

# NONLINEAR STATIONARY PROBLEM OF TRANSPORT THEORY IN THE DIFFUSION APPROXIMATION

A. A. Busalov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,  
603022, Nizhny Novgorod, Russia

---

---

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-6-14

One of the most effective mathematical approximations for describing the processes of transfer of X-ray radiation is the multi-group diffusion approximation. The equations of the one-group diffusion approximation are a system of two differential equations for two unknown functions: density and radiation flux.

The article considers a nonlinear problem of the theory of radiation transfer in the diffusion approximation; formulates a linearizing iterative algorithm for solving the nonlinear problem. In addition, the possibility of applicability of the corresponding linearizing iterative algorithm for a nonlinear system of integro-differential equations of radiation transfer and statistical equilibrium for a two-level atom model are investigated. It should be noted that the model of a two-level atom reflects the important meaningful problems. Also it can be considered as an integral part of the study of more complex problems of a multi-level atom. A linearizing iterative solution algorithm is proposed and numerically investigated for solving the arising system of equations. The results of a numerical analysis of the proposed iterative algorithm are presented. They confirm the possibility of its application. The properties of the used difference scheme are discussed.

**Key words:** radiation transfer, diffusion approximation, stationarity equations, nonlinear system of equations of the theory of transfer, iterative methods.

## References

1. Michalas D. Star atmospheres. M.: Mir, 1982.
2. Ivanov V. V. Radiation transfer and spectra of celestial bodies. M.: Science. 1969.
3. Germogenova T. A. Local properties of solutions of the transport equation. M.: Science. Ch. ed. physical -mat. lit., 1986.
4. Vladimirov V. S. Mathematical problems in the one-velocity theory of particle transport. Tr. MIAN SSSR, 61, Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1961.
5. Sushkevich T. A. Mathematical models of radiation transfer. M.: BINOM. Knowledge Laboratory, 2006.
6. Gol'din V. Ya. A quasidiffuse method for solving a kinetic equation. // Zh. Vychisl. mat. and mat. fiz. 1964. V. 4. N 6. P. 1078–1087.
7. Bell D., Glesston S. Theory of nuclear reactors. M.: Atomizdat. 1974.
8. Kalinin A. V., Morozov S. F. On a nonlinear boundary value problem in the theory of radiation transfer // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1990. T. 30, S. 1071–1080.
9. Kalitkin N. N. Numerical methods M.: Nauka, 1978.

10. Frisch, S. E. Optical spectra of atoms / S. E. Frisch. M.; L.: State. publishing house physical-mat. lit. 1963.

11. Elyashevich, M. A. Atomic and Molecular Spectroscopy. M.: State. publishing house physical-mat. lit., 1962.

# НЕЛИНЕЙНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. А. Бусалов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
603022, г. Нижний Новгород, Россия

УДК 519.633.2

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-6-14

Одним из наиболее эффективных математических приближений для описания процессов переноса рентгеновского излучения является многогрупповое диффузионное приближение. Уравнения одногруппового диффузионного приближения представляют собой систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций: плотности и потока излучения.

В работе рассматривается нелинейная задача теории переноса излучения в диффузионном приближении, формулируется линейризирующий итерационный алгоритм решения нелинейной задачи. Кроме того, исследуется возможность применимости соответствующего линейризирующего итерационного алгоритма для нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия для модели двухуровневого атома. Следует отметить, что модель двухуровневого атома отражает важные содержательные задачи, а также может рассматриваться как составная часть исследования более сложных задач многоуровневого атома. Для решения возникающей системы уравнений предлагается и численно исследуется линейризирующий итерационный алгоритм решения. Приводятся результаты численного анализа предлагаемого итерационного алгоритма, подтверждающие возможность его применения. Обсуждаются свойства используемой разностной схемы.

**Ключевые слова:** перенос излучения, диффузионное приближение, уравнения стационарности, нелинейная система уравнений теории переноса, итерационные методы.

**Введение.** Вопросы физического, математического и численного моделирования процессов переноса излучения обсуждаются в работах [1–5]. Более полная информация о возможных приложениях и современных подходах к теоретическому и численному исследованию теории переноса содержится в [5, 6].

Одним из наиболее эффективных математических приближений для описания процессов переноса рентгеновского излучения является многогрупповое диффузионное приближение [1]. Уравнения одногруппового диффузионного приближения представляют собой систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций: плотности и потока излучения [7]. Условием применимости диффузионного приближения является малость градиента плотности излучения [1, 5, 7] на расстоянии пробега излучения  $l$ . Отметим, что вблизи границы диффузионное приближение может приводить к заметным ошибкам, однако в случае оптически толстых (плотных) тел градиенты плотности малы и диффузионное приближение оправдано.

В работе [8] изучалась нелинейная стационарная система, включающая в себя кинетическое уравнение переноса излучения и уравнения статистического равновесия, возника-

ющая при исследовании модели двухуровневого атома в рамках предположения о полном перераспределении излучения по частоте. В этой работе были получены строгие результаты о существовании и единственности решения краевой задачи для рассматриваемой системы, и был предложен и обоснован линеаризующий итерационный алгоритм решения.

В настоящей работе исследуется возможность применимости соответствующего линеаризующего итерационного алгоритма для нелинейной системы интегродифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия для модели двухуровневого атома, в которой перенос излучения описывается диффузионным приближением. Следует отметить, что модель двухуровневого атома [1] отражает важные содержательные задачи, а также может рассматриваться как составная часть исследования более сложных задач многоуровневого атома. Для решения возникающей системы уравнений предлагается и численно исследуется линеаризующий итерационный алгоритм решения. Приводятся результаты численного анализа предлагаемого итерационного алгоритма, подтверждающие возможность его применения. Обсуждаются свойства используемой разностной схемы.

**1. Постановка задачи.** Система уравнений переноса излучения и статистического равновесия записывается в виде [1, 8]:

$$(\omega, \nabla)\varphi(x, \nu, \omega) + h\nu_{12} \frac{\chi(\nu)}{4\pi} [B_{12}C_1(x) - B_{21}C_2(x)]\phi(x, \nu, \omega) = h\nu_{12} \frac{\chi(\nu)}{4\pi} A_{21}C_2(x) \quad (1)$$

$$[C_{12}n_e(x) + B_{12} \int_I \int_{\Omega} \frac{\chi(\nu)}{4\pi} \phi(x, \nu, \omega) d\nu d\omega] C_1(x) =$$

$$[A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21} \int_I \int_{\Omega} \frac{\chi(\nu)}{4\pi} \phi(x, \nu, \omega) d\nu d\omega] C_2(x) \quad (2)$$

$$C_1(x) + C_2(x) = f(x) \quad (3)$$

с граничными условиями  $\phi(x, \nu, \omega) = 0$ ,  $x \in \partial G$ ,  $(\omega, n(x)) < 0$ .

Здесь  $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in G \subset R^3$ ,  $G$  — выпуклое открытое множество с гладкой границей  $\partial G$  и диаметром  $d > 0$ ,  $n(x)$  — единичный вектор нормали к  $\partial G$  в точке  $x \in G$ ,  $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \Omega = \{\omega \in R^3 : \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1\}$ ;  $\nu \in I = [0, \nu_0]$ ;  $h, \nu, \nu_0, A_{21}, B_{12}, B_{21}, C_{12}, C_{21}$  — заданные положительные числа, удовлетворяющие условию  $B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12} \geq 0$ .

Для построения диффузионного приближения в представлении интенсивности излучения  $\phi(x, \nu, \omega)$  в виде ряда по сферическим функциям ограничиваемся двумя членами разложения:

$$\phi(x, \nu, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \sum_{i=-k}^k \phi_{k,i}(x, \nu) Y_{k,i}(\omega)$$

$$\phi(x, \nu, \omega) \approx \frac{1}{4\pi} [\phi_0(x, \nu) + 3\omega\phi_1(x, \nu)], \quad (4)$$

где  $\phi_0(x, \nu) = \int_{\Omega} \phi(x, \nu, \omega) d\omega$ ,  $\phi_1(x, \nu) = \int_{\Omega} \omega\phi(x, \nu, \omega) d\omega$ . Обратим внимание на физический смысл функций  $\phi_0(x, \nu)$  и  $\phi_1(x, \nu)$ . Первая есть плотность потока фотонов, а вторая представляет собой векторный поток фотонов. Для получения уравнений, связывающих функции  $\phi_0$  и  $\phi_1$ , уравнение (1) умножается на сферические функции и интегрируется по всем

направлениям. Из полученных в результате соотношений для  $\phi_0$  и  $\phi_1$  следует уравнение для плотности потока в диффузионном приближении ( $P_1$ -приближении).

$$\operatorname{div}(D(x,\nu)\nabla\phi_0(x,\nu)) + \chi' \phi_0(x,\nu) = F, \quad (5)$$

где  $\chi'(x,\nu) = h\nu_{12}\chi(\nu)\frac{1}{4\pi}[B_{12}C_1(x) - B_{21}C_2(x)]$ ,  $F(x,\nu) = h\nu_{12}\chi(\nu)A_{21}C_2(x)$ ,  $\phi_0(x,\nu) = \int_{\Omega} \phi d\omega$   $D$ –коэффициент диффузии.  $D(\phi_0,x,\nu) = [\frac{3}{4\pi}h\nu_{12}\chi(\nu)[B_{12}C_1(x) - B_{21}C_2(x)]]^{-1}$ .

Уравнения статистического равновесия (2), (3) при конструировании диффузионного приближения будут иметь вид:

$$[C_{12}n_e(x) + B_{12} \int_I \chi(\nu)\phi_0(x,\nu)d\nu]C_1(x) = [A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21} \int_I \chi(\nu)\phi_0(x,\nu)d\nu]C_2(x); \quad (6)$$

$$C_1(x) + C_2(x) = f(x)$$

В работе рассматривается один из вариантов возможных граничных условий, соответствующих отсутствию входящего из вне потока излучения [7].

$$(\phi_0(x,\nu) + 2D\frac{\partial\phi_0(x,\nu)}{\partial n}) = 0.$$

**2. Итерационный линеаризующий алгоритм.** Для решения возникающей системы уравнений предлагается и численно исследуется линеаризующий итерационный алгоритм решения. Введем следующие обозначения:

$$k_{12}(\phi_0,x) = C_{12}n_e(x) + B_{12} \int_I \chi(\nu)\phi_0(x,\nu)d\nu,$$

$$k_{21}(\phi_0,x) = A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21} \int_I \chi(\nu)\phi_0(x,\nu)d\nu$$

Тогда имеем:

$$C_1(x) = \frac{k_{21}(\phi_0,x)}{k_{21}(\phi_0,x) + k_{12}(\phi_0,x)} f(x), \quad C_2(x) = \frac{k_{12}(\phi_0,x)}{k_{21}(\phi_0,x) + k_{12}(\phi_0,x)} f(x).$$

Подставляя значения для  $C_1(x)$  и  $C_1(x)$  в уравнение переноса (5), получим следующий итерационный алгоритм (где  $s$ –номер итерации):

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}\left(\frac{k_{21}(\phi_0^s,x) + k_{12}(\phi_0^s,x)}{\frac{3}{4\pi}h\nu_{12}\chi(\nu)(B_{12}k_{12}(\phi_0^s,x) - B_{21}k_{21}(\phi_0^s,x))}\right)f(x)\nabla\phi_0^{s+1}(x,\nu) + \\ & + \left(\frac{1}{4\pi}h\nu_{12}\chi(\nu)\frac{B_{12}k_{12}(\phi_0^s,x) - B_{21}k_{21}(\phi_0^s,x)}{k_{21}(\phi_0^s,x) + k_{12}(\phi_0^s,x)}\right)\phi_0^{s+1}(x,\nu) = \\ & = h\nu_{12}\chi(\nu)\frac{k_{12}(\phi_0^s,x)}{k_{21}(\phi_0^s,x) + k_{12}(\phi_0^s,x)}A_{21}f(x), \end{aligned}$$

или, используя введенные выше обозначения:

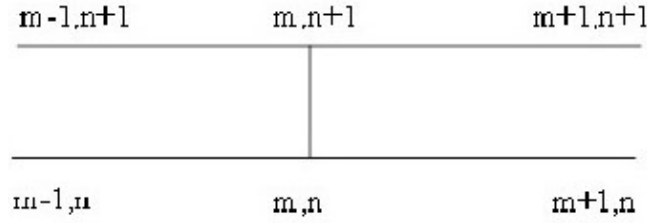


Рис. 1. Шаблон пространственной сетки

$$\operatorname{div}(D(\phi_0^s, x, \nu) \nabla \phi_0^{s+1}(x, \nu)) + \chi(\phi_0^s, x, \nu) \phi_0^{s+1}(x, \nu) = F(\phi_0^s, x, \nu). \quad (7)$$

**3. Численное исследование алгоритма в одномерном случае.** В соответствии с алгоритмом, описанным в предыдущем параграфе, на каждой итерации должна решаться линейная краевая задача третьего рода для эллиптического уравнения в дивергентной форме. В одномерном случае соответствующая задача имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D(\phi_0, x, t) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right) + \chi \phi_0 = f(\phi_0, x, t)$$

в области  $G = [0 \leq x \leq a]$ , удовлетворяющей граничным условиям:

$$(\phi_0(x, \nu) - 2D \frac{\partial \phi_0(x, \nu)}{\partial x})_{x=0} = 0, \quad (\phi_0(x, \nu) + 2D \frac{\partial \phi_0(x, \nu)}{\partial x})_{x=a} = 0. \quad (8)$$

При этом предполагается, что  $D \geq 0$ . Решение этой задачи может быть получено как решение при  $t \rightarrow \infty$  соответствующей начально-краевой задачи для уравнения параболического типа в области  $G = [0 \leq x \leq a] \times [0 \leq t \leq T]$ :

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D(\phi_0, x, t) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right) + \chi \phi_0 = f(\phi_0, x, t), \quad (9)$$

удовлетворяющей условиям:

$$\phi(x, 0) = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(\phi_0(x, \nu) - 2D \frac{\partial \phi_0(x, \nu)}{\partial x})_{x=0} = 0, \quad (\phi_0(x, \nu) + 2D \frac{\partial \phi_0(x, \nu)}{\partial x})_{x=a} = 0$$

Выберем в области  $G$ , где отыскивается решение уравнения (9), равномерную сетку  $D_h$  с шагами  $h$  и  $\tau$  по переменным  $x, t$ . На этой сетке запишем разностную схему для первой краевой задачи, используя шеститочечный шаблон:

$$\frac{1}{\tau} (\phi_m^{n+1} - \phi_m^n) = \frac{1}{h^2} (a_{m+1/2}^n (\phi_{m+1}^{n+1} - \phi_m^{n+1}) - a_{m-1/2}^n (\phi_m^{n+1} - \phi_{m-1}^{n+1})) + f_m^n, \quad 1 \leq m \leq M-1. \quad (10)$$

Здесь  $a^n$  вычисляются с помощью значений  $\phi^n$  следующим образом:

$$a_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}(D(x_m, \phi_m^n, t_n) + D(x_{m+1}, \phi_{m+1}^n, t_n)).$$

Граничные условия аппроксимируются следующим образом:  $(\phi_m^{n+1}(x, \nu) \pm 2a_{m+1/2}^n \frac{\partial \phi_m^{n+1}(x, \nu)}{\partial x})_{m=1, m=M-1} = 0$ , значение  $f_m^{n+1/2} = f(x_m, t^{n+1/2})$ .

Это линейная система с трехдиагональной матрицей. При этом матрица имеет диагональное преобладание. Следовательно, она невырожденная, и решение системы (10) существует и единственно. Оно может быть найдено прогонкой, условия устойчивости которой выполнены.

Выясним порядок аппроксимации схемы (10). Для этого разложим решение в узлах шаблона, выбрав за точку, в которой производится разложение,  $(x_m, t_n + \tau/2)$

$$\begin{aligned} \phi_{m+1}^{n+1} = \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{P!} \left( \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} + h \frac{\partial}{\partial x} \right)^P \phi = \phi + \frac{\tau}{2} \phi_t + h \phi_x + \frac{\tau^2}{8} \phi_{tt} + \frac{\tau h}{2} \phi_{tx} + \frac{h^2}{2} \phi_{xx} + \frac{\tau^3}{48} \phi_{ttt} + \\ \frac{\tau^3 h}{8} \phi_{ttx} + \frac{\tau h^2}{4} \phi_{txx} + \frac{h^3}{6} \phi_{xxx} + \frac{\tau^4}{384} \phi_{tttt} + \frac{\tau^3 h}{48} \phi_{tttx} + \frac{\tau^2 h^2}{16} \phi_{ttxx} + \frac{\tau h^3}{12} \phi_{txxx} + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где все производные отнесены к точке  $(x_m, t_n + \tau/2)$ . Разложение для  $\phi_{m-1}^{n+1}$  получается из (11) заменой  $h \rightarrow -h$  разложение для  $\phi_{m+1}^n$  заменой  $\tau \rightarrow -\tau$  и т. д. Подставляя эти разложения в (10), для компоненты невязки  $\psi_m$  [9], обусловленной погрешностью уравнения (10), получим порядок аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ .

Исследуем устойчивость схемы (10) по начальным данным, используя метод разделения переменных. Полагая в (10)  $f_m^{n+1/2} = 0$  и  $\phi_m^n = \rho_q^n e^{iqx_m}$  для множителя роста  $\rho_q$  найдем, учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (\phi_{m+1}^n - 2\phi_m^n + \phi_{m-1}^n) = \rho_q^n e^{iqx_m} \frac{1}{h^2} (e^{\frac{iqh}{2}} - e^{-\frac{iqh}{2}})^2 = -\rho_q^n \frac{4 \sin^2 \frac{qh}{2}}{h^2} e^{iqx_m} \\ \rho_q = \frac{1}{1 + \frac{4D\tau}{h^2} \sin^2 \frac{qh}{2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\rho_q \leq 1$ . Это неравенство является условием равномерной устойчивости схемы (10) по начальным данным в  $\|\cdot\|_{l_2}$ .

Для коэффициентов  $\{\alpha_{k+m}\}$  схемы (10) при  $\{\phi_m^{n+1}\}$  имеем

$$|\alpha_m| - \sum_{k \neq 0} = \frac{1}{\tau}.$$

Поэтому, в силу [9], схема будет устойчивой и по правой части. Следовательно, выбранная разностная схема будет безусловно устойчивой.

Для проверки работоспособности предложенного итерационного алгоритма решения была посчитана модельная задача распространения излучения в диффузионном приближении. В области  $\Pi = \{0 \leq x \leq 1\}$  решается уравнение переноса с нулевыми граничными условиями. Начальное значение полного количества частиц в системе  $\phi_0 = 0,00001$ .

Коэффициент Эйнштейна для спонтанного испускания  $A_{21} \sim 10^7$ . Энергия при переходе с одного уровня на другой задавалась следующим значением  $h\nu_{12} = 3,2$ .

Значения коэффициентов  $B_{12}, B_{21}, C_{12}, C_{21}$  были взяты из [10, 11]. В качестве результата рассматривался скалярный поток  $\phi_0$  частиц.

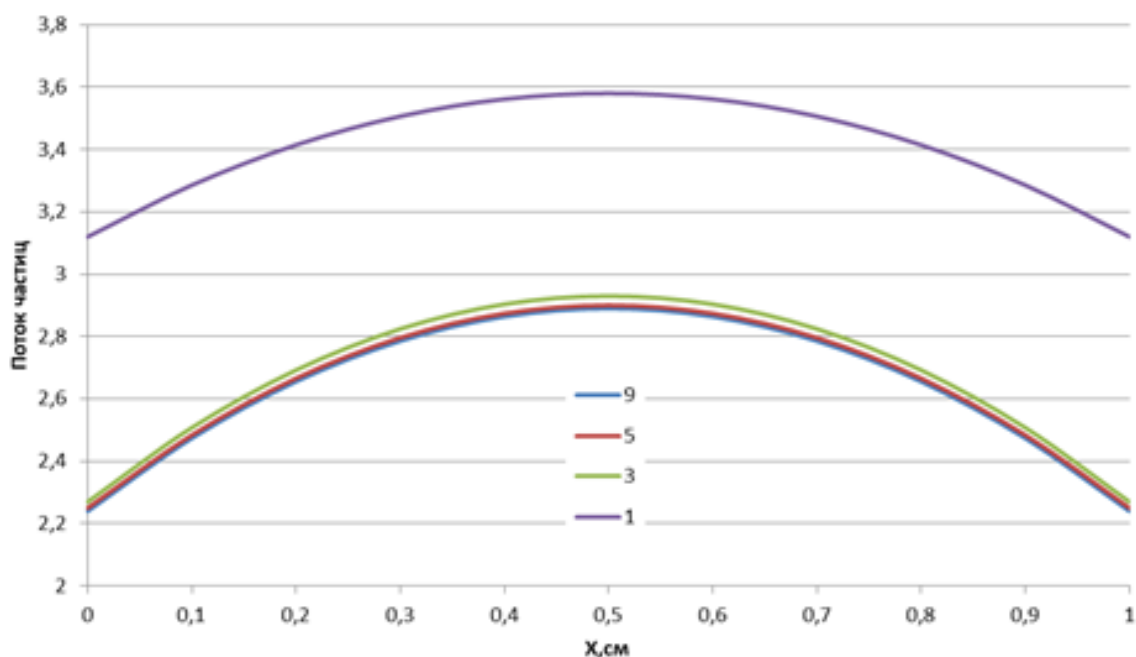


Рис. 2. Шаблон пространственной сетки

Итерационный процесс повторяется до условия достижения заданной точности ( $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-16}$ ) по критерию:  $|\phi_0^{s+1} - \phi_0^s| \leq \varepsilon_0 \phi_0^{s+1} + \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  — заданные константы.

На рис. 2 показаны профили скалярного потока на первой, третьей, пятой и девятой итерациях соответственно.

Как видно из графика, наблюдается сходимость итерационного процесса. Итерационный процесс сошелся за 9 итераций.

**Заключение.** В работе рассмотрена нелинейная стационарная задача для системы уравнений переноса излучения в диффузионном приближении и статистического равновесия, соответствующая модели двухуровневого атома в рамках предположения о полном перераспределении излучения по частоте. Для решения возникающей системы уравнений предложен и численно исследован линеаризующий итерационный алгоритм решения. В работе описывается разностная схема для аппроксимации сеточных уравнений диффузионного типа. Проведенные численные исследования подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов. Автор выражает благодарность за постановку задачи и обсуждение результатов научному руководителю проф. А. В. Калинину.

## Список литературы

1. Михалас Д. Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.
2. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М.: Наука. 1969.
3. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
4. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, Тр. МИАН СССР, 61, Изд-во АН СССР, М., 1961.
5. Сушкевич Т. А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

6. Гольдин В. Я. Квазидиффузный метод решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1078–1087.
7. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат. 1974.
8. Калинин А. В., Морозов С. Ф. Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30, С. 1071–1080.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы М.: Наука, 1978.
10. Фриш, С. Э. Оптические спектры атомов / С. Э. Фриш. М.; Л. Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1963.
11. Ельяшевич М. А. Атомная и молекулярная спектроскопия. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.



**Бусалов Алексей Алексеевич** — e-mail: busalov89@gmail.com. Закончил кафедру прикладной математики НИ-ЯУ МИФИ. Аспирант первого курса аспирантуры ННГУ. Специальность в аспирантуре

— дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Научные интересы включают численное моделирование задач механики сплошной среды и тепломассопереноса, а также разработку и создание параллельных алгоритмов для вышеупомянутых задач.

**Busalov Alexey Alekseevich** — Graduated from the Department of Applied Mathematics, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute). First year postgraduate student of the UNN. (National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod). Specialty in graduate school is differential equations, dynamical systems and optimal control. Research interests include numerical modeling of problems in continuum mechanics and heat and mass transfer as well as the development and creation of parallel algorithms for the above tasks.

*Дата поступления — 06.03.2021*