

OPTIMAL ROTOR STABILIZATION IN AN ELECTROMAGNETIC SUSPENSION SYSTEM USING TAKAGI-SUGENO FUZZY MODELS

A. V. Mukhin

Lobachevsky State University,
603950, Nizhny Novgorod, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-26-37

An electromagnetic suspension is a rotor located in the field of gravity and the magnetic attraction force acting on the side of the electromagnet. When the two forces are equal, the rotor is stationary. The operation principle of an electromagnetic suspension is based on the phenomenon of magnetic levitation, which is applied in active magnetic bearings. Thanks to this, it becomes possible to overcome gravity without contact and to provide the rotor hanging in active magnetic bearings. The obvious advantage of such systems is, first of all, the absence of mechanical contact and, as a consequence, the absence of friction. This advantage allows significantly increase the service life and efficiency compared to traditional mechanical counterparts.

The magnetic forces acting on the electromagnet are controlled by a control system that ensures a stable equilibrium position of the rotor. It is necessary to note that an electromagnetic suspension is inherently unstable system and it is describes nonlinear differential equations which present additional difficulties for the control low realizing. The standard scheme of the electromagnetic suspension assumes the presence of a sensor of the position of the suspended body as the main element for forming feedback in the control loop. Also there is another scheme that involves measuring only the current in the circuit of the electromagnet without measuring the position of the body and its speed. The advantages of such a scheme are the compactness and reliability of the design, as well as the lower cost compared to the traditional scheme.

The control of the rotor in an electromagnetic suspension is an important and actual task associated with the wide practical application of electromagnetic bearings. The practical application of electromagnetic bearings covers a wide range of different areas of industry and technology, as well as some areas of medicine. For the construction of regulators, the most widely used approach is based on the use of linearized models. Despite its simplicity and convenience, the obvious disadvantage of linearized models is their limited applicability. Linearized models correctly describe the dynamics of an object only in the neighborhood of the equilibrium position, with small initial deviations. In fact, the initial perturbations of an object can go far beyond the applicability of linearized models. As a result, the regulators calculated on the basis of linearized systems are only operable for small initial perturbations. One of the ways to take into account the nonlinearities of the object and build corresponding controllers can be the use of fuzzy logic and fuzzy systems based on it.

This paper presents the results of solving the problem of constructing fuzzy output regulators for an electromagnetic suspension system based on the use of Takagi-Sugeno fuzzy models. Two control problems are considered: the construction of stabilizing regulators and the construction of optimal regulators according to a given quadratic quality criterion.

To solve these problems, the original nonlinear mathematical model was transformed to a special form, and then replaced with an equivalent fuzzy model consisting of a set of linear subsystems.

To construct a fuzzy mathematical model of the system, triangular distribution functions were used. Ultimately, the fuzzy model was represented as a weighted sum of all linear subsystems. To synthesize the control laws, we used the apparatus of linear matrix inequalities, extended to the case of fuzzy systems. In this case, for each linear subsystem is consistent with its own system of linear matrix inequalities.

As a result of numerical calculations, fuzzy controllers of both types were obtained, which were then alternately substituted into the original nonlinear object closed by the fuzzy controller. To check the operability of the regulators, mathematical modeling of the rotor dynamics was performed. Transient processes in a closed system are presented as simulation results.

The results of numerical calculations and mathematical modeling showed that using the Takagi-Sugeno fuzzy models, it is possible to construct both a stabilizing regulator and an optimal regulator according to a given quadratic quality criterion for controlling the rotor in an electromagnetic suspension. The found regulators provided stabilization of the rotor in a fairly wide range of initial perturbations, up to the maximum possible values. Based on the results obtained, it can be concluded that the presented approach, based on the use of fuzzy Takagi-Sugeno models, allows to stabilize the rotor in an electromagnetic suspension system in a wide range of initial perturbations.

Key words: electromagnetic suspension, magnetic levitation, rotor, stabilization, fuzzy Takagi-Sugeno models, linear matrix inequalities.

References

1. Zhuravlev Yu.N. Active Magnetic Bearings. Theory, Calculation, Application. SPb.: Politechnica, 2003.
2. Schweitzer G., and Maslen E. Magnetic Bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. Berlin: Springer, 2009.
3. Grinvald V. M., Kusmin G. S., Masloboev Yu. P., Selishchev S. V., Telyshev D. V. First domestic ventricular assistant device AVK-N „Sputnik“ on basis of implantable blood pump // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektronika*. 2015. Vol. 20. N 5. P. 516–521.
4. Masuzawa T., Osa M., Mapley M. Ch. 11: Motor design and impeller suspension // *Mechanical Circulatory and Respiratory Support*. Elsevier, 2017. P. 335–377.
5. Balandin D. V., Biryukov R. S., Kogan M. M., Fedyukov A. A. Optimal stabilization of bodies in electromagnetic suspensions without measurements of their locations // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2017. N 56. P. 351–363.
6. Gruber W., Pichler M., Rothbock M., Amrhein W. Self-Sensing Active Magnetic Bearing Using 2-Level PWM Current Ripple Demodulation // *Proc. 7th Intern. Conf. on Sensing Technology*. Wellington, New Zealand, 2013. P. 591–595.
7. Gluck T., Kemmetmuller W., Tump C., Kugi A. Resistance Estimation Algorithm for Self-Sensing Magnetic Levitation Systems // *Proc. 5th IFAC Symp. on Mechatronic Systems*. Boston, USA, 2010. P. 32–37.
8. Kumar V., Jerome J. LQR Based Optimal Tuning of PID Controller for Trajectory Tracking of Magnetic Levitation System // *Procedia Engineering*. 2013. V. 64. P. 254–264.
9. Yang Yifei, Zhu Huangqiu. Optimal Control and Output Feedback Design Options for Active Magnetic Bearing Spindle Position Regulation // *J. Networks*. 2013. V. 8. P. 1624–1631.
10. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*. 1985. Vol. 15. N 116. P. 116–132.
11. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities. M.: Fizmatlit, 2007.
12. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РОТОРА В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОДВЕСА С ПОМОЩЬЮ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ TAKAGI-SUGENO

А. В. Мухин

Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского,
603950, Нижний Новгород, Россия

УДК 517.977

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-26-37

В статье представлены результаты решения задачи стабилизации ротора в системе электромагнитного подвеса на основе применения нечетких моделей Takagi-Sugeno. Рассмотрены две задачи управления: построение стабилизирующих регуляторов и построение оптимальных регуляторов по заданному квадратичному критерию качества.

Для решения поставленных задач исходная нелинейная математическая модель преобразовывалась к определенному виду, а затем заменялась эквивалентной нечеткой моделью, состоящей из совокупности линейных подсистем. Для построения нечеткой математической модели использовались функции распределения треугольного вида. Результирующая нечеткая модель представлялась как взвешенная сумма всех линейных подсистем. Для синтеза законов управления применялся аппарат линейных матричных неравенств, расширенный на случай нечетких систем. В этом случае каждой линейной подсистеме соответствовала своя система линейных матричных неравенств.

В результате проведения численных расчетов были получены нечеткие регуляторы обоих типов, которые затем поочередно подставлялись в исходный нелинейный объект, замкнутый нечетким регулятором. Для проверки работоспособности регуляторов выполнялось математическое моделирование динамики ротора. В качестве результатов моделирования представлены переходные процессы в замкнутой системе.

Результаты численных расчетов и проведенного математического моделирования показали, что с помощью нечетких моделей Takagi-Sugeno можно построить как стабилизирующий регулятор, так и оптимальный регулятор по заданному квадратичному критерию качества для управления ротором в электромагнитном подвесе. Найденные регуляторы обеспечивали стабилизацию ротора в достаточно широком диапазоне начальных возмущений, вплоть до максимально возможных значений. Основываясь на полученных результатах, можно заключить, что представленный подход, основанный на использовании нечетких моделей Takagi-Sugeno, позволяет в широком диапазоне начальных возмущений стабилизировать ротор в системе электромагнитного подвеса.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, магнитная левитация, нелинейный объект, ротор, стабилизация, нечеткие модели Takagi-Sugeno, линейные матричные неравенства.

Введение. Принцип действия электромагнитного подвеса основан на явлении магнитной левитации. Благодаря этому эффекту становится возможным бесконтактно преодолевать гравитацию и обеспечивать вывешивание тела в активных магнитных подшипниках.

Очевидным преимуществом таких систем является, прежде всего, отсутствие механического контакта и как следствие — отсутствие трения. Это преимущество позволяет существенно увеличить срок эксплуатации и КПД по сравнению с традиционными механическими аналогами.

Управление ротором в электромагнитном подвесе является важной и актуальной задачей, связанной с широким практическим применением электромагнитных подшипников. Практическое применение электромагнитных подшипников охватывает целый спектр самых разных областей промышленности и техники, а также некоторых областей медицины [1–4]. Управление реализуется, как правило, путем изменения величины магнитного поля, создаваемого электромагнитом. Для построения регуляторов наибольшее распространение получил подход, основанный на применении линеаризованных моделей [5–9]. При этом система дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитный подвес, представляет собой нелинейный объект. Несмотря на простоту и удобство, очевидным недостатком линеаризованных моделей является их ограниченная применимость. Линеаризованные модели работают только в окрестности положения равновесия, при небольших начальных отклонениях. В действительности, начальные возмущения объекта могут выходить далеко за пределы применимости линеаризованных моделей. Вследствие этого такие модели не могут в полной мере описывать динамику исследуемого объекта, а вычисленные регуляторы работоспособны только при небольших начальных возмущениях. Одним из способов учета нелинейностей и построения нелинейных регуляторов может быть использование нечеткой логики и нечетких систем на ее основе.

В статье представлены результаты решения задачи управления ротором в электромагнитном подвесе на основе применения непрерывных нечетких моделей Takagi-Sugeno [10]. Рассматривались задачи управления по измеряемому выходу в предположении, что измеряемой переменной является вертикальное смещение ротора. В рамках данной задачи применялись два подхода: построение стабилизирующего регулятора и построение оптимального регулятора с заданным квадратичным критерием качества. Для синтеза законов управления использовался аппарат линейных матричных неравенств [11].

Статья включает в себя введение, четыре раздела, заключение и список литературы. В первом разделе представлен вывод нечеткой математической модели. Второй раздел представляет собой постановку задач управления. В третьем разделе представлены системы линейных матричных неравенств, а также процедура для их численной реализации. Четвертый раздел содержит результаты математического моделирования.

1. Нечеткая модель объекта. Ротор в электромагнитном подвесе находится в поле действия двух сил: силы тяжести и силы магнитного притяжения. Согласно второму закону Ньютона, при равенстве этих сил тело будет находиться в неподвижном состоянии. Динамика ротора в подвесе описывается следующей системой уравнений [5]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(1+x_3)^2}{(1-x_1)^2} - 1 \right], \\ \dot{x}_3 &= -\frac{(1+x_3)}{(1-x_1)} x_2 - a(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^{n_x}$ — вектор состояния системы; $u \in R^{n_u}$ — управление; a — постоянная величина ($a = 7,5$).

Безразмерная переменная x_1 соответствует вертикальному перемещению ротора, x_2 соответствует скорости перемещения, а x_3 описывает ток в цепи электромагнита. Для вывода нечеткой модели Takagi-Sugeno необходимо привести объект (1) к следующему виду

$$\dot{x} = F(\sigma)x + B(\sigma)u, \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $F(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}$; $B(\sigma) \in R^{n_x \times n_u}$; $\sigma = \sigma(x) \in R^{n_\sigma}$.

Элементами матриц $F(\sigma)$ и $B(\sigma)$ должны быть непрерывные нелинейные функции $\sigma_i(x)$. Для преобразования объекта (1) к виду (2) введем новую фазовую переменную

$$x_4 = \frac{1 + x_3}{1 - x_1} \quad (3)$$

Продифференцировав выражение (3), получим следующее линейное уравнение

$$\dot{x}_4 = \frac{\dot{x}_3 + x_4 \dot{x}_2}{1 - x_1} = -ax_3 + u. \quad (4)$$

Таким образом, после преобразования система уравнений, описывающих электромагнитный подвес, примет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} [x_4^2 - 1], \\ \dot{x}_3 &= -x_4 x_2 - a(1 - x_1)x_3 + (1 - x_1)u, \\ \dot{x}_4 &= -ax_3 + u, \end{aligned} \quad (5)$$

где $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in R^{n_x^*}$ — состояние системы; $u \in R^{n_u}$ — управление.

Переход от (1) к (5) означает отображение вида $R^{n_x} \mapsto R^{n_x^*}$. Теперь приведем систему (5) к матричному виду (2). Матрицы $F(\sigma)$ и $B(\sigma)$ запишутся как

$$F(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\sigma_1 = \frac{1}{2}(x_4 - \frac{1}{x_4})$; $\sigma_2 = ax_3$; $\sigma_3 = -x_4$; $\sigma_4 = a(x_1 - 1)$; $\sigma_5 = -x_2$; $\sigma_6 = 1 - x_1$.

Зададим подмножество $\Omega = \{a_{i_1} \leq x_i < a_{i_2}, i = \overline{1, n_x^*}\}$, в котором будем рассматривать нелинейный объект (5). Для того чтобы обеспечить непрерывность функции σ_1 , сделаем следующую замену во втором уравнении системы (5):

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} [x_4^2 - 1] = \frac{1}{2} (x_4 - 1)(x_4 + 1) = \frac{1}{2} x_4^* (x_4^* + 2). \quad (7)$$

Опустив звездочку в новой переменной x_4^* , система уравнений примет следующий вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{2}x_4(x_4 + 2), \\
\dot{x}_3 &= -(x_4 + 1)x_2 - a(1 - x_1)x_3 + (1 - x_1)u, \\
\dot{x}_4 &= -ax_3 + u,
\end{aligned} \tag{8}$$

Для каждой функции σ_i определим соответствующие функции принадлежности вида

$$M_{i1,2} = \frac{\pm\sigma_i \mp \sigma_i^{min,max}}{\sigma_i^{max} - \sigma_i^{min}}, \quad i = \overline{1, n_\sigma} \tag{9}$$

Область значений каждой функции принадлежности образует свое нормированное нечеткое множество. Сформируем базу нечетких правил для исследуемого объекта (8)

$$\begin{aligned}
R^i : IF \sigma_1 \text{ is } M_{11} \text{ and } \dots \text{ and } \sigma_{n_\sigma} \text{ is } M_{n_\sigma 1} \\
THEN \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t),
\end{aligned} \tag{10}$$

где R^i — нечеткое правило ($i = \overline{1, r}$), $r = 2^{n_\sigma}$ — количество правил;

Тогда, нечеткая модель нелинейной системы (8) представляется как взвешенная сумма всех линейных подсистем

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma) [A_i x + B_i u] \tag{11}$$

где $h_i(\sigma) = \prod_{j=1}^{n_\sigma} M_{i1,2}^j(\sigma_j)$ — произведение функций принадлежности.

Полученная непрерывная нечеткая модель (11) представляет нелинейный объект (8) на рассматриваемом подмножестве Ω .

Прежде чем переходить к постановке задачи, сделаем одно упрощение. Поскольку наибольшее количество нелинейных функций сосредоточено в третьем уравнении системы (8), то линеаризация этого уравнения позволит существенно сократить количество правил и, тем самым, упростить весь дальнейший теоретический анализ. После линеаризации этого уравнения в окрестности положения равновесия система (8) примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{2}x_4(x_4 + 2), \\
\dot{x}_3 &= -x_2 - ax_3 + u, \\
\dot{x}_4 &= -ax_3 + u.
\end{aligned} \tag{12}$$

Единственная нелинейная функция σ_1 запишется как

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(x_4 + 2). \tag{13}$$

Окончательная нечеткая модель нелинейной системы (12) запишется в следующем виде

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r M_i A_i x + B_u \quad (14)$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим две задачи управления по измеряемому выходу: первая задача — построение стабилизирующего нечеткого регулятора, вторая — нечеткого регулятора с квадратичным критерием качества. В качестве измеряемой переменной будем считать вертикальное перемещение ротора x_1 . Соответствующее матричное уравнение измеряемого выхода

$$y = C_2 x, \quad (15)$$

$y \in R^{n_y}$ — измеряемый выход; $C_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$.

Закон управления линейной системой по измеряемому выходу в форме линейного динамического регулятора имеет следующий вид [11]

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r^i x_r(t) + B_r^i y \\ u(t) &= C_r^i x_r(t) + D_r^i y, \end{aligned} \quad (16)$$

где $x_r \in R^{n_x^*}$ — состояние регулятора.

В случае нечеткой системы исходный объект представляется в виде совокупности линейных подсистем, каждая из которых характеризуется своими матрицами. Запишем нечеткую модель управления в форме нечеткого динамического регулятора для системы (14)

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= \sum_{i=1}^r M_i A_r^i x_r + \sum_{i=1}^r M_i B_r^i y \\ u &= \sum_{i=1}^r M_i C_r^i x_r + \sum_{i=1}^r M_i D_r^i y. \end{aligned} \quad (17)$$

Для второй задачи введем в рассмотрение уравнение целевого выхода $z(t) \in R^{n_z}$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (18)$$

В качестве квадратичного критерия будем рассматривать следующий функционал

$$\|z\|^2 = \int_0^\infty \left(\sum_{i=2}^{n_x^*} x_i(t)^2 + u(t)^2 \right) dt. \quad (19)$$

Задача заключается в вычислении такого нечеткого регулятора вида (17), который будет удовлетворять следующим неравенствам

$$\|z(t)\|^2 < \gamma^2 |x_0|^2, \quad \forall x_0 \neq 0. \quad (20)$$

Приведем уравнение (18) к следующему виду

$$z(t) = (C + DD_r^i C_2) x + DC_r^i x_r = C_c^i x_c. \quad (21)$$

Тогда замкнутая нечеткая система примет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \sum_{i=1}^r M_i A_c^i x_c, \\ z &= \sum_{i=1}^r M_i C_c^i x_c, \end{aligned} \quad (22)$$

где $x_c = (x \ x_r)^T$.

Матрицы замкнутых подсистем определяются следующим образом

$$A_c^i = \begin{pmatrix} A_i + B D_r^i C_2 & B C_r^i \\ B_r^i C_2 & A_r^i \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$C_c^i = [(C + D D_r^i C_2) \quad D C_r^i]. \quad (24)$$

Таким образом, требуется вычислить два нечетких регулятора по измеряемому выходу: регулятор стабилизирующего типа и γ -оптимальный регулятор по критерию (20).

3. Методика вычислений. Для синтеза законов управления использовался аппарат линейных матричных неравенств [11], адаптированный для случая нечетких систем.

Вычисление стабилизирующего нечеткого регулятора. Для того чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы (22) с матрицами (23), необходимо и достаточно найти такую общую матрицу квадратичной функции $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, которая удовлетворяет следующим неравенствам

$$(A_c^i)^T X + X A_c^i < 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (25)$$

Введем матрицу параметров регуляторов Θ_i и представим матрицы замкнутых подсистем в следующем виде

$$A_c^i = A_0^i + B_0 \Theta_i C_0, \quad (26)$$

$$\text{где } A_0^i = \begin{pmatrix} A_i & 0_{n_x^* \times n_x^*} \\ 0_{n_x^* \times n_x^*} & 0_{n_x^* \times n_x^*} \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x^* \times n_x^*} & B \\ I_{n_x} & 0_{n_x^* \times n_u} \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x^* \times n_x^*} & I_{n_x} \\ C_2 & 0_{n_y \times n_x^*} \end{pmatrix};$$

$$\Theta_i = \begin{pmatrix} A_r^i & B_r^i \\ C_r^i & D_r^i \end{pmatrix}.$$

Подставим (26) в (25) и запишем полученные неравенства в виде

$$(A_0^i)^T X + X A_0^i + C_0^T \Theta_i^T B_0^T X + X B_0 \Theta_i C_0 < 0. \quad (27)$$

Далее приведем неравенства (27) к системе линейных матричных неравенств [11] вида

$$\Psi_i + P^T \Theta_i^T Q + Q^T \Theta_i P < 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (28)$$

В [11] показано, что выполнение неравенств (28) для регуляторов полного порядка эквивалентно выполнению следующих линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} W_C^T (A_i^T X_{11} + X_{11} A_i) W_C &< 0, \quad X_{11} = X_{11}^T > 0, \\ W_{B^T}^T (Y_{11} A_i^T + A_i Y_{11}) W_{B^T} &< 0, \quad Y_{11} = Y_{11}^T > 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где W_C и W_{B^T} образуют базисы ядер матриц C и B^T соответственно; X_{11} и Y_{11} — верхние левые блоки двух взаимнообратных матриц X и Y .

Для того чтобы выполнялось условие $XY = I$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} > 0. \quad (30)$$

Таким образом, объект стабилизируем тогда и только тогда, когда существуют две положительно определенные симметрические матрицы X_{11} и Y_{11} , удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (29) и (30). Если матрицы X_{11} и Y_{11} найдены, то общая матрица квадратичной формы X может быть восстановлена по формуле [11].

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11} - Y_{11}^{-1} \\ X_{11} - Y_{11}^{-1} & X_{11} - Y_{11}^{-1} \end{pmatrix} \quad (31)$$

После того, как матрица X найдена, матрицы параметров регуляторов Θ_i вычисляются из неравенств (28) и затем подставляются в нечеткий динамический регулятор (17).

Вычисление нечеткого γ -оптимального регулятора. Как было отмечено выше, задача γ -оптимального нечеткого управления состоит в вычислении такого нечеткого регулятора, который обеспечивает выполнение условия (20) для всех линейных подсистем. Для выполнения этого условия нормы передаточных матриц замкнутого объекта должны удовлетворять условиям

$$\|H_c^i\|_2 < \gamma|x_0| \quad \forall x_0 \neq 0 \quad (32)$$

где $H_c^i = [C + DD_r^i C_2 \quad DC_r^i](sI - A_c^i)^{-1} x_0^0$.

Основная идея вычисления регуляторов такого типа заключается в приведении матриц замкнутых подсистем A_c^i к линейным матричным неравенствам вида (28). Последующие действия аналогичны предыдущему случаю. Сначала вычисляются матрицы Ψ_i , а затем из (28) находятся искомые матрицы регуляторов. Поскольку матрицы Ψ_i содержат общую неизвестную положительно определенную симметрическую блочную матрицу, то необходимо сначала вычислить эту матрицу. Поскольку ранги матриц P и Q меньше ранга матриц Ψ_i , то для системы неравенств (28) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие матричные неравенства

$$W_P^T \Psi_i W_P < 0, \quad W_Q^T \Psi_i W_Q < 0, \quad (33)$$

где W_P и W_Q — ядра матриц P и Q соответственно, т. е. $PW_P = 0$ и $QW_Q = 0$.

Выполнив ряд матричных преобразований, учитывая блочную структуру матриц, неравенства (33) можно привести к следующим неравенствам

$$\begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i^T X_{11} + X_{11} A_i & C^T \\ C & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \quad (34)$$

$$N^T \begin{pmatrix} Y_{11} A_i^T + A_i Y_{11} & Y_{11} C^T \\ C Y_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} N < 0,$$

где столбцы матриц W_{C_2} и N образуют базисы ядер матриц C_2 и $(B^T \ D^T)$ соответственно.

Для существования γ -оптимальных регуляторов полного порядка необходимо и достаточно, чтобы существовали две положительно определенные симметрические матрицы X_{11} и Y_{11} , удовлетворяющие неравенствам (34), а также неравенствам

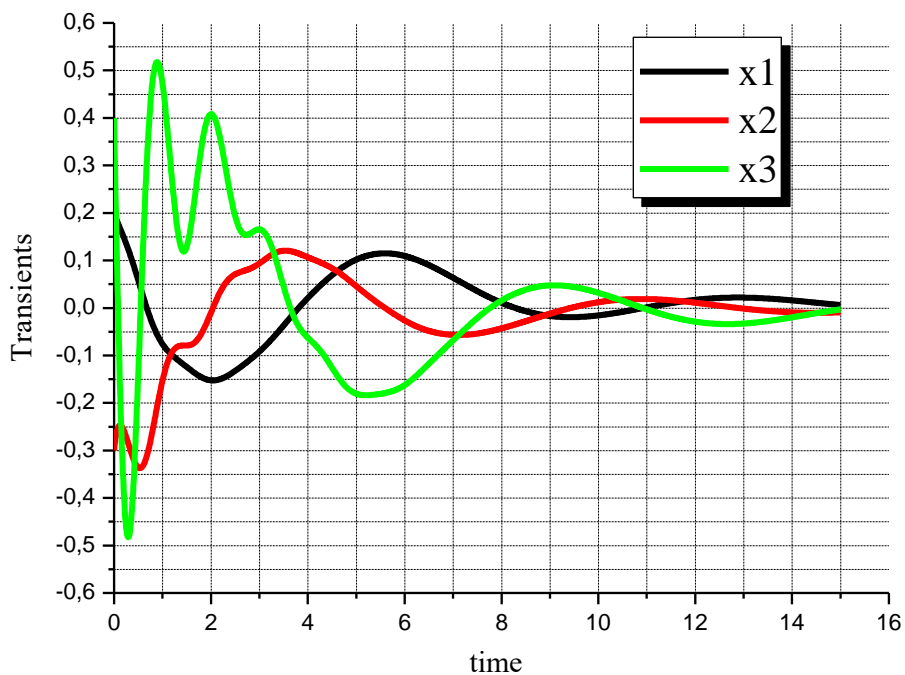


Рис. 1. Переходные процессы в замкнутой системе с нечетким регулятором стабилизирующего типа

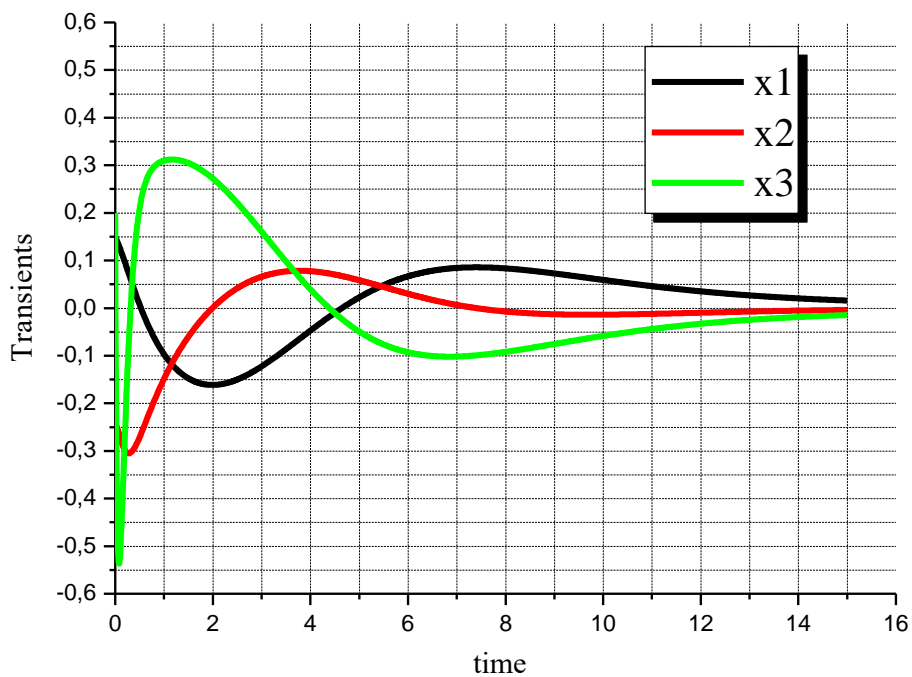


Рис. 2. Переходные процессы в замкнутой системе с нечетким γ -оптимальным регулятором

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \gamma I_{n_x} \end{pmatrix} > 0, \quad (36)$$

где $i = \overline{1, r}$.

Если матрицы X_{11} и Y_{11} найдены, то матрица Y может быть восстановлена по формуле

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \\ Y_{11} - X_{11}^{-1} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Если матрица X найдена, матрицы параметров регуляторов Θ_i вычисляются из неравенств (28) и затем подставляются в нечеткий динамический регулятор (17).

Линейные матричные неравенства и системы неравенств определяют нелинейные, но выпуклые ограничения [11]. Поэтому, для численной реализации могут использоваться методы выпуклой оптимизации. Разрешимость системы неравенств (29) сводится к минимизации параметра t , для которого справедливо линейное матричное неравенство вида $F(x) - tI \leq 0$. Система неравенств (34–36) представляет собой задачу разрешимости линейной функции с ограничениями, заданными системой линейных матричных неравенств. Для численной реализации систем линейных матричных неравенств применялся алгоритм внутренней точки (interior-point method), реализованный в форме стандартных команд пакета программ MATLAB [12].

Графики переходных процессов в системе с нечетким γ -оптимальным регулятором показаны на рис. 2.

4. Результаты. Вычисленные регуляторы поочередно подставлялись в исходный нелинейный объект (1), замкнутый нечетким регулятором (17). Графики переходных процессов в системе с регулятором стабилизирующего типа представлены на рис. 1.

Исходя из сравнительного анализа рис. 1 и 2, можно сделать вывод о том, что γ -оптимальный регулятор обеспечивает стабилизацию с лучшим качеством переходных процессов, чем стабилизирующий нечеткий регулятор. Результаты математического моделирования показали, что вычисленные нечеткие регуляторы обоих типов позволяют стабилизировать ротор в широком диапазоне начальных возмущений, вплоть до максимально возможных значений.

Заключение. В статье представлены результаты решения задачи управления ротором в электромагнитном подвесе по измеряемому выходу. Выведены нечеткая модель объекта, эквивалентная исходной нелинейной модели, а также нечеткая модель управления. Выполнены численные расчеты нечетких регуляторов. Проведено математическое моделирование переходных процессов.

По результатам проведенной работы можно заключить, что, измеряя только перемещение ротора, можно вычислить как стабилизирующий регулятор, так и γ -оптимальный регулятор с квадратичным критерием качества. Найденные нечеткие регуляторы обеспечивали стабилизацию ротора при любых начальных возмущениях, вплоть до максимально возможных значений. Таким образом, представленные нечеткие модели, в отличие от линеаризованных моделей, позволяют в более широком диапазоне начальных возмущений стабилизировать ротор в электромагнитном подвесе.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Д. В. Баландина за консультацию и интерес к работе.

Список литературы

1. Zhuravlev Yu.N. Active magnetic bearings. Theory, calculation, application. SPb.: Politechnica, 2003.

2. Schweitzer G. Magnetic bearings theory, design, and application to rotating machinery. Berlin: Springer, 2009.
3. Grinvald V. M., Kusmin G. S., Masloboev Yu. P., Selishchev S. V., Telyshev D. V. First domestic ventricular assistant device AVK-N „Sputnik“ on basis of implantable blood pump // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektronika*. 2015. Vol. 20. N 5. P. 516–521.
4. Masuzawa T., Osa M., Mapley M. Ch. 11: Motor design and impeller suspension // *Mechanical Circulatory and Respiratory Support*. Elsevier, 2017. P. 335–377.
5. Balandin D. V., Biryukov R. S., Kogan M. M., Fedyukov A. A. Optimal stabilization of bodies in electromagnetic suspensions without measurements of their locations // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2017. N 56. P. 351–363.
6. Gruber W., Pichler M., Rothbock M., Amrhein W. Self-Sensing Active Magnetic Bearing Using 2-Level PWM Current Ripple Demodulation // *Proc. 7th Intern. Conf. on Sensing Technology*. Wellington, New Zealand, 2013. P. 591–595.
7. Gluck T., Kemmetmuller W., Tump C., Kugi A. Resistance Estimation Algorithm for Self-Sensing Magnetic Levitation Systems // *Proc. 5th IFAC Symp. on Mechatronic Systems*. Boston, USA, 2010. P. 32–37.
8. Kumar V., Jerome J. LQR Based Optimal Tuning of PID Controller for Trajectory Tracking of Magnetic Levitation System // *Procedia Engineering*. 2013. V. 64. P. 254–264.
9. Yang Yifei, Zhu Huangqiu. Optimal Control and Output Feedback Design Options for Active Magnetic Bearing Spindle Position Regulation // *J. Networks*. 2013. V. 8. P. 1624–1631.
10. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*. 1985. Vol. 15. N 116. P. 116–132.
11. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities. M.: Fizmatlit, Moscow, 2007.
12. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.



Мухин Алексей Валерьевич — аспирант кафедры дифференциальных уравнений математического и численного

анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского;

e-mail: myhin-aleksey@yandex.ru;

тел. 8-929-047-64-75.

Область научных интересов: математическое моделирование, математическая теория управления, нечеткие системы.

Aleksey Mukhin — postgraduate, department of differential equations, mathematical and numerical analysis Lobachevsky State University;

Area of scientific interests: mathematical modeling, mathematical control system, fuzzy system.

Дата поступления — 06.03.2021