

APPLICATION OF THE KOVACIC ALGORITHM TO THE PROBLEM OF ROLLING OF A HEAVY HOMOGENEOUS BALL ON A SURFACE OF REVOLUTION

A. S. Kuleshov, D. V. Solomina

Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University
119234, Moscow, Russia

DOI: 10.24411/2073-0667-2021-10002

Problems of description of the motion of bodies that roll on a fixed or moving rigid surface have a long history. They are closely related to the process of formation and development of a large branch of analytical mechanics, namely, dynamics of nonholonomic systems. In works of I. Newton, L. Euler, I. Bernoulli, J. D'Alembert and J. Lagrange, some problems on the rolling of rigid bodies without sliding were studied; these problems are typical in the dynamics of systems with nonholonomic constraints and hence they are considered as classical problems of nonholonomic mechanics.

One of such classical problems is the problem of rolling without sliding of a homogeneous ball on a fixed surface under the action of gravity. For the first time this problem has been studied by E. J. Routh in his classical treatise „The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies“. Routh derived the equations of motion of the ball in semifixed axes and indicated the cases of their integrability. In particular, Routh firstly proved that a homogeneous ball, moving within a vertical cylinder under the action of gravity, does not tending downwards on the average. This physical fact may be observed while playing basketball, when the ball has almost hit the basket, but then rapidly jumps out of it, suddenly lifting upwards. Actually, the majority of the subsequent authors were just stating the results, obtained by Routh, without any essential additions. In particular, this problem has been considered in details by Ju. I. Neimark and N. A. Fufaev in his classical monograph „Dynamics of Nonholonomic Systems“.

Usually, when considering this problem, following the E. J. Routh approach it is convenient to define explicitly the surface, on which the ball's centre of gravity is moving and not the supporting surface along which the ball rolls. The surface, on which the ball's centre of gravity is moving, is equidistant to the surface, over which the ball rolls. From the classical works of E. J. Routh and F. Noether it was known that if the ball rolls on a surface such that its centre of gravity moves along a surface of revolution, then the problem is reduced to solving the second order linear differential equation with respect to the projection of velocity of the ball's centre of gravity onto the tangent to the parallel of the corresponding surface of revolution. However it is impossible to find the general solution of the corresponding second order linear differential equation for the arbitrary surface of revolution in explicit form. Therefore it is interesting to study for which surface of revolution the general solution of the corresponding second order linear differential equation can be expressed explicitly, in particular, in terms of liouvillian functions. Recall that liouvillian functions are functions constructed from rational functions by algebraic operations, taking exponentials, and integration. To solve this problem it is possible to apply the so-called Kovacic algorithm to the corresponding second order linear differential equation. In 1986, the American mathematician J. Kovacic presented a very effective algorithm for finding a general solution of a second order linear differential equation with variable coefficients for the case where this solution can be expressed in terms of liouvillian functions. If a linear differential

equation has no liouvillian solutions, the Kovacic algorithm also allows one to ascertain this fact. The necessary condition for application of the Kovacic algorithm to a second order linear differential equation is that the coefficients of this equation should be rational functions of independent variable. There are no new ideas in the algorithm. It is simply brute-force calculations. The algorithm does require that the partial fraction expansion of the coefficients of the differential equation be known, thus one needs to factor a polynomial in one independent variable over the complex numbers into linear factors. Once the partial fraction expansions are known, only linear algebra is required.

In this paper we apply the Kovacic algorithm to the problem of rolling of a heavy homogeneous ball on a fixed surface such that the centre of gravity of the ball moves along a given surface of revolution. We present our own method to derive the corresponding second order linear differential equation, the integration of which leads to the solution of the problem. In the case when the centre of gravity of the ball moves along the paraboloid of revolution we are presenting the corresponding linear differential equation in explicit form and reduce its coefficients to a form of rational functions. Using the Kovacic algorithm we prove that the general solution of the corresponding second order linear differential equation is expressed in terms of liouvillian functions for all values of parameters of the problem.

Key words: rolling without sliding; homogeneous ball; surface of revolution; Kovacic algorithm; Liouvillian solutions.

References

1. Routh E. J. The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
2. Noether F. Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen. Leipzig: Teubner, 1909.
3. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // J. Symb. Comput. 1986. Vol. 2. Issue 1. P. 3–43.
4. Kaplansky I. An Introduction to Differential Algebra. Paris: Hermann, 1957.
5. Do Carmo M. P. Differential geometry of curves and surfaces. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА КОВАЧИЧА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ОДНОРОДНОГО ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

А. С. Кулешов, Д. В. Соломина

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова,
119234, Москва, Россия

УДК 531.384+517.926.4

DOI: 10.24411/2073-0667-2021-10002

Задача о качении без скольжения однородного шара по неподвижной поверхности под действием силы тяжести является одной из классических задач механики неголономных систем. Обычно при рассмотрении этой задачи, следуя подходу, предложенному в трактате Э. Дж. Рауса [1], принято задавать в явном виде поверхность, по которой движется центр шара, а не опорную поверхность, по которой катится шар. Поверхность, по которой движется центр шара, является эквидистантной к поверхности, по которой движется точка контакта. Еще из работ Э. Дж. Рауса [1] и Ф. Нетера [2] было известно, что если при качении шара по поверхности под действием силы тяжести его центр движется по поверхности вращения, то задача сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты скорости центра шара в проекции на направление касательной к параллели поверхности вращения. В общем случае (для произвольной поверхности вращения) получить решение этого уравнения в явном виде невозможно. Поэтому представляет интерес вопрос, для каких поверхностей вращения соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, выражающееся в явном виде, например, с помощью лиувиллевых функций. Лиувиллевы функции — это функции, которые строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [3, 4]. Необходимые и достаточные условия существования решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, выражающегося через лиувиллевы функции, дает так называемый алгоритм Ковачича [4]. В данной работе мы приводим наш собственный способ получения линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится задача о качении тяжелого шара по неподвижной поверхности, такой что центр шара при качении движется по заданной поверхности вращения. Затем при помощи замены независимой переменной мы приводим коэффициенты этого уравнения к виду рациональных функций. Применяя затем к полученному линейному дифференциальному уравнению второго порядка алгоритм Ковачича, мы показываем, что для случая, когда центр шара принадлежит параболоиду вращения, общее решение данного уравнения выражается через лиувиллевы функции.

Ключевые слова: качение без проскальзывания; однородный шар; поверхность вращения; алгоритм Ковачича; лиувиллевы решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00140 и грант № 20-01-00637).

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении однородного шара по произвольной абсолютно шероховатой поверхности под действием сил, результирующая которых проходит через центр шара [1]. Пусть G — центр тяжести шара, а подвижными осями GC , GA , GB будут соответственно нормали к опорной поверхности и две перпендикулярные прямые, лежащие в касательной плоскости, построенной в точке соприкосновения шара с поверхностью. Направления прямых GA и GB определим позднее. Обозначим через \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 единичные базисные векторы осей GA , GB и GC соответственно. Пусть $\boldsymbol{\Omega} = \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2 + \theta_3\mathbf{e}_3$ — угловая скорость выбранной подвижной системы координат; $\mathbf{v}_G = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$ — вектор скорости точки G (причем очевидно, что $w = 0$, поскольку шар не отрывается от опорной поверхности во все время движения); $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ — угловая скорость вращения шара в проекции на оси рассматриваемой системы координат. Обозначим через $\mathbf{R} = F\mathbf{e}_1 + F'\mathbf{e}_2 + R\mathbf{e}_3$ силу реакции, действующей на шар со стороны опорной поверхности. Через $\mathbf{P} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + P\mathbf{e}_3$ обозначим результирующую силу, приложенную к центру масс шара. Пусть m — масса шара, a — его радиус, J — момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр тяжести (совпадающий с геометрическим центром шара). Предполагая, что шар катится по выпуклой стороне неподвижной поверхности, и что положительное направление оси GC направлено наружу в сторону выпуклости, запишем уравнения движения шара в векторном виде:

$$m\dot{\mathbf{v}}_G + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_G] = \mathbf{P} + \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\omega}] = [\overrightarrow{GK} \times \mathbf{R}]. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) выражают, соответственно, законы изменения импульса и кинетического момента шара относительно выбранной подвижной системы координат. Здесь $\overrightarrow{GK} = -a\mathbf{e}_3$ — радиус-вектор из центра масс G шара в точку касания с опорной поверхностью. Поскольку скорость точки шара, находящейся в соприкосновении с опорной поверхностью, в каждый момент времени равна нулю, то имеем:

$$\mathbf{v}_G + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GK}] = 0. \quad (3)$$

В скалярной форме уравнения (1)–(3) записываются следующим образом:

$$m\dot{u} - m\theta_3v = X + F, \quad m\dot{v} + m\theta_3u = Y + F', \quad m\theta_1v - m\theta_2u = P + R; \quad (4)$$

$$J\dot{\omega}_1 + J\theta_2\omega_3 - J\theta_3\omega_2 = F'a, \quad J\dot{\omega}_2 + J\theta_3\omega_1 - J\theta_1\omega_3 = -Fa, \quad \dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0; \quad (5)$$

$$u - a\omega_2 = 0, \quad v + a\omega_1 = 0. \quad (6)$$

Исключая F , F' , ω_1 , ω_2 из уравнений (4)–(6), получаем:

$$\dot{u} - \theta_3v = \frac{a^2X}{J + ma^2} + \frac{Ja\theta_1\omega_3}{J + ma^2}, \quad \dot{v} + \theta_3u = \frac{a^2Y}{J + ma^2} + \frac{Ja\theta_2\omega_3}{J + ma^2}. \quad (7)$$

Уравнения (7) можно рассматривать как уравнения такого движения центра масс шара, которое получается в предположении, что центр масс G движется по гладкой поверхности, в точке G приложены дополнительные силы

$$\frac{Ja\theta_1\omega_3}{J+ma^2} \quad \text{и} \quad \frac{Ja\theta_2\omega_3}{J+ma^2}$$

по осям GA и GB , а ранее приложенные силы уменьшены в отношении

$$\frac{a^2}{J+ma^2}.$$

Центр тяжести шара G движется по поверхности, полученной из данной поверхности смещением по нормали на расстояние, равное радиусу шара. Пусть оси GA и GB направлены по касательным к линиям кривизны этой поверхности. Найдем выражение для угловой скорости Ω выбранной подвижной системы координат GA, GB, GC в зависимости от компонент u и v скорости центра масс G шара. Будем считать, что поверхность, по которой движется центр шара, задается относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2), \quad (8)$$

где q_1 и q_2 — гауссовы координаты на поверхности. Предположим, что координатная сеть на поверхности (8) составлена из линий кривизны. Направления этих линий в каждой точке указываются ортогональными единичными векторами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}. \quad (9)$$

Здесь через h_1, h_2 обозначены параметры Ламе

$$h_i(q_1, q_2) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|, \quad i = 1, 2.$$

Вектор $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]$ является вектором нормали к поверхности (8) в точке (q_1, q_2) . С другой стороны, скорость центра масс \mathbf{v}_G шара может быть определена по формуле:

$$\mathbf{v}_G = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2.$$

Отсюда следует, что компоненты скорости u и v связаны с координатами q_1, q_2 и их производными формулами:

$$u = h_1 \dot{q}_1, \quad v = h_2 \dot{q}_2. \quad (10)$$

Обозначая через $k_i(q_1, q_2)$, $i = 1, 2$ главные кривизны поверхности (8), имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_1} = -h_1 k_1 \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \mathbf{e}_2. \quad (11)$$

Формулы (11) являются следствием известной в дифференциальной геометрии теоремы (формулы) Родрига [5], в которой дополнительно нужно учесть, что выбранная нами координатная сеть на поверхности (8) является ортогональной и составленной из линий кривизны. С помощью формул (9) и (11) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + h_1 k_1 \mathbf{e}_3, & \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_2, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_1, & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + h_2 k_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Угловая скорость системы координат GA, GB, GC находится по стандартной формуле:

$$\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_1 + (\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 + (\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3,$$

где обозначено

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Принимая во внимание формулы (11)–(12), для угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ получим следующее выражение:

$$\boldsymbol{\Omega} = h_2 k_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_1 - h_1 k_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\dot{q}_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\dot{q}_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}_3.$$

Учитывая формулы (10), перепишем выражение для угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ в виде:

$$\boldsymbol{\Omega} = k_2 v \mathbf{e}_1 - k_1 u \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u \right) \mathbf{e}_3.$$

Таким образом, для компонент $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ подвижной системы координат GA, GB, GC мы имеем следующие выражения:

$$\theta_1 = k_2 v, \quad \theta_2 = -k_1 u, \quad \theta_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u \right). \quad (13)$$

Теперь предположим, что поверхность, по которой движется центр масс G шара, является поверхностью вращения, заданной относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho(q_1) \cos q_2 \\ \rho(q_1) \sin q_2 \\ \zeta(q_1) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В этом случае параметры Ламе h_1 и h_2 имеют вид:

$$h_1 = h_1(q_1) = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1} \right)^2}, \quad h_2 = h_2(q_1) = \rho(q_1), \quad (15)$$

а главные кривизны k_1 и k_2 поверхности вычисляются по формулам:

$$k_1 = k_1(q_1) = \frac{\left(\frac{d^2 \zeta}{dq_1^2} \frac{d\rho}{dq_1} - \frac{d\zeta}{dq_1} \frac{d^2 \rho}{dq_1^2} \right)}{\left(\left(\frac{d\rho}{dq_1} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2(q_1) = \frac{\frac{d\zeta}{dq_1}}{\rho \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1} \right)^2}}. \quad (16)$$

Линиями кривизны на поверхности вращения являются ее меридианы и параллели. Пусть вертикальная ось Z является осью симметрии рассматриваемой поверхности вращения. Кроме координат q_1 и q_2 , введем углы Эйлера θ, ψ и φ так, что угол, который ось GC составляет с осью Z , равен $\pi/2 - \theta$, а ψ — угол, который плоскость, содержащая оси Z и GC , составляет с некоторой фиксированной вертикальной плоскостью. Будем считать, что компоненты $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ системы координат GA, GB, GC , определяются при помощи стандартных кинематических формул Эйлера

$$\theta_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \theta_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \theta_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},$$

в которых значение угла φ положено равным $-\pi/2$. Поэтому получаем:

$$\theta_1 = -\dot{\psi} \sin \theta, \quad \theta_2 = \dot{\theta}, \quad \theta_3 = \dot{\psi} \cos \theta. \quad (17)$$

С другой стороны, сравнивая полученные формулы с формулами (13), находим

$$-\dot{\psi} \sin \theta = k_2 h_2 \dot{q}_2, \quad \dot{\theta} = -k_1 h_1 \dot{q}_1, \quad \dot{\psi} \cos \theta = \frac{1}{h_1} \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_2. \quad (18)$$

Из второго уравнения системы (18) определяется связь между переменными θ и q_1 . Поэтому можно считать, что поверхность (14) задана в зависимости от θ и q_2 , то есть

$$\rho|_{q_1=q_1(\theta)} = \sigma(\theta), \quad \zeta|_{q_1=q_1(\theta)} = \tau(\theta). \quad (19)$$

Параметры Ламе, вычисляемые согласно (15), определяются теперь формулами:

$$h_1 = h_1(\theta) = \sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2}, \quad h_2 = h_2(\theta) = \sigma(\theta), \quad (20)$$

а главные кривизны $k_1 = k_1(\theta)$ и $k_2 = k_2(\theta)$ поверхности равны

$$k_1 = k_1(\theta) = \frac{\left(\frac{d^2\tau}{d\theta^2} \frac{d\sigma}{d\theta} - \frac{d\tau}{d\theta} \frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\right)}{\left(\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2(\theta) = \frac{\frac{d\tau}{d\theta}}{\sigma \sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2}}. \quad (21)$$

Теперь учтем вторую из формул (18), которую представим в виде $\dot{\theta} = -k_1 u$, и найдем из нее, что

$$u = -\frac{\dot{\theta}}{k_1}. \quad (22)$$

Теперь рассмотрим третью из формул (5) и формулы (6). Из формул (6) следует, что

$$\omega_1 = -\frac{v}{a}, \quad \omega_2 = \frac{u}{a} = -\frac{\dot{\theta}}{ak_1}.$$

Учитывая эти формулы, а также формулы (13) и (18), из третьего уравнения системы (5) получаем:

$$\dot{\omega}_3 = \theta_2 \omega_1 - \theta_1 \omega_2 = \frac{v \dot{\theta}}{ak_1} (k_2 - k_1). \quad (23)$$

Окончательно из формулы (23) получаем уравнение

$$\frac{d\omega_3}{d\theta} = \frac{v}{ak_1} (k_2 - k_1). \quad (24)$$

Теперь предположим, что качение шара происходит под действием силы тяжести. Тогда имеем:

$$Y = 0, \quad \theta_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{dh_2}{d\theta} v$$

и второе из уравнений (7) принимает вид:

$$\frac{dv}{d\theta} - \frac{v}{h_1 h_2 k_1} \frac{dh_2}{d\theta} = \frac{Ja}{J + ma^2} \omega_3. \quad (25)$$

Дифференцируя повторно формулу (25) и принимая во внимание уравнение (24), найдем:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dv}{d\theta} - \frac{v}{h_1 h_2 k_1} \frac{dh_2}{d\theta} \right) = \frac{J}{J + ma^2} \frac{v}{k_1} (k_2 - k_1). \quad (26)$$

Таким образом, задача о качении шара по неподвижной выпуклой поверхности под действием силы тяжести в предположении, что центр тяжести G шара движется по поверхности вращения, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (26) относительно компоненты скорости v центра тяжести шара. Коэффициенты данного уравнения определяются формой поверхности вращения, по которой движется центр тяжести шара. Можно поставить вопрос о том, для каких поверхностей вращения уравнение (26) интегрируется в явном виде, например, его общее решение выражается с помощью лиувиллевых функций. Лиувиллевы функции строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [3, 4]. Для ответа на вопрос о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка обычно используется алгоритм Ковачича [3]. Ниже доказано, что задача о качении тяжелого шара по параболоиду вращения интегрируется в лиувиллевых функциях.

Качение по параболоиду вращения. Пусть абсолютно шероховатая поверхность, по которой катится шар, такова, что геометрическое место центров шара есть параболоид вращения с вертикальной осью, расположенный вершиной вверх. Уравнение параболоида запишем в виде (14):

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Rq_1 \cos q_2 \\ Rq_1 \sin q_2 \\ -\frac{Rq_1^2}{2} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае

$$\rho(q_1) = Rq_1, \quad \zeta(q_1) = -\frac{Rq_1^2}{2}.$$

Здесь R — некоторый параметр, имеющий размерность длины. Параметры Ламе h_1 и h_2 , вычисляемые по формуле (15), имеют вид

$$h_1 = R\sqrt{1 + q_1^2}, \quad h_2 = Rq_1,$$

а главные кривизны k_1 и k_2 поверхности, вычисляемые по формулам (16), равны:

$$k_1 = -\frac{1}{R(1 + q_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = -\frac{1}{R\sqrt{1 + q_1^2}}.$$

Второе из уравнений (18) определяет связь между переменными q_1 и θ :

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{q}_1}{1 + q_1^2},$$

откуда следует, что

$$q_1 = \operatorname{tg} \theta. \quad (27)$$

Учитывая формулу (27), мы можем считать теперь, что выражения для $\rho(q_1)$ и $\zeta(q_1)$ переписываются в виде:

$$\sigma(\theta) = \rho(q_1)|_{q_1=\operatorname{tg} \theta} = R \operatorname{tg} \theta, \quad \tau(\theta) = \zeta(q_1)|_{q_1=\operatorname{tg} \theta} = -\frac{R}{2} \operatorname{tg}^2 \theta.$$

В результате получим следующие выражения для параметров Ламе h_1 и h_2 и главных кривизн k_1 и k_2 :

$$h_1 = \frac{R}{\cos^3 \theta}, \quad h_2 = R \operatorname{tg} \theta, \quad k_1 = -\frac{\cos^3 \theta}{R}, \quad k_2 = -\frac{\cos \theta}{R}.$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (26) может быть представлено в виде:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dv}{d\theta} + \frac{v}{\sin \theta \cos \theta} \right) = \frac{J}{J + ma^2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} v. \quad (28)$$

Таким образом, задача о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности, такой что геометрическое место центров шара является параболоидом вращения, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (28). Сделаем в уравнении (28) замену независимой переменной по формуле $x = \cos^2 \theta$ и введем обозначение

$$\frac{J}{J + ma^2} = n^2 < 1.$$

Тогда уравнение (28) приводится к уравнению с рациональными коэффициентами:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x-1} \frac{dv}{dx} - \frac{(n^2 x^2 + 2(1-n^2)x + n^2 - 1)}{4x^2(x-1)^2} v = 0. \quad (29)$$

Для того чтобы привести дифференциальное уравнение (29) к более простому виду, сделаем замену

$$y = v \sqrt{x-1}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (29) переписется следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{n^2 - 1}{4x^2} y. \quad (30)$$

Уравнение (30) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к данному уравнению алгоритм Ковачича [3]. Применение к уравнению (30) алгоритма Ковачича [3] показывает, что общее решение данного уравнения может быть представлено в виде:

$$y = C_1 x^{\frac{1+n}{2}} + C_2 x^{\frac{1-n}{2}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Таким образом, можно сделать вывод, что общее решение исходного уравнения (28) выражается через лиувиллевы функции.

Заключение. Нами была рассмотрена задача о качении тяжелого однородного шара по выпуклой поверхности, такой что при качении центр тяжести шара принадлежит заданной поверхности вращения. Было показано, что решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (26). Для случая, когда при качении шара его центр тяжести движется по параболоиду вращения, уравнение (26) было записано в явном виде (28) и было установлено, что данное уравнение интегрируется в лиувиллевых функциях.

Аналогичное исследование может быть проведено и для других поверхностей вращения, в частности, для различных поверхностей второго порядка. Исследования подобного рода мы планируем провести в будущем.

Список литературы

1. Routh E. J. The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
2. Noether F. Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen. Leipzig: Teubner, 1909.
3. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // J. Symb. Comput. 1986. Vol. 2. Issue 1. P. 3–43.
4. Kaplansky I. An Introduction to Differential Algebra. Paris: Hermann, 1957.
5. Do Carmo M. P. Differential geometry of curves and surfaces. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.



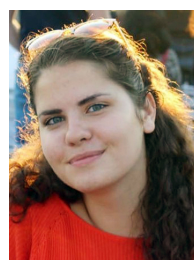
Кулешов Александр Сергеевич — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, тел.: +7 (903) 536-87-22, e-mail:

kuleshov@mech.math.msu.su.

Ведущий специалист в области механики систем с дифференциальными связями и динамики тел, взаимодействующих с твердой поверхностью. Лауреат конкурса на соискание медалей РАН с премиями для молодых ученых России за лучшую научную работу (2006 г.).

Alexander S. Kuleshov — PhD, associate professor at department of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University, e-mail: kuleshov@mech.math.msu.su, phone: +7 (903) 536-87-22.

Leading specialist in the field of mechanics of system with differential constraints and dynamics of a body, being contiguous to a rigid surface.



Соломина Дарья Владимировна — студентка 6-го курса кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, тел.: +7 (495) 939-36-81, e-mail: dasha.solomina@gmail.com.

com.

Область научных интересов: динамика тел, взаимодействующих с твердой поверхностью.

Darya V. Solomina — 6th-year student at department of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University, phone: +7 (495) 939-36-81, e-mail: dasha.solomina@gmail.com.

Research interests: dynamics of a body, being contiguous to a rigid surface.

Дата поступления — 03.02.2021