН, 13–17 апреля 2020. С. 248–253.
50. Saffer Z., Telek M. Stability of periodic polling system with BMAP arrivals // European Journal of Operational Research. 2009. V. 197, N 1. P. 188–195.
51. Vis P., Bekker R., van der Mei R. D. Transient analysis of cycle lengths in cyclic polling systems // Performance Evaluation. 2015. V. 91. P. 303–317.
52. Dorsman J.-P. L., Borst S. C., Boxma O. J., Vlasiou M. Markovian polling systems with an application to wireless random-access networks // Performance Evaluation. 2015. V. 85–86. P. 33–51.
53. Hirayama T. Analysis of multiclass Markovian polling systems with feedback and composite scheduling algorithms // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 83–123.
54. Fiems D., Altman E. Gated polling with stationary ergodic walking times, Markovian routing and random feedback // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 145–164.
55. MacPhee I., Menshikov M., Petritis D., Popov S. A Markov chain model of a polling system with parameter regeneration // Annals of Applied Probability. 2007. V. 17, N 5–6. P. 1447–1473.
56. MacPhee I., Menshikov M., Petritis D., Popov S. Polling systems with parameter regeneration, the general case // Annals of Applied Probability. 2008. V. 18, N 6. P. 2131–2155.
57. Lee T. Analysis of single buffer random polling system with state-dependent input process and server/station breakdowns // International Journal of Operations Research and Information Systems (IJORIS). 2018. V. 9, N 1. P. 22–50.
58. Guan Z., Zhao D., Zhao Y. A discrete time two-level mixed service parallel polling model // Journal of Electronics (China). 2012. V. 29, N 1–2. P. 103–110.
59. Yang Z., Ding H. Characteristics of a two-class polling system model // Tsinghua Science and Technology. 2014. V. 19, N 5. P. 516–520.
60. Bao L., Zhao D., Zhao Y. A priority-based polling scheduling algorithm for arbitration policy in Network on Chip // Journal of Electronics (China). 2012. V. 29, N 1–2. P. 120–127.
61. Vishnevsky V. M., Dudin A. N., Semenova O. V., Klimenok V. I. Performance analysis of the *BMAP/G/1* queue with gated servicing and adaptive vacations // Performance Evaluation. 2011. V. 68, N 5. P. 446–462.
62. Vishnevsky V. M., Dudin A. N., Klimenok V. I., Semenova O. V., Shpilev S. Approximate method to study *M/G/1*-type polling system with adaptive polling mechanism // Quality Technology and Quantitative Management. 2012. V. 2. P. 211–228.
63. Semenova O. V., Bui D. T. Method of generating functions for performance characteristic analysis of the polling systems with adaptive polling and gated service // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 348–359.
64. Boon M. A. A., Adan I. J. B. F. Mixed gated/exhaustive service in a polling model with priorities // Queueing Systems. 2009. V. 63, N 1–4. P. 383–399.
65. Boon M. A. A., Adan I. J. B. F., Boxma O. J. A polling model with multiple priority levels // Performance Evaluation. 2010. V. 67, N 6. P. 468–484.
66. Shapira G., Levy H. On fairness in polling systems // Annals of Operations Research. 2016. <https://doi.org/10.1007/s10479-016-2247-8>

67. Boon M., Boxma O. J., Winands E. J. J. On open problem in polling systems // Queueing Systems. 2011. V. 68, N 3–4. P. 365–374.
68. Winands E. M. M. Branching-type polling systems with large setups // OR Spectrum. 2011. V. 33. P. 77–97.
69. Hanbali A. A., de Haan R., Boucherie R. J., van Ommeren J.-K. Time-limited polling systems with batch arrivals and phase-type service times // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 57–82.
70. Boxma O. J., Groenendijk W. P. Pseudo conservation laws in cyclic-service systems // Journal of Applied Probability. 1987. V. 24, N 4. P. 949–964.
71. Leonovich A., Ferng H.-W. Modeling the IEEE 802.11e HCCA mode // Wireless Networks. 2013. V. 19, N 5. P. 771–783.
72. de Haan R., Boucherie R. J., van Ommeren J.-K. A polling model with an autonomous server // Queueing Systems. 2009. V. 62, N 3. P. 279–308.
73. Horng S.-C., Lin S.-Y. Ordinal optimization of  $G/G/1/K$  polling systems with  $k$ -limited service discipline // Journal of Optimization Theory and Applications. 2009. V. 140, N 2. P. 213–231.
74. van der Mei R. D., Roubos A. Polling models with multi-phase gated service // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 25–56.
75. van Wijk A. C. C., Adan I. J. B. F., Boxma O. J., Wierman A. Fairness and efficiency for polling models with the  $k$ -gated service discipline // Performance Evaluation. 2012. V. 69, N 6. P. 274–288.
76. Remerova M., Foss S., Zwart B. Random fluid limit of an overloaded polling model // Advances in Applied Probability. 2014. V. 46, N 1. P. 76–101.
77. Ling Y., Liu C., Li Y. Study on queue strategy of gated polling multi-access communication system // Recent Advances in Computer Science and Information Engineering. Lecture Notes in Electrical Engineering. 2012. V. 124. P. 99–105.
78. Вишневский В. М., Лаконцев Д. В., Семенова О. В., Шпилев С. А. Модель системы поллинга для исследования широкополосных беспроводных сетей // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 123–135.
79. Vatutin V. A. Multitype Branching processes with immigration in random environment, and polling systems // Siberian Advances in Mathematics. 2011. V. 21, N 1. P. 42–72.
80. Abidini M. A., Boxma O., Resing J. Analysis and optimization of vacation and polling models with retrials // Performance Evaluation. 2016. V. 98. P. 52–69.
81. Kim B., Kim J. Analysis of the waiting time distribution for polling systems with retrials and glue periods // Annals of Operations Research. 2019. V. 277, N 2. P. 197–212.
82. Dorsman J. L., van der Mei R. D., Winands E. M. M. Polling systems with batch service // OR Spectrum. 2012. V. 34. P. 743–761.
83. Boon M. A. A., Winands E. M. M., Adan I. J. B. F., van Wijk A. C. C. Closed-form waiting time approximations for polling systems // Performance Evaluation. 2011. V. 68, N 3. P. 290–306.
84. Jiang T., Liu L., Zhu Y. Analysis of a batch service polling system in a multi-phase random environment // Methodology and Computing in Applied Probability. 2017. P. 1–20.
85. Shomrony M., Yechiali U. Polling systems with positive and negative customers // Technical Report, Department of Statistics and Operations Research, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel. 2006.
86. Shomrony M., Yechiali U. Polling systems with job failures and with station failures // Technical Report, Department of Statistics and Operations Research, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel. 2006.
87. Zorine A. V. On ergodicity conditions in a polling model with Markov modulated input and state-dependent routing // Queueing Systems. 2014. V. 76, N 2. P. 223–241.
88. Boon M. A. A. A polling model with reneging at polling instants // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 5–23.
89. Granville K., Drekip S. On a 2-class polling model with reneging and  $k_i$ -limited service // Annals of Operations Research. 2019. V. 274, N 1. P. 267–290.

90. Neuts M. F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1981.
91. Boxma O. J., Bruin J., Fralix B. H. Sojourn times in polling systems with various service disciplines // Performance Evaluation. 2009. V. 66, N 11. P. 621–639.
92. Bekker R., Vis P., Dorsman J. L., van der Mei R. D., Winands E. M. M. The impact of scheduling policies on the waiting-time distributions in polling systems // Queueing Systems: Theory and Applications. 2015. V. 79, N 2. P. 145–172.
93. Vis P., Bekker R., van der Mei R. D. Heavy-traffic limits for polling models with exhaustive service and non-FCFS service order policies // Advances in Applied Probability. 2015. V. 47, N 4. P. 989–1014.
94. Kim B., Kim J. Sojourn time distribution in polling systems with processor-sharing policy // Performance Evaluation. 2017. Vol. 114, N 9. P. 97–112.
95. Cao J., Xie W. Stability of a two-queue cyclic polling system with BMAPs under gated service and state-dependent time-limited service disciplines // Queueing Systems. 2016. V. 85, N 1–2. P. 117–147.
96. Chen W.-L. Computing the moments of polling models with batch Poisson arrivals by transform inversion // INFORMS Journal of Computing. 2019. V. 31, N 3. P. 411–632.
97. Suman R., Krishnamurthy A. Analysis of tandem polling queues with finite buffers // Annals of Operations Research. 2019. <https://doi.org/10.1007/s10479-019-03358-0>
98. Antunes N., Fricker C., Roberts J. Stability of multi-server polling system with server limits // Queueing Systems. 2011. Vol. 68. P. 229–235.
99. Boxma O., van der Wal J., Yechiali U. Polling with batch service // Stochastic Models. 2008. V. 24, No.4. P. 604–625.
100. Vlasiou M., Yechiali U.  $M/G/\infty$  polling systems with random visit times // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2008. V. 22, N 1. P. 212–245.
101. van der Mei R. D., Winands E. M. M. A note on polling models with renewal arrivals and nonzero switch-over times // Operations Research Letters. 2008. V. 36. P. 500–505.
102. van der Mei R. D., Levy H. Polling systems in heavy traffic: Exhaustiveness of service policies // Queueing Systems. 1997. V. 27, N 3–4. P. 227–250.
103. Dorsman J. L., van der Mei R. D., Winands E. M. M. A new method for deriving waiting-time approximations in polling systems with renewal arrivals // Stochastic Models. 2011. V. 27. P. 318–332.
104. Boon M. A. A., van der Mei R. D., Winands E. M. M. Heavy traffic analysis of roving server networks // Stochastic Models. 2017. V. 33, N 3. P. 1–21.
105. Meyfroyt T. M. M., Boon M. A. A., Borst S. C., Boxma O. J. Performance of large-scale polling systems with branching-type and limited service // Performance Evaluation. 2019. V. 133. P. 1–24.
106. Kavitha V., Combes R. Mixed polling with rerouting and applications // Performance Evaluation. 2013. V. 70, N 11. P. 1001–1027.
107. Boxma O., Ivanovs J., Kosinski K., Mandjes M. Levy-driven polling systems and continuous-state branching processes // Stochastic Systems. 2011. V. 1, N 2. P. 411–436.
108. Leskela L., Unger F. Stability of a spatial polling system with greedy myopic service // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 165–183.
109. Kavitha V., Altman E. Continuous polling models and application to ferry assisted WLAN // Annals of Operations Research. 2012. V. 198, N 1. P. 185–218.
110. Beekhuizen P., Denteneer D., Resing J. Reduction of a polling network to a single node // Queueing Systems. 2008. V. 58. N. 4. P. 303–319.
111. Matveev A., Feoktistova V., Bolshakova K. On global near optimality of special periodic protocols for fluid polling systems with setups // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. V. 171, N 3. P. 1055–1070.

112. Saffer Z., Telek M., Horvath G. Fluid polling system with Markov modulated load and gated discipline // Lecture Notes in Computer Science. 2018. V. 10932. P. 86–102.
113. Yechiali U., Czerniak O. Fluid polling systems // Queueing Systems. 2009. V. 63, N 12. P. 401–435.
114. Czerniak O., Altman E., Yechiali U. Orchestrating parallel TCP connections: cyclic and probabilistic polling policies // Performance Evaluation. 2012. V. 69, N 3–4. P. 150–163.



**Вишневский Владимир Миронович** в 1971 году окончил Московский институт электроники и математики. В 1974 г. получил ученую степень кандидата технических наук, а в 1988 — доктора технических наук в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН). С 1989 года — профессор ИПУ РАН и Московского физико-технического института. С 1990 по 2010 год — заведующий лабораторией, заместитель директора Института проблем передачи информации РАН (ИППИ РАН). С 2010 г. по настоящее время — заведующий лабораторией „Телекоммуникационные сети“ ИПУ РАН. Является членом IEEE Communication Society, International Telecommunications Academy и New York Academy of Science. Член редколлегий журналов „Автоматика и телемеханика“, „Проблемы управления“, „Электроника“, „Проблемы информатики“, главный редактор сборников LNCS и CCIS „Distributed Computer and Communication Networks“ издательства Springer. В 2019 г. В. М. Вишневскому присвоено звание „Заслуженный деятель науки Российской Федерации“.

Автор более 350 публикаций, включая 10 монографий. Член программных комитетов международных конференций IEEE: ICUMT, RTUWO, председатель программного комитета конференции IEEE DCCN. Область научных интересов: компьютерные сети, стохастические системы, дискретная математика (теория экстремальных графов, математическое программирование) и широкополосные беспроводные сети.

**Vladimir M. Vishnevsky** received the Engineering degree in applied mathematics from the Moscow Institute of Electronics and Mathematics (Russia) in 1971, the Ph.D. degree in queuing theory and telecommunication networks

and the D.Sc. degree in telecommunication networks from the V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (ICS RAS), in 1974 and 1988, respectively. He became a Full Professor with ICS RAS in 1989 and the Moscow Institute of Physics and Technology in 1990. He was the Head of Laboratory and the Deputy Director of the Institute of Information Transmission Problems of RAS from 1990 to 2010. Since 2010 through the present, he is the Head of Telecommunication Networks Laboratory, ICS RAS. He is a member of IEEE Communication Society, International Telecommunications Academy and New York Academy of Science, a member of the editorial boards of journals „Automation and Remote Control“, „Control Problems“, „Electronics“, „Problems of Informatics“, editor-in-chief of the LNCS and CCIS series „Distributed Computer and Communication Networks“ published by Springer. In 2019, V. M. Vishnevsky was awarded the title of Honored Scientist of the Russian Federation.

He is an author of more than 300 papers and 10 books. He is a Co-Chair of IEEE Conferences (ICUMT, RTUWO) and the General Chair of IEEE DCCN Conference. His research interests lie in the area of computer networks, stochastic systems, discrete mathematics (extremal graph theory, mathematical programming) and broadband wireless telecommunication networks.



**Семенова Ольга Валерьевна** в 2001 г. окончила Гомельский государственный университет по специальности „Математика“. В 2004 г. получила ученую степень кандидата физико-математических наук по специальности „Теория вероятностей и математическая статистика“ в Белорусском государственном университете. С 2005 г. — на-

учный сотрудник Института проблем передачи информации РАН (ИППИ РАН). С 2013 г. по настоящее время — старший научный сотрудник Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН). Автор более 100 публикаций, включая 2 монографии. Область научных интересов: теория массового обслуживания, системы поллинга и их применение в широкополосных беспроводных сетях, модели гибридных беспроводных каналов передачи данных.

**Olga V. Semenova** received the degree in mathematics from Gomel State University (Belarus) in 2001 and the Ph.D. degree in

probability and statistics from Belarusian State University in 2004. Since 2005 she was a scientific researcher of the Institute of Information Transmission Problems of RAS. From 2013 to nowadays she is a Senior scientific researcher of the Telecommunication Networks Laboratory in the V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (ICS RAS). She is an author of more than 100 papers and 2 books. Her research interests are the queueing theory, polling systems and their applications to broadband wireless networks, models of the hybrid wireless channels.

*Дата поступления — 05.06.2020*

# MODELING THE STREAMFLOW IN THE LENA RIVER BASIN ON THE BASIS OF A HYDROLOGICALLY CORRECT DIGITAL ELEVATION MODEL

A. I. Krylova, N. A. Lapteva\*

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,  
630090, Novosibirsk, Russia

\*Federal Budgetary Research Institution „ State Research Center of Virology and  
Biotechnology „Vector“ Federal Service for Surveillance on Consumer Rights Protection and  
Human Well-being,  
630559, Koltsovo, Novosibirsk Region, Russia

---

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10016

This article presents the results of numerical modelling of river runoff hydrographs and long-term runoff dynamics for the Lena River basin using MERRA reanalysis data for the period of 1985–2005. On the basis of the new version of the climatic linear hydrological model of the river flow for calculating the flow hydrograph in the outlet section of the Kyusyur of the Lena River, the transformation of overland flow and baseflow for each calculation gridbox of the catchment, taking into account the time of water travel through the gridbox, is performed according to the linear two-parameter Kalinin-Milyukov model, and to calculate the flow transformation into of the river network, a linear model of the formation of the water balance in the channel network is used. The previously developed climate model of river flow used the model structure proposed at the Max Planck Institute, according to which the lateral waterflow on land was divided into three components, that is overland flow, baseflow and riverflow. The sum of the three flow processes equals the outflow from a gridbox. The same approach is used in the new version of the model. According to the Kalinin-Milyukov model, the travel curve (the influence function of a linear system) for calculating the water discharge is similar to the discrete representation of the gamma distribution. The parameterization of the retention coefficient for overland flow and baseflow is determined by formulas that depend on the characteristics of the grid cell. To calculate the riverflow in the channel cell, the water balance equation is solved using parameterization for the water discharge at the outlet from the cell, which is proportional to the water supply in the cell, the effective water velocity taking into account the tortuosity of the channel, and is inversely proportional to the distance between the calculated gridboxes.

We have constructed a new schematized model hydrographic network of the Lena River Basin on the basis of a hydrologically correct digital elevation model with a resolution of  $(1/3)^\circ \times (1/3)^\circ$ , obtained from SRTM30 and GTOPO30 data. The fragment of data including the Lena River basin:  $53^\circ \div 72^\circ$  N,  $103^\circ \div 140^\circ$  E was transformed using geostatic kriging modelling into a gridded topographic dataset with a resolution of  $(1/3)^\circ \times (1/3)^\circ$ . This work was carried out on the basis of the Surfer 8 software package used in the Microsoft Windows environment. Along with kriging, other methods of spatial analysis were considered. According to the results of evaluating the accuracy of the methods for various terrain conditions, the kriging method with an exponential semivariogram model was chosen. In addition to the SRTM30 and GTOPO30 data, topographic maps of the Lena River Basin in the scale of one centimeter to two and ten kilometers were used. For each gridbox a single flow direction was

calculated according to the maximum topography gradient with adjacent 8 gridboxes. The granularity of the model hydrographic network depends on the setting of a threshold for the minimum number of gridboxes flowing into a catchment gridbox. For the constructed drainage network, the threshold value turned out to be 20. This value determined the network practically free of artifacts even in low-lying parts of the catchment. Comparison of this schematization with the real area of ??the basin showed an excess of schematization by  $\approx 40$  thousand  $\text{km}^2$  (50 gridboxes).

For numerical experiments on simulation of the runoff hydrograph in the Lena River Basin, retrospective analysis data of the modern era were used for MERRA research and applications for 1985–2005. The use of the global reanalysis database MERRA allows to determine the distributed fields of surface runoff and drainage by simple balance ratios using data on precipitation, evaporation and surface air temperature. These fields are required to initialize a linear climatic river flow model as input data. Two parameters and one correction factor (common for the entire basin) were calibrated. Those were the air temperature at the surface at which the snow begins to melt, the effective velocity of water movement in the river channel, taking into account its tortuosity and the flow coefficient, which determines which part of the moisture content goes into the overland flow, and which into the ground. The data on water discharge from the R-ArcticNET archive made it possible to simulate the regulated flow and assess the impact of the reservoir at the Chernyshevsky, Syuldyukar, Suntar, Khatyryk-Khomo gauging stations, located near the alignment of HPP-I, II downstream the Vilyui River, as well as at the closing outlet section of the Kyusyur of Lena River basin. The modelling results showed the seasonal regulation of the lower reaches of the Vilyui and Lena rivers by the Vilyui reservoir. The annual hydrological cycle calculated according to the new version of the climatic model of the river flow corresponds to the current dynamics of flow in the basin in winter, spring and summer-autumn periods, which is characterized by low winter flow from November to April, high flood from May to July, significant floods from August to October. The model interannual flow variability contains a small linear trend in the outlet section of the Kyusyur, which may indicate the response of the river runoff to climatic changes in the period of 1985–2005. However, in comparison with the linear trend obtained from the measurement data, it is rather insignificant. The estimates of the results of simulation of the monthly flow discharge, obtained using two statistical criteria for the correspondence of the calculated and measured discharge values, turned out to be close in the efficiency of calculations to the estimates of the results obtained by the VIC hydrological model and by the model of heat and moisture exchange of the underlying land surface with the SWAP atmosphere.

**Key words:** numerical modeling, river runoff, Lena River basin, hydrologically correct elevation model, linear climate model, runoff hydrograph, global database, gauging station.

## References

1. Stocker, T. F., Qin D., Plattner G.-K., Tignor M., Allen S. K., Boschung J., Nauels A., Xia Y., Bex V. and Midgley P. M. (eds.) Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA. 2013.
2. Georgiadi A. G., Koronkevich N. I., Milyukova I. P., Kislov A. V., Anisimov O. A., Barabanova E. A., Kashutina E. A., Borodin O. O. Scenarnaya ocenka veroyatnyx izmenenij rechnogo stoka v bassejnakh krupnejshix rek Rossii. Ch. 1. Bassejn reki Leny'. M.: Maks Press, 2011.
3. Gusev E. M., Nasonova O. N., Dzhogan L. Ya. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie mnogoletnej dinamiki sutochnyx znamenij rechnogo stoka i snegozapasov v bassejne r. Leny' // Vodny'e resursy'. 2016. T. 43. N 1. S. 24–36.
4. Georgiadi A. G., Koronkevich N. I., Barabanova E. A., Kashutina E. A., Milyukova I. P. O vklade klimaticheskix i antropogennyyx faktorov v izmeneniya stoka krupnyx rek Russkoj ravniny' i Sibiri // DAN. 2019. T. 488. N 5. S. 539–544.

5. Kuzin V. I., Lapteva N. A. Matematicheskoe modelirovanie klimaticheskogo rechnogo stoka iz Ob'-Irty'shskogo bassejna // Optika atmosfery i okeana. 2012. T.25. N 6. S. 539–543.
6. Kuzin V. I., Lapteva N. A. Matematicheskoe modelirovanie stoka osnovnyx rek Sibiri // Optika atmosfery i okeana. 2014. T. 27. N 6. S. 525–529.
7. Kanae S., Nishio K., Oki T., Musiake K. Hydrograph estimations by flow routing modeling from AGCM output in major basins of the world // Annual J. Hydraulic Engineering. 1995. V. 39. P. 97–102.
8. Oki T., Nishimura T., Dirmeyer P. Assessment of annual runoff from land surface models using Total Runoff Integrating Pathways (TRIP) // J. Meteorol. Soc. Of Japan. 1999. V. 77, N 1B. P. 235–255.
9. Rienecker M. M., Suarez M. J., Gelaro R., Todling R., Bacmeister J., Liu E., Bosilovich M. G. et al. MERRA: NASA's Modern-Era Retrospective Analysis for Research and Applications. // J. Climate. 2011. V. 24. P. 3624–3648. doi:10.1175/JCLI-D-11-00015.1
10. [Electron. Res.]: <https://gmao.dsfc.nasa.gov/reanalysis/MERRA>.
11. Hagemann S., Dumenil L. A parametrization of the lateral waterflow for the global scale // Climate Dynamics. 1998. V. 14. P. 17–31.
12. Bol'shiyanov D. Yu., Makarov A. S., Shnajder V., Shtof G. Proisxozhdenie i razvitiye del'ty reki Leny'. SPb.: AANII, 2013.
13. [Electron. Res.]: <http://www.r-arcticnet.sr.unh.edu/v4.0/index.html>.
14. Mostakov S. E. Reka Lena. Yakutsk: Yakut. kn. izd-vo, 1972.
15. [Electron. Res.]: [http://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2\\_1/](http://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2_1/).
16. Surfer8. User's Guide. Contouring and 3DSurfaceMappingforScientist and Engineers. Golden Software Inc., 2002.
17. Dzh. S. De'vis Statisticheskij analiz dannyx v geologii. Kn. 2. M.: Nedra. 1990.
18. Tan Q., Xu X. Comparative analysis of spatial interpolation methods: An experimental study // Sensors & Transducers Journal. 2014. V. 165, Is. 2. P. 155–163.
19. Mineev A. L., Kutinov Yu. G., Chistova Z. B., Polyakova E. V. Podgotovka cifrovoj modeli rel'efa dlya issledovaniya e'kzogennyx processov severnyx territorij Rossiskoj Federacii // Zhurn. Prostranstvo i Vremya. 2015. N 3 (21). S. 278–291.
20. Mirovoj vodnyj balans i vodnye resursy Zemli. Pod red. Korzun V. I.(pred.) i dr. L.: Gidrometeoizdat. 1974.
21. Oki T., Sud Y. C. Design of total runoff integrating pathways (TRIP) — a global river channel network // Earth Interactions. 1998. V. 2. P. 1–36.
22. Krylova A. I., Lapteva N. A. Reproduction of runoff hydrograph in the Lena River basin with a hydrologically correct digital elevation model // Bull. Nov. Comp. Center. Numerical Modeling in Atmosphere, Ocean, and Environment Studies. N 17. 2019. P. 51–58.
23. Hagemann S., Dumenil Gates L. Validation of the hydrological cycle of ECMWF and NCEP reanalyses using the MPI hydrological discharge model // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. N D2. P. 1503–1510.
24. Magriczkij D. V. Faktory i zakonomernosti mnogoletnix izmenenij stoka vody, vzveshennyx nanosov i teploty na nizhnej Lene i Vilyue // Vest. Mosk. Un-ta. 2015. Ser. 5. Geografiya. N 6. S. 85–95.
25. Ye B., Yang D., Kane D. L. Changes in Lena River streamflow hydrology: human impacts versus natural variations // Water Resources Research. 2003. V. 39. N 7, 1200, doi: 10.1029/2003WR001991.2003.
26. Lammers, R. B.; Shiklomanov, A. I.; Vörösmarty, C. J.; Fekete, B. M.; Peterson, B. J. Assessment of contemporary Arctic river runoff based on observational discharge records // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. N D4. P. 3321–3334. doi:10.1029/2000JD900444.

27. Shamseldin A. Y., O'Connor K. M. Non-linear neural network technique for updating of river flow forecasts // *Hydrology and Earth System Sciences*. 2001. V. 5. N 4. P. 577–597.
28. Nash J. E. and Sutcliffe J. V. River flow forecasting through conceptual models. Part 1. A discussion of principles // *J. Hydrol.*, 1970. V. 10. N 3. P. 282–290.
29. Liang X., Lettenmaier D. P., Wood E. F., Burges S. J. A simple hydrologically based model of land surface water and energy fluxes for GCMs // *J. Geophys. Res.* 1994. V. 99 (D7). P.14415–14428.
30. Su F., Adam J. C., Bowling L. C., Lettenmaier D. P. Streamflow simulations of the terrestrial Arctic domain // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110. N D08112. doi:10.1029/2004JD005518.
31. Gusev E. M., Nasonova O. N. Modelirovanie processov teplovagoobmena sushi s atmosferoj v lokal'nom mashtabe dlya territorij s mnogoletnej merzlotoj // *Pochvovedenie*. 2004. N 9. S. 1077–1092.
32. Gusev E. M., Nasonova O. N. Modelirovanie teplo i vlogoobmena poverxnosti sushi s atmosferoj. M.: Nauka, 2010.
33. Apollov B. A., Kalinin G. P., Komarov V. D. Kurs gidrologicheskix prognozov. L.: Gidrometeoizdat. 1974.



# МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЧНОГО СТОКА В БАССЕЙНЕ РЕКИ ЛЕНЫ НА ОСНОВЕ ГИДРОЛОГИЧЕСКИ-КОРРЕКТНОЙ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ РЕЛЬЕФА

А. И. Крылова, Н. А. Лаптева\*

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090, Новосибирск, Россия

\*ФБУН Государственный научный центр вирусологии и биотехнологии „Вектор“  
Роспотребнадзора,  
630559, р. п. Кольцово, Новосибирская область, Россия

---

УДК 551.583+519.6

DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10016

В данной статье представляются результаты численного моделирования гидрографов речного стока и многолетней динамики стока в бассейне реки Лены с использованием данных ре-анализа MERRA за период 1985–2005 гг. На основе новой версии климатической линейной гидрологической модели для расчета гидрографа стока в замыкающем створе Кюсюра реки Лены трансформация поверхностного и подземного стоков для каждой расчетной ячейки водосбора с учетом времени добегания воды по ячейке выполняется по линейной двухпараметрической модели Калинина-Милюкова, а для расчета трансформации стока в речной сети используется линейная модель формирования водного баланса в русловой сети. Проведено построение новой схематизированной модельной гидрографической сети бассейна реки Лены на основе гидрологически-корректной цифровой модели рельефа разрешением  $(1/3)^\circ \times (1/3)^\circ$ , полученной по данным SRTM30 и GTOP030. Данные о расходе воды из архива R-ArcticNET позволили промоделировать естественный и зарегулированный режимы речного стока реки Вилюй. Результаты моделирования показали сезонное регулирование Вилуйским водохранилищем нижнего течения рек Вилюя и Лены. Модельная межгодовая изменчивость стока содержит небольшой линейный тренд в замыкающем створе Кюсюра, что может говорить об отклике речного стока на климатические изменения в период 1985–2005 гг., но по сравнению с трендом, полученным по данным измерений, он достаточно мал. Оценки результатов моделирования месячного стока, полученные по двум статистическим критериям соответствия рассчитанных и измеренных значений стока, оказались близкими по эффективности расчетов с оценками результатов, полученных по гидрологической модели VIC и по модели тепло- и влагообмена подстилающей поверхности суши с атмосферой SWAP.

**Ключевые слова:** численное моделирование, речной сток, бассейн реки Лены, гидрологически-корректная модель рельефа, линейная климатическая модель, гидрограф стока, глобальная база данных, стоковые станции.

**Введение.** В связи с наблюдаемыми изменениями климата, особенно характерными для высоких широт Северного полушария [1], большой интерес вызывает вопрос о гидрологическом режиме рек панарктического бассейна, в частности бассейна реки Лены

---

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 20-05-00241а.

[2, 3], и влиянии климатических и антропогенных воздействий на речной сток [4]. Для оценки воздействий на гидрологический цикл речных бассейнов Арктического региона возникает необходимость повышения точности прогнозов речного стока, расчетов многолетней динамики стока. Это касается как разработки соответствующих пространственно-распределенных моделей формирования стока, так и методов схематизации рассматриваемых бассейнов на основе геоинформационных технологий.

В настоящей статье представляется новый вариант климатической модели речного стока с бассейна реки Лены, которая относится к концептуальному типу гидрологических моделей и была представлена ранее в работах [5, 6]. В отличие от описания речного стока двухпараметрической линейной резервуарной моделью, в новой версии модели для расчета трансформации стока в речной сети используется широко известная линейная модель формирования водного баланса в русловой сети [7, 8]. Простая линейная модель, примененная к схематизированной гидрографической сети, построенной на основе новой гидрологически-корректной цифровой модели рельефа бассейна реки Лены разрешением  $(1/3)^\circ \times (1/3)^\circ$ , позволила получить хорошее качество воспроизведения гидрографа речного стока в новой версии климатической модели на данных реанализа MERRA за период 1980–2005 гг. [9, 10]. Как показал анализ результатов моделирования, это объясняется, в первую очередь, хорошей согласованностью реального водосбора с модельным. В этом случае оказалась успешной параметризация коэффициента задержки для поверхностного стока, использующая характеристики ячеек сетки [11].

**1. Природно-климатические условия объекта исследования — бассейна реки Лены.** Река Лена — одна из величайших рек земного шара: по водности — вторая в России (после Енисея) и восьмая в мире, по протяженности — третья в России (4400 км, после Оби с Иртышом и Амура с Аргунью) и десятая среди рек мира. Водосборный бассейн реки Лены образует в ландшафтном плане сложную природную систему площадью 2490 тыс. км<sup>2</sup>. По размерам бассейн реки Лены занимает третье место в России (после бассейнов Оби и Енисея) и восьмое в мире. Наибольшая протяженность с юга на север — 2400 километров (с 53° с. ш. до 72° с. ш.), с запада на восток — 2000 километров (с 103° в. д. до 140° в. д.).

Река Лена берет свое начало на северо-западном склоне Байкальского хребта. От истока Лена направляется на запад. Потом круто поворачивает на север, а затем устремляется на северо-восток. При впадении в окраинное море Северного Ледовитого океана — море Лаптевых — образует уникальную, самую большую дельту в России площадью  $\sim 30$  тыс. км<sup>2</sup> (рис. 1) [12].

По характеру строения долины, течения и водности реку Лену принято делить на три участка: 1) верхнее течение — от истока до устья реки Витим; 2) среднее течение — между устьями рек Витим и Алдана; 3) нижнее течение — от устья реки Алдан до выхода Лены в море. Разность между абсолютными высотами истока и устья Лены составляет 930 метров.

В верхнем течении Лена — горная река, протекающая в беспойменной долине, ограниченной каменистыми утесами. Сливаясь с крупными правыми притоками — Витимом (длина 1837 км, площадь бассейна 225 тыс. км<sup>2</sup>) и Олекмой (длина 1436 км, площадь бассейна 210 тыс. км<sup>2</sup>) — Лена становится полноводной и течет в широкой долине. До Якутска ширина Лены достигает 7–10 километров. Приняв справа самый многоводный приток Алдан (средний годовой расход воды  $\sim 5500$  м<sup>3</sup>/с, длина 2273 км, площадь бассейна 729 км<sup>2</sup>), а затем слева самый длинный приток Вилюй (2450 км, площадь бассейна 450 тыс. км<sup>2</sup>), ширина Лены возрастает до 20–30 километров. Нижняя Лена отличается

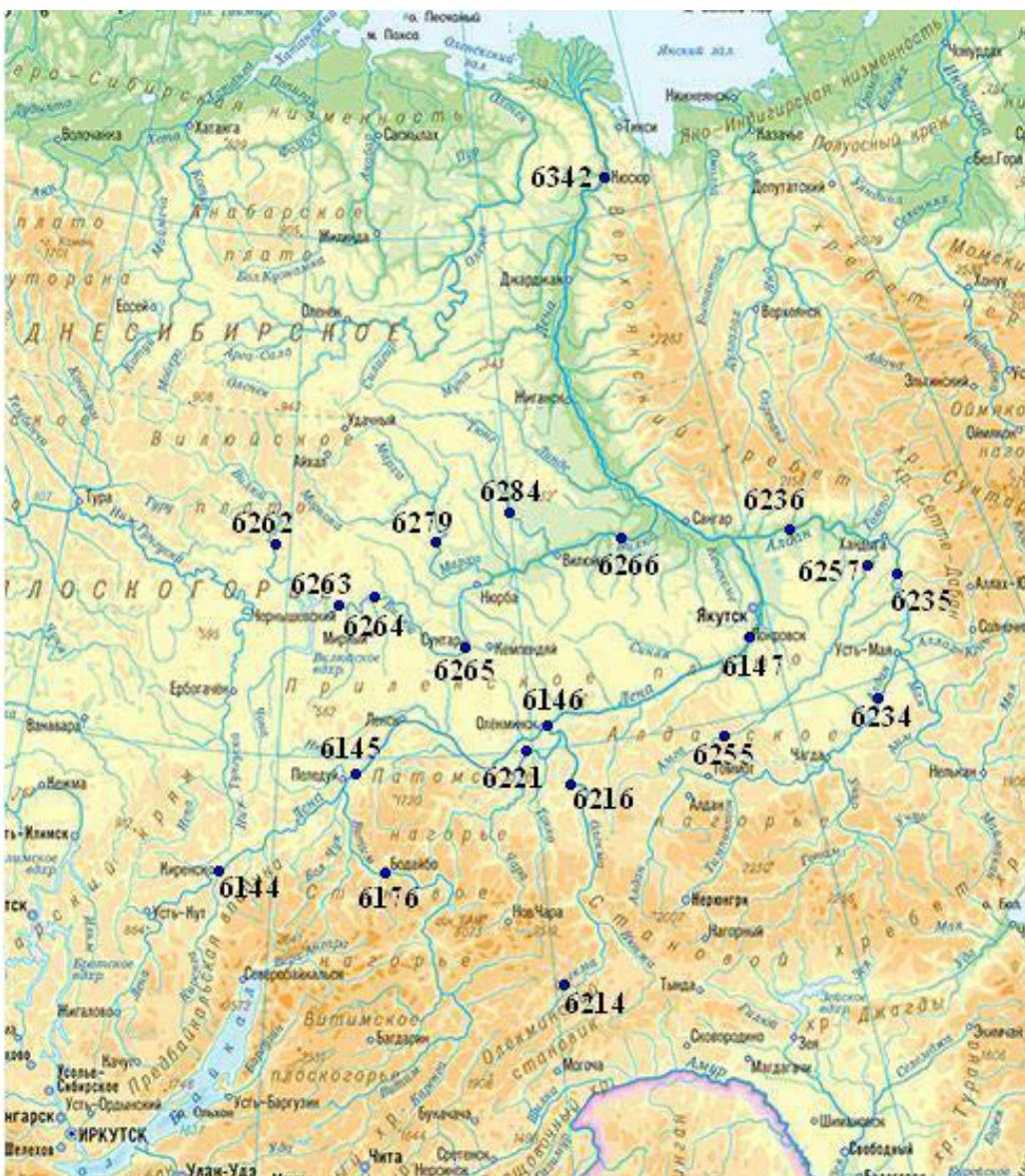


Рис. 1. Карта бассейна реки Лены с нанесенными на ней идентификаторами 21 стоковой станции из базы данных Панарктического речного стока R-ArcticNET [13]

постепенным сужением долины. После села Кюсюр долина реки резко сужается до 3–4 километров. Справа к реке подходит Хараулахского хребта, слева — отроги кряжа Чекановского. Далее Лена на протяжении более 150 километров течет по участку, который называется „Ленской трубой“ (рис. 1) [14].

В 210 километрах ниже села Кюсюр, посреди реки возвышается 114-метровый каменный остров Столб. Он служит условной границей конца пути реки Лены и началом ее дельты. На мелководье моря Лаптевых расположена обширная низменная дельта Лены. Среди пяти основных проток дельты самая глубокая и судоходная протока — Быковская. Этую протоку считают продолжением Лены, и в этом случае длина реки равна 4400 километров [12].

Таблица 1

## Идентификаторы стоковых станций

Река и ее основные притоки	Стоковые станции
Лена	6144 — Змеиново; 6145 — Крестовский; 6146 — Солянка; 6147 — Табага; 6342 — Кюсюр;
Витим	6176 — Бодайбо;
Олекма	6214 — Средняя Олекма; 6216 — Куду-Келе; 6221 — Токко (р. Чара);
Алдан	6234 — Усть-Миле; 6235 — Охотский Переезд; 6236 — Верхоянский переезд;
Вилуй	6255 — Буяге (р. Амга); 6257 — Теруте (р. Амга); 6262 — Усть-Амбардаах; 6263 — Чернышевский; 6264 — Сюльдюкар; 6265 — Сунтар; 6266 — Хатырык-Хомо; 6279 — Чумпурук (р. Марха); 6284 — Угулюцы (р. Тюнг).

Бассейн Лены является преимущественно горной системой: почти 85 % территории занято высотами более 200 метров. Средняя высота бассейна 607 метров. С востока и юга бассейн Лены окружен высокими цепями Верхоянского, Джугджурского, Станового, Байкальского хребтов. Центральную часть бассейна занимает плоская Центрально-Якутская равнина, западную — обширное Среднесибирское плоскогорье и Приленское плато, южную — Северо-Байкальское, Патомское, Становое и Алданское нагорья.

Климат бассейна Лены резко континентальный. Высокие горные хребты препятствуют проникновению более теплых и влажных воздушных масс с морем Тихого океана. Поэтому климат формируется главным образом под влиянием холодных континентальных масс воздуха сибирского антициклона. В течении всего года бассейн Лены открыт для вторжения холодных арктических воздушных потоков.

Зима продолжительная (6–7 месяцев), суровая и малоснежная. Средние температуры самого холодного месяца (января) колеблются от  $-32^{\circ}$  до  $-45^{\circ}$ .

Лето короткое (до 3 месяцев), относительно теплое. Средние температуры самого теплого месяца (июля) колеблются от  $4^{\circ}$  на крайнем севере бассейна до  $19^{\circ}$  в долине среднего течения Лены.

На территории бассейна осадков выпадает мало, в среднем 250 мм в год. Наибольшее годовое количество осадков (до 500–600 мм) отмечается в южной части бассейна, наименьшее (менее 100–150 мм) в дельте Лены. Небольшое количество осадков выпадает и в центральной части бассейна (не более 200–300 мм в год). Основное питание Лены, как и всех ее притоков, составляют талые снеговые и дождевые воды. Распространение многолетней мерзлоты в пределах всего бассейна ограничивает питание реки и ее притоков грунтовыми водами. Общий режим осадков в бассейне Лены определяет годовой режим речного стока с высоким весенним половодьем, несколькими довольно значительными летними паводками и низкой осенне-зимней меженю.

Почти вся территория бассейна расположена в зоне сплошной многолетней мерзлоты, мощность которой колеблется от нескольких десятков метров на юге до нескольких сотен метров севернее  $60^{\circ}$  с. ш. Под руслами крупных рек, в местах выхода геотермальных источников, а также в самой толще мерзлых горных пород встречаются участки, лишенные мерзлоты, — талики. Летом верхний слой мерзлоты пропаивает до нескольких сантимет-

ров на крайнем севере бассейна и до 2–3 метров и более на юге — в долине Лены, Алдана, Олекмы и других рек [14].

Суровый климат и многолетняя мерзлота оказывают большое влияние на природу бассейна реки Лены. Большая часть бассейна покрыта тайгой с преобладанием даурской лиственницы, и только севернее  $71^{\circ}$  с. ш. начинается зона лесотундры и тундры.

**2. Схематизация бассейна реки Лены. Гидрологически-корректная цифровая модель рельефа.** Рельеф и гидографическая сеть водосборного бассейна являются основными факторами речного стока, определяющими поведение воды на поверхности водосбора. На рис. 2 представлена схематизация бассейна реки Лены от истока до замыкающего створа Кюсюр совокупностью 3735 ячеек пространственной сетки разрешением  $(1/3)^{\circ} \times (1/3)^{\circ}$ , связанных достаточно развитой модельной гидографической сетью. Сравнение данной схематизации с реальной площадью бассейна составило превышение схематизации на  $\approx 40$  тыс. км<sup>2</sup> (50 ячеек).

Схематизация бассейна реки Лены и построение его модельной дренажной сети выполнены на основе цифровой модели рельефа, полученной по глобальным данным радиарной интерферометрической съемки SRTM30 [15], покрывающей поверхность Земли от  $60^{\circ}$  ю. ш. до  $60^{\circ}$  с. ш., дополненной данными GTOP030 разрешением 30 угловых секунд. Фрагмент данных, включающий бассейн реки Лены:  $53^{\circ} \div 72^{\circ}$  с. ш.,  $103^{\circ} \div 140^{\circ}$  в. д., был преобразован с помощью метода геостатистического моделирования кригинг в массив топографических данных на регулярной сетке разрешением  $(1/3)^{\circ} \times (1/3)^{\circ}$  со значением высот в центрах ячеек. Эта работа была выполнена на основе программного пакета Surfer8 [16], используемого в среде Microsoft Windows, и метода интерполяции кригинг [17], реализованного в этом пакете. Наряду с кригингом рассматривались и другие методы пространственного анализа [18], представленные в Surfer8: метод обратных взвешенных расстояний (Inverse Distance Weighting — IDW), метод сплайн интерполяции (Spline), метод естественного соседства (Natural Neighbor — NN), модифицированный метод Шепарда (Modified Shepard's Method). Созданные различными методами цифровые модели рельефа для участков бассейна сравнивались по статистическим характеристикам: минимальным и максимальным значениям высот, средней ошибке, стандартному отклонению, средней квадратичной ошибке. Согласно результатам оценки точности методов для различных условий рельефа был выбран метод кригинга с экспоненциальной моделью вариограммы.

Из-за отсутствия геоинформационной системы, позволяющей использовать автоматизированные процедуры построения гидрологически-корректной модели водосборного бассейна, моделирование гидографической сети на регулярной сетке разрешением  $(1/3)^{\circ} \times (1/3)^{\circ}$  выполнялось с помощью программ вычисления файлов направлений стока и кумулятивного стока для каждой ячейки модельного водосбора. Кроме данных SRTM30-GTOP030, использовались топографические карты бассейна масштабом 1:200000, 1:1000000 как основной источник данных для реализации методов цифрового моделирования рельефа. Карты позволили проложить по оцифрованной сетке высот бассейна русла реки Лены и ее четырех основных притоков: Витима, Олекмы, Алдана и Вилюя. При построении гидрологически-корректной цифровой модели рельефа, т. е. модели, в которой форма и направление смоделированных водотоков совпадают с реальными, использовалась методика, указанная в работе [19]. Согласно этой методике, выполнялись процедура заполнения некорректных областей внутреннего стока и устранение погрешностей и неточностей в значениях высот ячеек водосбора, которые выявлялись путем сравнения цифровой модели с данными топографических карт. После определения для

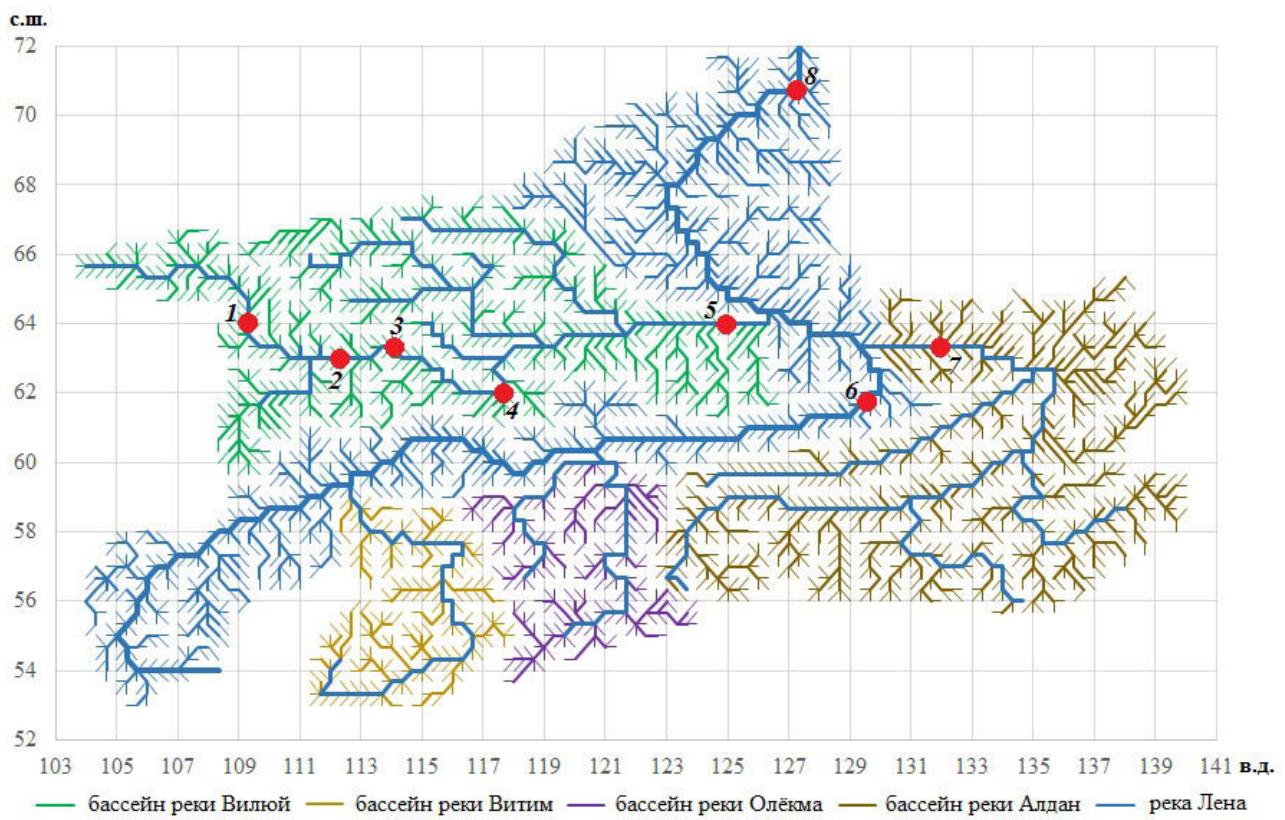


Рис. 2. Модельная гидрографическая сеть бассейна реки Лены. Стоковые станции: 1 — Усть-Амбардах, 2 — Чернышевский, 3 — Сюльдюкар, 4 — Сунтар, 5 — Хатык-Хомо, 6 — Табага, 7 — Верхоянский перевоз, 8 — Кюсюр

каждой ячейки модели единственного направления стока из восьми основных румбов (С, СВ, В, ЮВ, Ю, ЮЗ, З, СЗ) путем вычисления максимального градиента топографии для данной ячейки с соседними 8 ячейками, идентифицировались ячейки, в которые будет производиться сток. А далее на основе полученного файла направлений стока рассчитывался кумулятивный сток — количество всех ячеек, чей сток попадает в ячейку, лежащую ниже по склону. Ячейки с самым большим значением кумулятивного стока позволили выделить сеть основных водотоков. Степень детализации модельной гидрографической сети зависит от установления порога для минимального количества ячеек, стекающих в каждую ячейку. Для растровой дренажной сети, представленной на рис. 2, значение порога оказалось равным 20. Это значение определило сеть, практически не содержащую артефактов даже на низменных участках водосбора.

В табл. 2 приведено сравнение длины реки Лены [20] и ее модельного аналога. Согласно опубликованным данным, как сама река Лена, так и ее притоки оказались длиннее. Это можно объяснить как присутствием меандрирования реального водного потока, которое для модельного водосбора является особенностью подсеточного масштаба, так и сеточным приближением реальных русел. В работе [21] коэффициент извилистости для самых больших рек земного шара близок к 1,6 (на сетке разрешением  $1^\circ \times 1^\circ$ ), а для размеров бассейнов менее  $500000 \text{ км}^2$  и длин рек короче 1500 км коэффициент извилистости имеет большую изменчивость. Согласно данным табл. 2, река Олекма (площадь бассейна

Таблица 2

Сравнение длин реки Лены и ее главных притоков;  
коэффициент извилистости как отношение реальной длины реки к модельной

	Коэффициент извилистости	Длина реки, км	Модельная длина, км
Лена (до Кюсюра)	1.01	3716	3676
Вилуй	1.20	2450	2041
Алдан	1.28	2273	1775
Олекма	1.75	1436	827
Витим	1.35	1837	1363

210 тыс. км<sup>2</sup>) имеет наиболее грубое приближение на сетке  $(1/3)^\circ \times (1/3)^\circ$  среди главных притоков Лены.

### 3. Климатическая модель речного стока и ее информационное обеспечение.

Для исследования гидрологического цикла на поверхности Земли в работах [5, 6] была представлена климатическая модель речного стока. В данной работе для моделирования многолетней динамики стока в бассейне реки Лены используется ее новая версия, описание которой дано в работе [22]. В отличие от формирования речного стока на основе двухпараметрической линейной резервуарной модели, в новой версии модели для расчета трансформации стока в речной сети используется простая линейная модель формирования водного баланса в речевой сети [7, 8]. С целью повышения точности расчетов гидрологического режима бассейна реки Лены была проведена схематизация бассейна на основе гидрологически-корректной цифровой модели рельефа.

3.1. Используемые данные. Для численных экспериментов по расчету гидрографа стока в бассейне реки Лены на основе новой версии модели климатического речного стока были использованы данные ретроспективного анализа современной эпохи для исследований и приложений (Modern-Era Retrospective Analysis for Research and Applications) или коротко — данные реанализа MERRA [9, 10]. Использование глобальной базы данных реанализа MERRA позволяет по данным об осадках и температуре приземного воздуха определить распределенные поля наземного стока и дренажа по простым балансовым соотношениям [23]. Эти поля требуются для инициализации линейной модели климатического речного стока как входные данные. Для этого данные по осадкам и температуре приземного воздуха были проинтерполированы с сетки  $(0.5)^\circ \times (2/3)^\circ$  на сетку, покрывающую территорию бассейна, разрешением  $(1/3)^\circ \times (1/3)^\circ$ . В качестве периода, относительно которого велись расчеты гидрографа стока и проводилось сравнение с данными наблюдений из архива данных по речному стоку рек, впадающих в Северный Ледовитый океан, R-ArcticNET [13], был выбран период 1980–2005 гг. Данные о стоке на станциях, представленных на рис. 1, использовались для валидации новой версии климатической модели речного стока.

3.2. Калибровка модели. Для калибровки климатической модели речного стока и последующей ее проверки использовались суточные значения стока, измеренные в замыкающем створе Кюсюра за период 1980–1984 гг. Калибровались три параметра: температура воздуха у поверхности, при которой начинается таяние снега; коэффициент стока, который определяет, какая часть влагонаполнения ячейки (осадки — испарение + таяние снега) переходит в поверхностный сток, а какая в грутовый, и эффективная скорость движе-

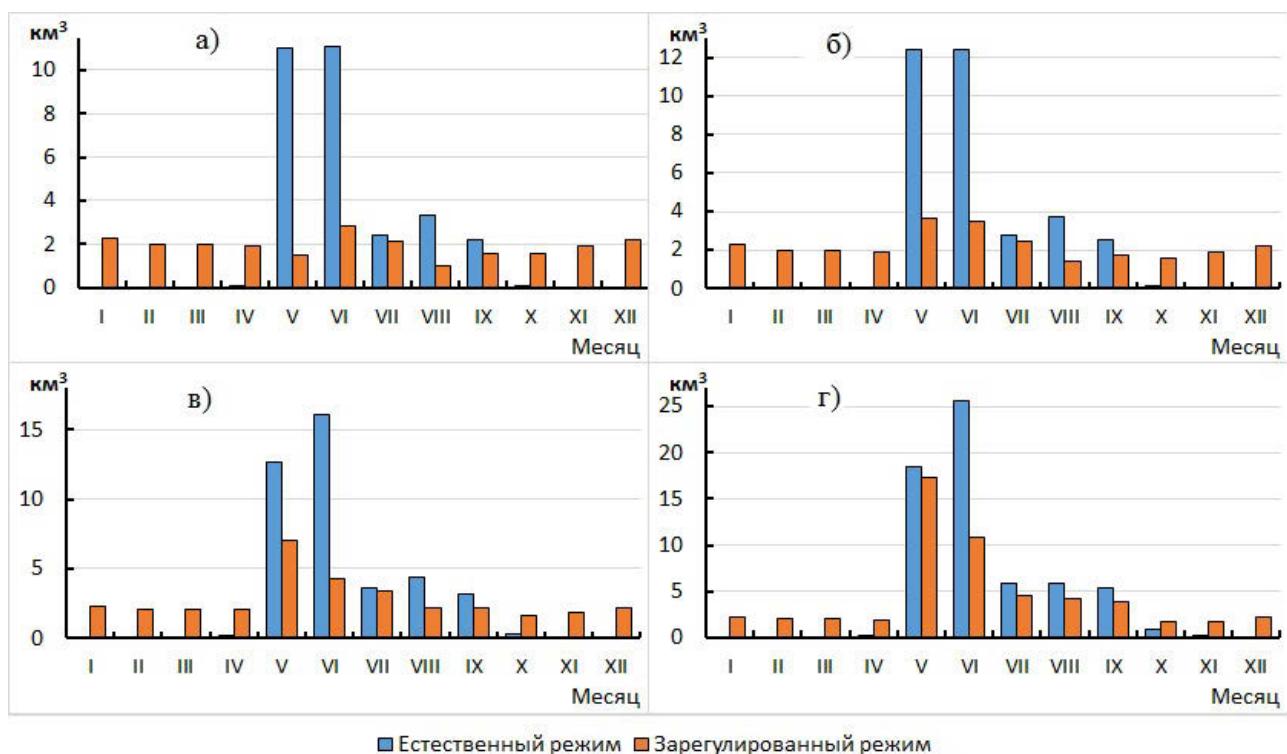


Рис. 3. Сравнение среднеклиматического месячного расхода за период 1985–2005 гг. на гидропостах реки Вилой: а) Чернышевский, б) Сюльдюкар, в) Сунтар, г) Хатырык-Хомо

ния воды в речном русле с учетом его извилистости. Калибровка проводилась в пределах физически обоснованных значений параметров.

**4. Результаты численных экспериментов и их анализ.** По новой версии климатической модели речного стока было исследовано влияние регулирования водохранилищем каскада Вилойских ГЭС – I, II на сток ниже по течению до устья реки Вилой и далее до замыкающего створа реки Лены – Кюсюра. Вначале было проведено моделирование естественного стока без воздействия водохранилища для всего бассейна реки Лены, используя данные реанализа MERRA за период 1985–2005 гг. Этот режим стока соответствует гидрологическому режиму в бассейне до введения в эксплуатацию Вилойских ГЭС.

Возможность использовать суточные данные о расходе воды на гидропосту Чернышевском (в створе ГЭС-I, II), представленные в архиве R-ArcticNET, позволили промоделировать зарегулированный сток и оценить влияние водохранилища на гидропостах Чернышевский, Сюльдюкар, Сунтар, Хатырык-Хомо, расположенных от створа вниз по течению реки Вилой, а также на замыкающем створе Кюсюра бассейна реки Лены.

На рис. 3 приведен сезонный цикл среднеклиматического месячного стока за период 1985–2005 гг. по четырем станциям для естественного и зарегулированного режимов.

Согласно табл. 3, сравнение естественного и зарегулированного стока для гп. Чернышевский показывает сокращение стока на 85 % в мае, на 75 % в июне и на 12 % в июле. В период с ноября по апрель моделируется очень значительное регулирование водохранилищем среднеклиматического месячного стока на данных 1985–2005 гг. (рис. 3, а).

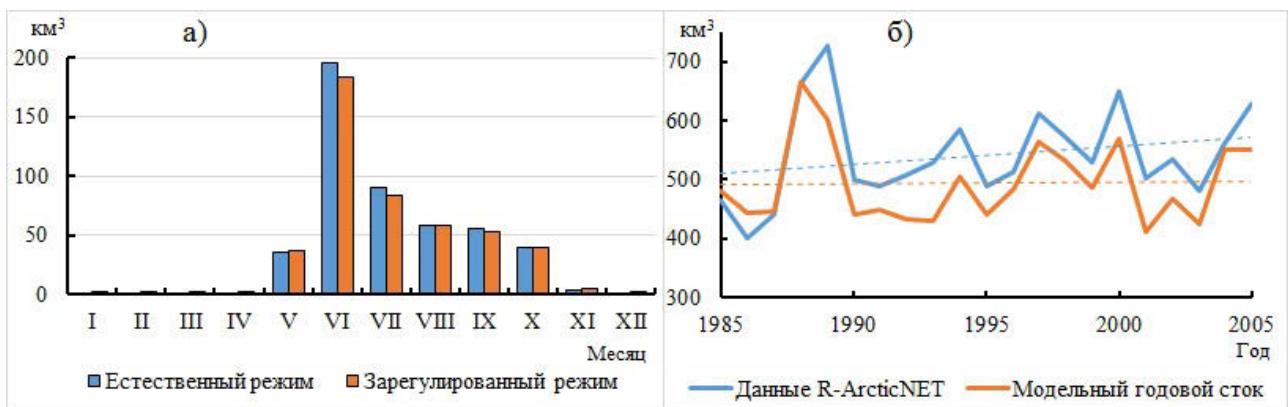


Рис. 4. а) сравнение среднеклиматического месячного стока для естественного и зарегулированного режимов за период 1985–2005 гг. на гп. Кюсюр; б) сравнение межгодового стока по данным R-ArcticNET с результатами моделирования

Аналогичные изменения воспроизводят модельные результаты на гп. Сульдюкар, расположенному на расстоянии 175 км вниз по течению от створа ГЭС-I, II и на гп. Сунтар в 580 км вниз по течению от гп. Чернышевский (рис. 3, б, 3, в, табл. 3).

Иная картина наблюдается для гп. Хатырык–Хомо, расположенного в 1200 км ниже створа ГЭС-I, II (рис. 3, г). Разница между естественным и зарегулированным стоком составляет 7 % в мае и 57 % в июне (табл. 3).

По результатам, представленным в табл. 3 и на рис. 3, отчетливо просматривается сезонное регулирование стока Вилюйским водохранилищем вплоть до устья реки Вилюй [24, 25]. В зимний период с декабря по апрель сток увеличивается за счет регулирования водохранилищем (сброс запасов воды из водохранилища). В период таяния снега в мае и июне происходит значительное снижение стока за счет пополнения водохранилища.

На рис. 4, а, приведены модельные сезонные циклы среднеклиматического месячного стока за период 1985–2005 гг. для естественного и зарегулированного режимов на замыкающем створе Кюсюр. Модельные результаты демонстрируют более высокие значения стока для естественного режима в период весеннего половодья. Это различие позволяет предположить о влиянии Вилюйского водохранилища на сезонный режим стока в нижней части бассейна реки Лены [24].

Модельный годовой гидрологический режим, представленный на рис. 4, а, отвечает сложившейся динамике стока в бассейне в зимний, весенний и летне-осенний периоды.

Согласно данным измерений речного стока, в Кюсюре наблюдаются следующие особенности годового гидрологического режима водосборного бассейна реки Лены [13, 24, 26]. Так как бассейн реки Лены более чем на 90 % лежит в зоне многолетнемерзлых пород как сплошного, так и прерывистого распространения, то наблюдается очень низкий зимний сток (зимняя межень) в период с ноября по апрель. В период таяния снега и сильных паводков в бассейне с мая по октябрь наблюдается сезон высокого стока. Максимальный расход воды имеет место в июне и в сотни раз превышает минимальный сток в зимние месяцы. Данные показывают, что преобладающим питанием реки Лены является поверхностное питание.

На рис. 4, б, представлена динамика модельного и наблюденного годового стока в замыкающем створе Кюсюр за период 1985–2005 гг. Пунктиром на рисунке обозначены

Таблица 3

Месячный, сезонный и годовой сток на гидропостах реки Вилуй

Сток, км <sup>3</sup>								За год	Проценты к годовому стоку, %			
	Весенне- половодье, месяцы			Летне- осенняя межень с паводками, месяцы		Зимняя межень, месяцы			Половодье	Летне-осенняя межень	Зимняя межень	
	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI-IV		V-VII	VIII-X	XI-IV	
ГП Чернышевский, створ ГЭС-1, 2												
Естественный	11,1	11,1	2,4	3,4	2,2	0,1	0,1	30,2	81,2	18,5	0,2	
Зарегулированный	1,5	2,8	2,1	1,0	1,6	1,6	12,3	22,9	28,1	18,1	53,8	
Данные R-ArcticNET	1,4	2,7	2,1	1,0	1,5	1,5	11,7	21,9	28,4	18,2	53,4	
ГП Сюльдюкар, 175 км ниже створа ГЭС-1, 2												
Естественный	12,4	12,4	2,8	3,7	2,5	0,1	0,1	34,0	81,3	18,5	0,2	
Зарегулированный	3,6	3,5	2,5	1,4	1,8	1,6	12,3	26,7	35,9	17,8	46,3	
Данные R-ArcticNET	3,0	2,8	2,6	1,0	1,3	1,2	9,9	21,9	38,7	16,2	45,1	
ГП Сунтар, 580 км ниже створа ГЭС-1, 2												
Естественный	12,7	16,1	3,6	4,3	3,2	0,3	0,2	40,4	80,3	19,3	0,4	
Зарегулированный	7,1	4,3	3,3	2,1	2,2	1,6	12,4	33,1	44,5	17,9	37,6	
Данные R-ArcticNET	5,1	3,9	3,2	1,3	1,6	1,4	12,1	28,8	42,9	15,1	42,1	
ГП Хатырык-Хомо, 1200 км ниже створа ГЭС-1, 2												
Естественный	18,5	25,6	5,8	5,8	5,4	0,9	0,2	62,2	80,2	19,5	0,3	
Зарегулированный	17,2	10,9	4,6	4,1	4,0	1,8	12,3	54,9	59,6	18,0	22,4	
Данные R-ArcticNET	7,6	16,0	7,7	3,7	4,2	2,4	12,2	53,8	58,2	19,2	22,6	
ГП Кюсюр												
Естественный	35,4	195	90	59	56	40	3,1	478	67,0	32,3	0,7	
Зарегулированный	37,3	183	83	58	53	39	15,1	470	64,6	32,2	3,2	
Данные R-ArcticNET	26,7	192	106	72	58	38	49	542	59,8	31,1	9,0	

Таблица 4

Статистические характеристики соответствия рассчитанных и наблюденных месячных стоков ( $Eff$  и  $Bias$ , %) по моделям VIC, SWAP и линейной

Используемая модель	Стоковая станция	Расчетный период, годы	$Eff$	$Bias$
VIC		1979–1999	0.92	0.5
SWAP	Кюсюр	1986–1999	0.93	-7.9
Линейная модель		1985–2005	0.93	-4.4
VIC		1979–1999	0.88	-9.1
SWAP	Табага	1986–1992	0.89	2.2
Линейная модель		1985–1999	0.84	-1.1
VIC		1979–1999	0.88	0.4
SWAP	Верхоянский перевоз	1967–1999	0.91	-2.6
Линейная модель		1985–1999	0.88	-1.7

линейные тренды, показывающие увеличение годового объема стока для данного периода времени.

Оценка полученных гидографов суточного и месячного стоков по новой версии климатической модели речного стока осуществлялась по двум статистическим критериям соответствия рассчитанных ( $Q_{\text{расч}}$ ) и измеренных ( $Q_{\text{набл}}$ ) значений стока по множеству выборки ( $N$ ): средней относительной ошибке  $Bias$

$$Bias = \frac{\sum_N (Q - Q)}{\sum_N Q} 100\%$$

и критерию эффективности по Нэшу-Сатклиффу [27, 28]

$$Eff = 1 - \frac{\sum_N (Q - Q)^2}{\sum_N (Q - \bar{Q})^2}.$$

Для сопоставления полученных результатов расчета месячного стока по линейной климатической модели с аналогичными расчетами по известной гидрологической модели VIC (Variable Infiltration Capacity) [29, 30] и модели тепло- и влагообмена подстилающей поверхности суши с атмосферой SWAP (Soil Water – Atmosphere – Plants) Института водных проблем РАН [3, 31, 32] в табл. 4 приведены статистические критерии  $Eff$  и  $Bias$  для различных стоковых станций реки Лены.

Согласно работе [33], значения критерия эффективности при оценке гидрологических расчетов, превышающие величину 0.9, указывают на хорошие характеристики модели. Значения, находящиеся в диапазоне  $0.8 \div 0.9$  — на удовлетворительные, а ниже 0.8 — неудовлетворительное соответствие модельных результатов и данных наблюдений. Существуют и другие оценки точности моделей, например, в [27] при  $Eff > 0.75$  — хорошая точность, при  $0.36 < Eff < 0.75$  — удовлетворительная и неудовлетворительная при  $Eff < 0.36$ .

Согласно табл. 4, для трех моделей результаты расчета месячного стока на трех стоковых станциях реки Лены оказались близкими. Значения критерия эффективности указывают на хорошее и удовлетворительное соответствие модельных результатов и данных измерений.

**Заключение.** На основе новой версии модели климатического речного стока проведены численные эксперименты по моделированию гидрологического годового цикла и

межгодовой динамики речного стока бассейна реки Лены на основе данных реанализа MERRA за период 1985–2005 гг. Результаты моделирования естественного и зарегулированного режимов показали сезонное регулирование Вилюйским водохранилищем нижнего течения рек Вилюй и Лена. Хотя модельная межгодовая изменчивость стока и показывает небольшой линейный тренд в замыкающем створе Кюсюра, что может говорить об отклике речного стока на климатические изменения в бассейне, но в сравнении с трендом, полученным по данным измерений, он достаточно мал. В новой версии климатической модели речного стока пока учитывается очень упрощенная параметризация влияния болот и озер на скорость поверхностного и речного стока. Необходимо в дальнейшем подготовить данные о содержании болот и озер для ячеек разрешением  $(1/3)^\circ \times (1/3)^\circ$  для бассейна реки Лены. Результаты моделирования гидрографа стока по новой версии линейной климатической модели оказались близкими с результатами по гидрологической модели VIC и по модели тепло- и влагообмена подстилающей поверхности суши с атмосферой SWAP.

## Список литературы

1. Stocker, T. F., Qin D., Plattner G.-K., Tignor M., Allen S. K., Boschung J., Nauels A., Xia Y., Bex V. and Midgley P. M. (eds.) Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA. 2013.
2. Георгиади А. Г., Коронкевич Н. И., Милукова И. П., Кислов А. В., Анисимов О. А., Барabanova Е. А., Кашутина Е. А., Бородин О. О. Сценарная оценка вероятных изменений речного стока в бассейнах крупнейших рек России. Ч. 1. Бассейн реки Лены. М.: Макс Пресс, 2011.
3. Гусев Е. М., Насонова О. Н., Джоган Л. Я. Физико-математическое моделирование многолетней динамики суточных значений речного стока и снегозапасов в бассейне р. Лены // Водные ресурсы. 2016. Т. 43. № 1. С. 24–36.
4. Георгиади А. Г., Коронкевич Н. И., Барабанова Е. А., Кашутина Е. А., Милукова И. П. О вкладе климатических и антропогенных факторов в изменения стока крупных рек Русской равнины и Сибири // ДАН. 2019. Т. 488. № 5. С. 539–544.
5. Кузин В. И., Лаптева Н. А. Математическое моделирование климатического речного стока из Обь-Иртышского бассейна // Оптика атмосферы и океана. 2012. Т.25. № 6. С. 539–543.
6. Кузин В. И., Лаптева Н. А. Математическое моделирование стока основных рек Сибири // Оптика атмосферы и океана. 2014. Т. 27. № 6. С. 525–529.
7. Kanae S., Nishio K., Oki T., Musiake K. Hydrograph estimations by flow routing modeling from AGCM output in major basins of the world // Annual J. Hydraulic Engineering. 1995. V. 39. P. 97–102.
8. Oki T., Nishimura T., Dirmeyer P. Assessment of annual runoff from land surface models using Total Runoff Integrating Pathways (TRIP) // J. Meteorol. Soc. Of Japan. 1999. V. 77, N 1B. P. 235–255.
9. Rienecker M. M., Suarez M. J., Gelaro R., Todling R., Bacmeister J., Liu E., Bosilovich M. G., Schubert S. D., Takacs L., Kim G.-K., Bloom S., Chen J., Collins D., Conaty A., A. da Silva, et al. MERRA: NASA's Modern-Era Retrospective Analysis for Research and Applications. // J. Climate. 2011. V. 24. P. 3624–3648. doi:10.1175/JCLI-D-11-00015.1
10. [Электрон. Рес.] <https://gmao.dsfc.nasa.gov/reanalysis/MERRA>.
11. Hagemann S., Dumenil L. A parametrization of the lateral waterflow for the global scale // Climate Dynamics. 1998. V. 14. P. 17–31.
12. Большиянов Д. Ю., Макаров А. С., Шнайдер В., Штоф Г. Происхождение и развитие дельты реки Лены. СПб.: ААНИИ, 2013.

13. [Электрон. Рес.]: <http://www.r-arcticnet.sr.unh.edu/v4.0/index.html>.
14. Мостахов С. Е. Река Лена. Якутск: Якут. кн. изд-во, 1972.
15. [Электрон. Рес.]: [http://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2\\_1/](http://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2_1/).
16. Surfer8. User's Guide. Contouring and 3D Surface Mapping for Scientists and Engineers. — Golden Software Inc., 2002.
17. Дэвис Дж. С. Статистический анализ данных в геологии. Кн. 2. М.: Недра, 1990.
18. Tan Q., Xu X. Comparative analysis of spatial interpolation methods: An experimental study // Sensors & Transducers Journal. 2014. V. 165, Is. 2. P. 155–163.
19. Минеев А. Л., Кутинов Ю. Г., Чистова З. Б., Полякова Е. В. Подготовка цифровой модели рельефа для исследования экзогенных процессов северных территорий Российской Федерации // Журн. Пространство и Время. 2015. Вып. № 3 (21). С. 278–291.
20. Мировой водный баланс и водные ресурсы Земли. Под ред. Корзун В. И. (пред.) и др. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
21. Oki T., Sud Y. C. Design of total runoff integrating pathways (TRIP) — a global river channel network // Earth Interactions. 1998. V. 2. P. 1–36.
22. Krylova A. I., Lapteva N. A. Reproduction of runoff hydrograph in the Lena River basin with a hydrologically correct digital elevation model // Bull. Nov. Comp. Center. Numerical Modeling in Atmosphere, Ocean, and Environment Studies. N 17. 2019. P. 51–58.
23. Hagemann S., Dumenil Gates L. Validation of the hydrological cycle of ECMWF and NCEP reanalyses using the MPI hydrological discharge model // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. N D2. P. 1503–1510.
24. Магрицкий Д. В. Факторы и закономерности многолетних изменений стока воды, взвешенных наносов и теплоты на нижней Лене и Вилюе // Вестн. Моск. Ун-та. 2015. Сер. 5. География. № 6. С. 85–95.
25. Ye B., Yang D., Kane D. L. Changes in Lena River streamflow hydrology: human impacts versus natural variations // Water Resources Research. 2003. V. 39. N 7, 1200, doi: 10.1029/2003WR001991.2003.
26. Lammers, R. B.; Shiklomanov, A. I.; Vörösmarty, C. J.; Fekete, B. M.; Peterson, B. J. Assessment of contemporary Arctic river runoff based on observational discharge records // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. N D4. P. 3321–3334. doi:10.1029/2000JD900444.
27. Shamseldin A. Y., O'Connor K. M. Non-linear neural network technique for updating of river flow forecasts // Hydrology and Earth System Sciences. 2001. V. 5. N 4. P. 577–597.
28. Nash J. E. and Sutcliffe J. V. River flow forecasting through conceptual models. Part 1. A discussion of principles // J. Hydrol., 1970. V. 10. N 3. P. 282–290.
29. Liang X., Lettenmaier D. P., Wood E. F., Burges S. J. A simple hydrologically based model of land surface water and energy fluxes for GCMs // J. Geophys. Res. 1994. V. 99 (D7). P. 14415–14428.
30. Su F., Adam J. C., Bowling L. C., Lettenmaier D. P. Streamflow simulations of the terrestrial Arctic domain // J. Geophys. Res. 2005. V. 110. N D08112. doi:10.1029/2004JD005518.
31. Гусев Е. М., Насонова О. Н. Моделирование процессов тепловлагообмена суши с атмосферой в локальном масштабе для территорий с многолетней мерзлотой // Почвоведение. 2004. № 9. С. 1077–1092.
32. Гусев Е. М., Насонова О. Н. Моделирование тепло и влагообмена поверхности суши с атмосферой. М.: Наука, 2010.
33. Аполлов Б. А., Калинин Г. П., Комаров В. Д. Курс гидрологических прогнозов. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

**Крылова Алла Ивановна**, т. +7 913-725-94-00; e-mail: [alla@climate.sccc.ru](mailto:alla@climate.sccc.ru) — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования процессов в атмосфере и гидросфере Института вычислительной математики и математиче-

ской геофизики СО РАН (ИВМ и МГ). Крылова А. И. работает в ИВМ и МГ СО РАН после окончания механико-математического факультета НГУ.

Основное направление научной работы А. И. Крыловой связано с численным моделированием гидродинамических процессов в гидросфере и на поверхности континентов, исследованием климатоэкологических проблем речных систем и водосборов суши, созданием и развитием математической модели речной компоненты климатической системы Земли. К основным результатам можно отнести: решение задач по планированию и анализу наблюдений в задачах динамики атмосферы; моделирование атмосферного цикла метана по данным глобального мониторинга; разработку совместной модели „атмосфера-биосфера-почва-океан“ для изучения климата Сибири; разработку совместной гидродинамической системы дельты реки Лены и шельфовой зоны моря Лаптевых.

Результаты исследований опубликованы в более чем 80 печатных работах и доложены на международных конференциях.

**Krylova Alla Ivanovna** – candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher of the Laboratory of Mathematical Modeling of Processes in the Atmosphere and Hydrosphere of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the SB RAS (ICM & MG). Krylova A. I. works at ICMMG SB RAS after graduating from the Faculty of Mechanics and Mathematics of NSU.

The main scientific interests of A. I. Krylova are associated with numerical modeling of hydrodynamic processes in the hydrosphere and on the surface of continents, the study of climatic-ecological problems of river systems and land catchments, the development of a mathematical model of the river component of the Earth's climatic system. The main results include solving



problems of planning and analyzing observations in problems of atmospheric dynamics, modeling the atmospheric methane cycle based on global monitoring data, development of a joint model „atmosphere-biosphere-soil-ocean“ for studying the climate of Siberia, development of a joint hydrodynamic system of the Lena River delta and the shelf zone of the Laptev Sea.

The research results have been published in more than 80 publications and reported at international conferences.



**Лаптева Наталья Александровна**, т. +7-913-954-48-40; e-mail: [lapteva@vector.nsc.ru](mailto:lapteva@vector.nsc.ru) — работает старшим научным сотрудником в ФБУН ГНЦ ВБ „Вектор“ Роспотребнадзора после окончания Новосибирского электротехнического института.

Основное направление работы — математическое моделирование процессов в атмосфере и гидросфере. Лаптева Н. А. имеет большой профессиональный опыт в разработке программного обеспечения. С 1997 года по 2010 год была ответственным исполнителем проектов МНТЦ № 413, 1217, 1924, 2991 и 3684, а также принимала участие в проекте РФФИ 14-05-00730а. Опубликовано 2 монографии, 43 статьи в журналах и трудах конференций, получен 1 патент.

**Lapteva Natalya Aleksandrovna** works as a senior researcher at the FBRI SRC VB „Vector“ after graduating from the Novosibirsk Electrotechnical Institute.

The main scientific interests are mathematical modeling of processes in the atmosphere and hydrosphere. Lapteva N. A. has extensive professional experience in software development. From 1997 to 2010 she was the responsible executor of ISTC projects No. 413, 1217, 1924, 2991 and 3684, and also took part in the RFBR project 14-05-00730a. Published 2 monographs, 43 articles in journals and conference proceedings, received 1 patent.

## **Правила представления и подготовки рукописей для публикации в журнале „ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ“**

### **Общие требования.**

Редакция принимает к рассмотрению статьи в электронном виде (*исходный файл в LATEX* и файл PDF, либо MS Word с приложением оригиналами рисунков в формате тех программ, в которых они были сделаны, отдельными файлами).

Файлы, содержащие текст статьи, иллюстрации и дополнительные материалы, можно пересыпать на электронный адрес редакции: problem-info@sscc.ru.

Принимаются файлы, архивированные архиваторами ZIP/7Z или RAR; применение самораспаковывающихся архивов не допускается.

При повторной отправке материалов, а также при внесении в исходный текст дополнений или исправлений необходимо сообщить об этом в редакцию в тексте электронного письма.

**Текст статьи с формулами, рисунками, таблицами должен быть подготовлен на стандартном листе формата А4 через 1,5 интервала, размер шрифта 12 pt, все поля по 2 см.**

**Статьи, содержащие формулы, следует набирать в редакторе LATEX. В остальных случаях допускается использование программы MSWord, шрифт — TimesNewRoman; автоматическая расстановка переносов в документе должна быть отключена.**

Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия редколлегией Журнала статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки и переработку (и исключительное право на использование переведенного и (или) переработанного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам.

Журнал „Проблемы информатики“ является некоммерческим изданием. Плата с авторов за публикацию статей не взимается.

### **К статье должны быть приложены:**

— разрешение на публикацию от экспертного совета организации, в которой выполнена работа (для авторов из России);

— оригинал рецензии;

портретные фотографии авторов разрешением не менее 300 dpi.

— Блоки информации и на русском, и на английском языках просьба присыпать отдельными файлами:

— Название статьи;

— Инициалы и фамилии авторов;

— Места работы авторов: полное наименование организации, почтовый индекс, город, страна;

— Код(ы) классификации УДК;

— Аннотации, содержащие краткую постановку задачи и описание метода решения: на русском языке объемом не более 1000 знаков, на английском языке расширенную, объемом от 4000 до 8000 знаков, что соответствует требованиям ВАК и Scopus.

— Ключевые слова;

— Списки используемой литературы в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5—2008 (в английской версии необходимо выполнить транслитерацию неанглоязычных элементов списка литературы в соответствии с ГОСТ Р 7.0.34-2014) — составляются по ходу упоминания источников в тексте;

— Краткие биографии (БИО) авторов с указанием ключевых научных достижений (включая учченую степень, ученое звание — при наличии; основные области научных интересов и формулировку основных результатов, место работы, занимаемую должность, контактные данные — почтовый адрес с индексом, адрес электронной почты, контактный телефон).

### **Подготовка статьи.**

1. **Материал** статьи должен быть изложен в следующей последовательности:

1. название статьи на английском языке;
2. инициалы и фамилия автора(ов) на английском языке;
3. место работы автора(ов) (на английском языке): полное наименование организации, индекс, город, страна;
4. англоязычная аннотация;

5. ключевые слова на английском языке;
6. references+транслитерация неанглоязычных элементов списка литературы;
7. название статьи на русском языке;
8. инициалы и фамилии и авторов;
9. место работы авторов: полное наименование организации, почтовый индекс, город, страна;
10. индекс УДК;
11. аннотация на русском языке;
12. ключевые слова (не более 8);
13. текст статьи;
14. список литературы, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ;
15. краткие биографии авторов на английском и русском языках с указанием ключевых научных достижений (ученую степень, ученое звание — при наличии; место работы, занимаемую должность, контактные данные — почтовый адрес с индексом, адрес электронной почты, контактный телефон, основные области научных интересов и формулировка основных результатов).

## **2. Требования к формулам:**

- Нумерация формул сквозная, выносные формулы центрируются, номер выровнен по правому краю.

## **3. Требования к рисункам:**

- Файлы с рисунками присылаются отдельно в формате программ, в которых они были выполнены: в формате MS Excel (для графиков и диаграмм), eps, pdf, png, tiff, bmp или jpg (с максимальным качеством).

- Рисунки с подрисуточными подписями заверстываются в текст статьи.

- Тексты, являющиеся частью рисунка, выполняются шрифтом TimesNewRoman.

- Фотографии должны иметь разрешение не менее 300 dpi.

## **4. Дополнительные требования:**

- В текст статьи необходимо включать ссылки на рисунки и таблицы, а также подрисуточные подписи и заголовки таблиц. Все буквенные обозначения, приведенные на рисунках, необходимо пояснить в основном тексте или в подрисуточных подписях.

- Сокращения слов не допускаются (кроме общепринятых).

- Векторные переменные обозначаются полужирным шрифтом без курсива.

- Таблицы не должны быть громоздкими. Значения физических величин в таблицах, на графиках и в тексте должны указываться в единицах измерения СИ.

- Графики, если их на рисунке несколько, а также отдельные детали на чертежах, узлы и линии на схемах следует обозначать цифрами, набранными курсивом.

- Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые имеются ссылки в тексте, нумерация сквозная.

- Ссылки на источники в тексте заключаются в квадратные скобки.

- Иностранные источники приводятся на языке оригинала. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Все статьи, опубликованные в журнале „Проблемы информатики“, доступны на сайте [https://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=30275](https://elibrary.ru/title_about.asp?id=30275) и на сайте журнала <http://problem-info.sscru> спустя год после опубликования.

Пример оформления статей можно посмотреть на сайте журнала <http://problem-info.sscru>.