

LAYERED NETWORK MODELS (OVERVIEW)

A. M. Kalney

Technograd Plus Ltd,
630087, Novosibirsk Russia,
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
630090, Novosibirsk, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-3-5-20

Network science is an essential tool for describing and analyzing complex systems in the social, biological, physical, information and engineering sciences. Initially, almost all studies on networks used an abstraction, in which systems are represented by an ordinary graph: the „vertices“ (or „nodes“) of the graph represent some entity or agent, and the connection between a pair of nodes is represented by an „edge“ (or „link“). Loops and multi-edges are usually ignored. Although this approach is rather naive, it has been extremely successful.

With the development of research on complex systems, it became necessary to move towards more complex and realistic models than a simple graph. For example, different heterogeneous properties of edges: they can be directional, have different strengths (i. e., „weights“), and exist only between nodes that belong to different sets (for example, bipartite networks), or be active only at a certain time. Much later, more and more efforts were made to investigate networks with multiple types of connections and the so-called „networks of networks“. Such systems were explored decades ago in disciplines such as sociology and design, but relatively recently serious research has been carried out on multi-level complex networks and generalizations of terminology and tools in this area. One such generalization is the multilayer network model.

In telecommunication networks, problems naturally arise that are solved at several levels of the network. For example, the task of routing in a circuit-switched data network with several logical layers (different technologies) and different interfaces, which can lead to invalid paths. This paper shows a negative example of a graph with edge properties. The tasks of designing a multi-level WLAN structure, a two-level SDH / WDM network were solved, a scheme was developed to protect (restore) a two-level optical network. To assess the distribution of traffic, a two-level model (LCN) was introduced, consisting of physical and logical layers. All of these models are not universal (i. e., they either depend on a specific technology, or are applicable to specific types of networks, or only take into account connections between neighboring layers). However, for modeling multi-level embedded networks of various natures, for more than 30 years several universities in Russia, Kyrgyzstan and Kazakhstan have been using the model of a hyper net and its development. Hyper nets make it possible to adequately describe multi-level networks with an arbitrary number of levels.

The hyper net (or S-hyper net) model consists of a physical layer and a logical layer(s) and is thus an abstraction of computer networks. Probably the largest number of applications of the theory of hyper nets and S-hyper nets are in telecommunications and transport. Nevertheless, the theory of S-hyper nets is applicable to the analysis and synthesis of other systems of network structure. The multilayer network model can be used to represent most types of complex systems (for example, in sociology, epidemiology, biomedicine, etc.) that consist of several networks or include disparate and / or multiple interactions between objects.

Modeling real networks with a more complex model than a graph has long been a necessity. However, questions about the unification of models, and most importantly, terminology began to arise only in the last decade. This article presents two of the most common layered networking models to date. It is shown that the choice of this or that model (even when solving the same problem) is based on the features of the network. For example, the application of the hyper-network model will most likely be appropriate when modeling a multi-layer telecommunication or transport network. A list of the studied literature was also given, as well as the author's works in the table, which showed the model's belonging to one or another class of multi-level networks.

Each of the above models describes only a subset of the set of multi-layer networks. It is possible to develop both existing models and introduce new ones for networks that are not yet integrated into the general theory. Therefore, research in this area will remain relevant and have many applications.

Key words: multilevel networks, multilayer networks, modeling, hyper nets.

References

1. Newman, M. E. J. *Networks: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2010.
2. Wasserman, S., Faust, K. *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
3. Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D.-U. Complex networks: structure and dynamics // *Phys. Repts.* 2006. N 424. P. 175–308.
4. Bollobas, B. *Modern Graph Theory*. Berlin: Springer, 1998.
5. Barabasi, A.-L., Albert, R. Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. N 286. P. 509–512.
6. Clauset, A., Shalizi, C. R., Newman, M. E. J. Power-law distributions in empirical data // *SIAM Rev.* 2009. N 51. P. 661–703.
7. Watts, D. J., Strogatz, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*. 1998. N 393. P. 440–442.
8. Porter, M. A. Small-world network // *Scholarpedia*. 2012. N 7. P. 1739.
9. Porter, M. A., Onnela, J.-P., Mucha, P. J. Communities in networks // *Not. Am. Math. Soc.* 2009. N 56. P. 1082–1097, 1164–1166.
10. Fortunato, S. Community detection in graphs // *Phys. Repts.* 2010. N 486. P. 75–174.
11. Lancichinetti, A., Kivela, M., Saramaki, J., Fortunato, S. Characterizing the community structure of complex networks. *PLOS ONE*. 2010. N 5. P. e11976.
12. Bang-Jensen, J., Gutin, G. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, 2nd edn. Berlin: Springer, 2008.
13. Barrat, A., Barthelemy, M., Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. The architecture of complex weighted networks // *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 2004. N 101. P. 3747–3752.
14. Newman, M. E. J. Analysis of weighted networks // *Phys. Rev. E*, 2004. N 70. P. 056131.
15. Breiger, R. L. The duality of persons and groups // *Social Forces*, 1974. N 53. P. 181–190.
16. Holme, P., Saramaki, J. Temporal networks // *Phys. Repts.*, 2012. N 519. P. 97–125.
17. Holme, P., Saramaki, J. (eds). *Temporal Networks*. Berlin: Springer, 2013.
18. Mikko Kivela, Alex Arenas, Marc Barthelemy, James P. Gleeson, Yamir Moreno, and Mason A. Porter. (2014), Multilayer networks // *Journal of Complex Networks* 2, 2014. N 3. P. 203–271.
19. D'Agostino, G., Scala, A. *Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity*. Berlin: Springer, 2014.
20. Boccaletti, S., Bianconi, G., Criado, R., del Genio, C. I., Gomez-Gardenes, J., Romance, M., Sendina-Nadal, I., Wang, Z., Zanin, M. The structure and dynamics of multilayer networks // *Phys. Repts.*, to appear. 2014.
21. Krackhardt, D. (1987) Cognitive social structures // *Soc. Netw.* 1987. N 9. P. 109–134.

-
22. Padgett, J. F., Ansell, C. K. Robust action and the rise of the medici, 1400–1434 // *Am. J. Soc.* 1993. N 98. P. 1259–1319.
 23. Scott, J. *Social Network Analysis*. New York, NY: SAGE Publications, 2012.
 24. Roethlisberger, F., Dickson, W. *Management and the Worker*. Cambridge: Cambridge University Press, 1939.
 25. Gluckman, M. *The Judicial Process Among the Barotse of Northern Rhodesia*. Manchester: Manchester University Press, 1955.
 26. Verbrugge, L. M. Multiplexity in adult friendships // *Soc. Forces*, 1979. N 57. P. 1286–1309.
 27. Craven, P., Wellman, B. (1973) The network city // *Sociol. Inquiry*. 1973. N 43. P. 57–88.
 28. Pattison, P., Wasserman, S. Logit models and logistic regressions for social networks: II. Multivariate relations // *Br. J. Math. Stat. Psychol.* 1999. N 52. P. 169–193.
 29. Lusher, D., Koskinen, J., Robins, G. *Exponential Random Graph Models for Social Networks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
 30. Krackhardt, D., Carley, K. M. A PCANS model of structure in organization // *International Symposium on Command and Control Research and Technology*, Monterey, CA, 1998. P. 113–119.
 31. Carley, K. M., Hill, V. *Structural change and learning within organizations. Dynamics of Organizational Societies: Models, Theories and Methods* (A. Lomi, ed.). Cambridge, MA: MIT Press/AAAI Press/Live Oak, 2001.
 32. Lorrain, F., White, H. C. Structural equivalence of individuals in social networks // *J. Math. Sociol.* 1971. N 1. P. 49–80.
 33. Boorman, S. A., White, H. C. *Social structure from multiple networks. II. Role structures*. *Am. J. Sociol.* 1976. N 81. P. 1384–1446.
 34. Breiger, R. L., Pattison, P. E. Cumulated social roles: the duality of persons and their algebras // *Soc. Netw.* 1986. N 8. P. 215–256.
 35. Doreian, P., Batagelj, V., Ferligoj, A. *Generalized Blockmodeling*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
 36. White, H. C., Boorman, S. A., Breiger, R. L. *Social structure from multiple networks. I. Blockmodels of roles and positions* // *Am. J. Sociol.* 1976. P. 730–780.
 37. Winship, C., Mandel, M. Roles and positions: a critique and extension of the blockmodeling approach // *Sociol. Method.* 1983–1984. N 14. P. 314–344.
 38. Pattison, P. *Social networks, algebraic models for*. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (R. A. Meyers ed.). New York: Springer, 2009. P. 8291–8306.
 39. Dunlavy, D. M., Kolda, T. G., Kegelmeyer, W. P. *Multilinear algebra for analyzing data with multiple linkages*. *Graph Algorithms in the Language of Linear Algebra* (J. Kepner & J. Gilbert eds). *Fundamentals of Algorithms*. Philadelphia: SIAM, 2011. P. 85–114.
 40. Kolda, T. G., Bader, B. W. *Tensor decompositions and applications*. *SIAM Rev.* 2009. N 51. P. 455–500.
 41. Acar, E., Yener, B. *Unsupervised multiway data analysis: a literature survey* // *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, 2009. N 91. P. 6–20.
 42. Martin, C. D., Porter, M. A. *The extraordinary SVD* // *Am. Math. Monthly*. 2012. N 119. P. 838–851.
 43. Kolda, T., Bader, B.W. *The TOPHITS model for higher-order web link analysis* // *Proceedings of the SIAM Data Mining Conference Workshop on Link Analysis, Counterterrorism and Security*, Bethesda, MD, 2006.
 44. Kolda, T. G., Bader, B. W., Kenny, J. P. *Higher-order web link analysis using multilinear algebra* // *Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Data Mining (ICDM 2005)*, Houston, TX, 2005. P. 242–249.

45. Zhou, D., Orshanskiy, S. A., Zha, H., Giles, C. L. Co-ranking authors and documents in a heterogeneous network // Seventh IEEE International Conference on Data Mining (ICDM 2007), Omaha, NE, 2007. P. 739–744.
46. Cai, D., Shao, Z., He, X., Yan, X., Han, J. Community mining from multi-relational networks // Proceedings of the 9th European Conference on Principles and Practice of Knowledge Discovery in Databases, Porto, Portugal, 2005.
47. Sun, Y., Han, J. Mining heterogeneous information networks: a structural analysis approach // ACM SIGKDD Explor. Newslett. 2013. N 14. P. 20–28.
48. Carley, K. M. Dynamic network analysis. Dynamic Social Network Modeling and Analysis: Workshop Summary and Papers. Committee on Human Factors, National Research Council, 2003. P. 133–145.
49. Chang, S. E., Seligson, H. A., Eguchi, R. T. Estimation of the economic impact of multiple lifeline disruption: memphis light, gas and water division case study. Technical Report NCEER-96-0011, Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER), Buffalo, NY, 1996.
50. Little, R. G. Controlling cascading failure: understanding the vulnerabilities of interconnected infrastructures // J. Urban. Tech. 2002. N 9. P. 109–123.
51. Rosato, V., Issacharoff, L., Tiriticco, F., Meloni, S., Porcellinis, S., Setola, R. Modelling interdependent infrastructures using interacting dynamical models // Int. J. Crit. Infra. 2008. N 4. P. 63–79.
52. Khapugin, S., Rodionov, A. S. Modeling grouped failures in network reliability analysis // B ACM IMCOM 2015 - Proceedings [a44] (ACM IMCOM 2015 - Proceedings). 2015. Association for Computing Machinery, Inc. <https://doi.org/10.1145/2701126.2701218>.
53. Leicht, E. A., D'Souza, R. M. Percolation on interacting networks. arXiv:0907.0894 [condmat. dis-nn]. 2009.
54. Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., Havlin, S. (2010) Catastrophic cascade of failures in interdependent networks // Nature. 2010. N 464. P. 1025–1028.
55. Vespignani, A. The fragility of interdependency // Nature. 2010. N 464. P. 984–985.
56. Dijkstra, F., Andree, B., Koymans, K., van der Hama, J., Grosso, P., de Laat, C. A multi-layer network model based on ITU-T G.805 // Comput. Netw. 2008. N 52. P. 1927–1937.
57. Rotaru, Sandra. Cross-layer design in wireless local area networks (WLANs) issues and possible solutions. 2018. 10.13140/RG.2.2.13913.77924.
58. Koster, A. M. C. A., Orłowski, S., Raack, C., Baier, G., Engel, T., Belotti, P. Branch-and-cut techniques for solving realistic two-layer network design problems // Graphs and Algorithms in Communication Networks. Springer, Heidelberg, 2009. P. 95–118.
59. Chigan, C., Atkinson, G., Nagarajan, R. On the modeling issue of joint cross-layer network protection/restoration // Proceedings of Advanced Simulation Technologies Conference (ASTC '04), 2004. P. 57–62.
60. Kurant, M., Thiran, P. Layered complex networks // Phys. Rev. Lett. 96, 2006. 138701-1–138701-4.
61. Popkov V. K. Matematicheskie modeli svyaznosti. Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2006.
62. Popkov V. K., Sokolova O. D. Application of Hyper net Theory for the Networks Optimization Problems // 17th IMACS World Congress, July 2005, Paper T4-I-42-011.
63. Rodionov A. S., Sokolova O., Yurgenson A., Choo H. On Optimal Placement of the Monitoring Devices on Channels of Communication Network // ICCSA 2009, Part II, LNCS, Vol. 5593. 474487.
64. Rodionov A. S., Choo H., Nechunaeva K. A. Framework for Biologically Inspired Graph Optimization // Proceedings of ICUIMC 2011, Seoul, Republic of Korea, 2011. P. 2.5, 4 pages.
65. Popkov V. K. Primenenie teorii S-gipersetej dlya modelirovaniya sistem setevoy struktury // Problemy informatiki. 2010. N 4.

66. Popkov V. K. *Matematicheskie modeli zhivuchesti setej svyazi*. Novosibirsk: VC SO AN SSSR, 1990.
67. Popkov V. K. *Metody optimizacii struktur zonovyh setej svyazi* / V.K. Popkov, S. B. Kaul', M. I. Nechepurenko. Novosibirsk: VC SO AN SSSR, 1983.
68. Popkov V. K. *Matematicheskie modeli i metody optimizacii gorodskih transportnyh sistem* // *Materialy 2-j Vseros. konf. „Problemy optimizacii i ekonomicheskie prilozheniya”*, Omsk, 29 iyunya 4 iyulya 2009 g. Omsk: B. i., 2009. S. 80–81.
69. Kalney A., Migov D., Rodionov A., Nasibullina T. *Designing of optimal power supply networks for the equipment of multifunctional safety systems* // *Novosibirsk, Russia, The 2019 15th International Asian School-Seminar Optimization Problems of complex systems*.
70. Kal'nej A. M., Rodionov A. S. *Analiz nadezhnosti mnogourovnevnyh setej s nenadezhnymi vershinami* // *Problemy informatiki*. 2020. N 2. S. 5–15. DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10005.
71. Rodionov A., Rodionova O. *Random Hypernets in Reliability Analysis of Multilayer Networks*. In: *Mastorakis N., Bulucea A., Tsekouras G. (eds) Computational Problems in Science and Engineering* // *Lecture Notes in Electrical Engineering*. 2015. V. 343. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-15765-8-17>.
72. Garbuzov, A. S. Rodionov. *Some Problems of Fuzzy Modeling of Telecommunications Networks* // *Proc. of the 9 Int. Conf. on Ubiquitous Information Management and Communication, (IMCOM), Indonesia, Bali, 8–10 Jan. New York : ACM, 2015. P. 12.1–12.5. DOI: 10.1145/2701126.2701216. ISBN: 978-1-4503-3377-1. S. 418–422.*
73. Hammoud, Zaynab, Kramer, Frank. *Multilayer networks: aspects, implementations, and application in biomedicine*. *Big Data Analytics*. 2020. 5. 10.1186/s41044-020-00046-0.
74. Kinsley Amy C., Rossi Gianluigi, Silk Matthew J., VanderWaal Kimberly. *Multilayer and Multiplex Networks: An Introduction to Their Use in Veterinary Epidemiology*. *Frontiers in Veterinary Science*, 2020, P. 596.
75. Sole-Ribalta, Albert & Gomez, Sergio & Arenas, Alex. *Congestion Induced by the Structure of Multiplex Networks* // *Physical Review Letters*. 2016. 116. 10.1103/PhysRevLett.116.108701.
76. Zhang, Shuai & Liang, Man-Gui & Li, Hui-Jia. *Method to enhance traffic capacity for two-layer complex networks* // *Canadian Journal of Physics*. 2014. N 92. P. 1599–1605. 10.1139/cjp-2013-0711.
77. Wu, Jiexin, Pu, Cunlai & Li, Lunbo & Cao, Guo. *Traffic dynamics on multilayer networks* // *Digital Communications and Networks*. 2018. N 6. 10.1016/j.dcan.2018.10.011.

МОДЕЛИ МНОГОУРОВНЕВЫХ СЕТЕЙ (КРАТКИЙ ОБЗОР)

А. М. Кальней

ООО „Техноград плюс“,
630087, Новосибирск, Россия,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.718

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-3-5-20

Ограниченность модели графа при моделировании реальных сетей давно уже стала очевидна. Как следствие, стало появляться огромное количество трудов, учитывающих многоуровневый характер реальных сетей, однако вопросы унификации моделей и терминов стали подниматься лишь в прошлом десятилетии. В данной статье представлен исторический обзор развития моделей многоуровневых сетей. Описаны несколько наиболее развитых моделей на сегодняшний момент, а также логика их построения. Приведена таблица, показывающая примеры применения рассмотренных моделей.

Ключевые слова: многоуровневые сети, многослойные сети, моделирование, гиперсети.

Введение. Наука о сетях (Network science) является важным инструментом для описания и анализа сложных систем в социальных, биологических, физических, информационных и инженерных науках [1–3]. Изначально почти все исследования о сетях использовали абстракцию, в которой системы представлены обычным графом [4]: „узлы“ (или „вершины“) графа представляют некоторую сущность или агента, и связь между парой узлов представляется „ребром“ (или „связью“). Петли и мульти-ребра обычно игнорируются. Хотя этот подход довольно наивен, он был крайне успешен [1, 2, 5–11].

По мере развития исследований сложных систем стало необходимо двигаться к более сложным и реалистичным моделям, чем простой граф. Например, различные неоднородные свойства ребер: они могут быть направленными [1, 2, 12], иметь различную силу (т. е. „веса“) [2, 13, 14], существовать только между узлами, которые принадлежат различным множествам (например двудольные сети) [1, 2, 15] или быть активными только в определенное время [16, 17]. Намного позже стали прилагаться все большие усилия по исследованию сетей с множественными типами связей и так называемые „сети сетей“ [18]. Такие системы были исследованы десятилетия назад в таких дисциплинах как социология и проектирование, но относительно недавно были проведены серьезные исследования многоуровневых сложных сетей и обобщения терминологии и инструментов в этой области [19, 20].

В социальных сетях можно классифицировать ребра в зависимости от характера отношений или действий которые они представляют [2, 21, 22]. Упрощение социальной системы до сети, в которой действующие лица связаны попарно только одним типом отношений является очень грубым приближением реальности. В результате социологи десятилетия назад осознали важность изучения социальных систем путем конструирования множества

социальных сетей, использующих различные связи среди одинаковых множеств индивидов [2, 23]. Например, рассмотрим социолограммы, которые были нарисованы в 1930-е, чтобы представить социальные сети в bank-wiring room [24]. Эти социолограммы отображают отношение между 14 индивидами через 6 различных типов социальных взаимодействий. В социологической литературе сети, в которых каждое ребро классифицируется его типом, называются „мультиплексные сети“ [25, 26] или „многосвязные сети“ [2]. Социальные сети также часто включают несколько типов узлов (например, мужчины и женщины) или иерархические структуры (например, частные лица являются частью организаций), которые изучались, используя „многоуровневые сети“. Определение „сети сетей“ также датируется, по крайней мере, еще в 1973 году [27]. Инструменты, разработанные для исследования многоуровневых социальных сетей, включают модели экспоненциального случайного графа (ERGMs) [28, 29], мета-сети и мета-матрицы [30, 31] и методы выявления социальных ролей с использованием блочного моделирования и реляционных алгебр [32–38].

В сообществах компьютерных наук и вычислительной линейной алгебры методы тензорной декомпозиции [39, 40] и многосторонний анализ данных [41] использовались для изучения различных типов многоуровневых сетей. Эти типы методов основаны на представлении многоуровневых сетей как тензоров смежности „ранга“, большего, чем 2 (например, порядка больше, чем 2), а затем на применении механизмов, разработанных для тензорных разложений. Возможно, наиболее распространенные методы, которые используют этот подход, являются обобщениями сингулярного разложения (SVD) [42], и эти и другие инструменты были крайне успешны во многих приложениях [40]. Например, методы тензорной декомпозиции и многостороннего анализа данных могут использоваться для извлечения сообществ (например наборы узлов, которые плотно соединены друг с другом) [39] или для классифицирования узлов [43, 44] в многоуровневых сетях.

Сетевые системы, которые не могут быть представлены как традиционные графы, также были изучены с точки зрения сбора данных. Например, неоднородные (информационные) сети были разработаны как общая структура чтобы, учесть множество типов узлов и ребер [45–47]. Аналогично, можно использовать мета-матрицы, чтобы провести анализ динамических сетей [48], который включает временную и пространственную информацию, узловые атрибуты и типы и другие типы данных о социальных сетях в той же общей структуре. Мета-матрицы применялись в контексте „организационной теории“ в качестве организации, людей, ресурсов и всех типов взаимосвязанных сущностей [30, 31].

Взаимосвязанные системы рассматривались в технической литературе как источник каскадных отказов [49–52]. По аналогии с понятием „системный риск“ в финансовых системах, увеличение связности, в том числе взаимосвязанности различных систем в инфраструктуре, может привести к увеличению масштабов событий. Позже эти идеи были формализованы взаимодействующими сетями (и взаимозависимыми сетями) [53, 54]. Например, было показано (особенно с использованием процессов просачивания) что взаимосвязанные системы могут реагировать на случайные отказы способом, который отличается от „моноплексных“ (т. е. одноуровневых) сетей. Для некоторых типов процессов каскадного отказа взаимозависимая система может демонстрировать фазовый переход „первого рода“ (т. е. прерывистый) вместо фазовых переходов „второго рода“ (т. е. непрерывных), которые типичны для моноплексных систем [54, 55].

В телекоммуникационных сетях естественным образом возникают задачи, решаемые на нескольких уровнях сети. Например, задача маршрутизации в сети передачи данных

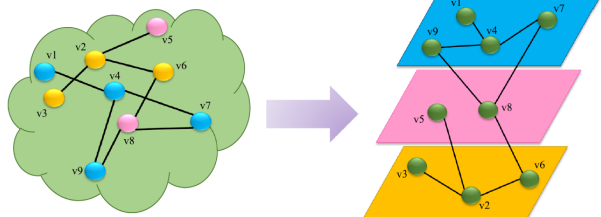


Рис. 1. Раскраска вершин графа. Узлы, имеющие схожие цвета, сгруппированы в одном слое. Ребра те же, что и в исходной сети

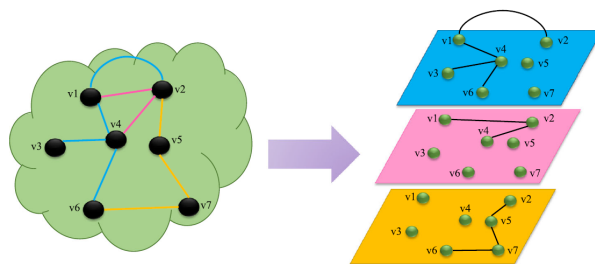


Рис. 2. Раскраска ребер графа. Узлы исходной сети повторяются на различных слоях. Слои представляют различные аспекты отношений в сети. Ребра разделены по слоям на основе их цветов

с коммутацией каналов с наличием нескольких логических слоев (разных технологий) и различных интерфейсов [56], что может приводить к невалидным путям. В данной работе показан негативный пример графа с реберными свойствами. Решались задачи проектирования многоуровневой структуры WLAN [57], двухуровневой SDH/WDM сети [58], разрабатывалась схема для защиты (восстановления) двухуровневой оптической сети [59]. Для оценки распределения трафика вводилась двухуровневая модель (LCN), состоящая из физического и логического уровней [60]. Все эти модели не являются универсальными (т.е. либо зависят от конкретной технологии, либо применимы к конкретным типам сетей, либо учитывают связи только соседних уровней). Однако, для моделирования многоуровневых встроенных сетей различной природы, уже более 30 лет в нескольких университетах России, Киргизии и Казахстана используется модель гиперсети и ее развития [61–72]. Гиперсети позволяют адекватно описывать многоуровневые сети с произвольным количеством уровней.

В последующих двух главах будут кратко описаны несколько наиболее общих моделей, которые описывают два больших класса многоуровневых сетей. После будет приведена таблица с исследованными статьями и их принадлежностью к определенному классу.

1. Многослойная сеть. В данной главе вместо понятия уровень будет применяться близкое по значению понятие слой, как в оригинальной статье [19]. В основе перехода от однослойной сети к сети с большим уровнем слоев используется несколько способов: 1) раскраска вершин графа (см. рис. 1, заимствованный из [73]); 2) раскраска ребер графа (см. рис. 2, заимствованный из [73]).

Как следствие таких рассуждений была создана общая модель, представленная на рис. 3, заимствованном из [19]. Многослойная сеть обладает набором узлов V как обычная сеть (т.е. граф), а также может обладать любым количеством d аспектов, и можно определить последовательность $\mathbf{L} = \{L_a\}_{a=1}^d$ наборов элементарных слоев, таких что есть один набор элементарных слоев L_a для каждого аспекта a .

Имея последовательность наборов элементарных слоев, мы можем сконструировать набор слоев в многослойной сети путем сборки множества всех комбинаций элементарных слоев, используя прямое произведение $L_1 \times \dots \times L_d$. Поскольку узлы могут отсутствовать в некоторых слоях, во-первых вводятся множество $V \times L_1 \times \dots \times L_d$ всех комбинаций и подмножество $V_M \subseteq V \times L_1 \times \dots \times L_d$, которое содержит только те комбинации узлов-слоев, в которых узел присутствует в соответствующем слое. Множество связей между этими узлами обозначим $E_M \subseteq V_M \times V_M$. Таким образом,

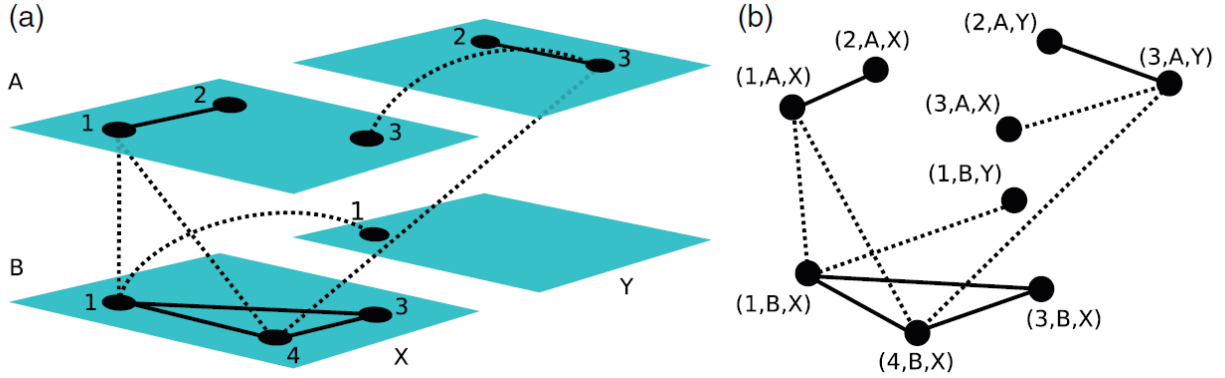


Рис. 3. (а) Пример наиболее общего типа многослойной сети, $M = (V_M, E_M, V, L)$, рассматриваемой в статье [19]. (б) Граф $G_M = (V_M, E_M)$ той же многослойной сети

многослойная сеть определяется $M = (V_M, E_M, V, L)$. Понятия смежности и инцидентности вводятся аналогично сетям с одним слоем. В примере сеть M имеет 4 узла $V = \{1, 2, 3, 4\}$ и два аспекта, которые имеют соответствующие элементарные наборы слоев $L_1 = \{A, B\}$ и $L_2 = \{X, Y\}$. Таким образом, имеем в общем четыре различных слоя: (A, X) , (A, Y) , (B, X) и (B, Y) . Каждый слой содержит некоторый набор узлов множества V ; для этого примера, множествами пар узлов-слоев является $V_M = \{(1, A, X), (2, A, X), (3, A, X), (2, A, Y), (3, A, Y), (1, B, X), (3, B, X), (4, B, X), (1, B, Y)\} \subseteq V \times L_1 \times L_2$. Узлы могут быть соединены друг с другом попарно как в одном слое, так и в разных слоях. Узлы, которые остаются внутри слоя (т.е. внутрислойные ребра), показаны как сплошные линии и ребра, которые пересекают слоя (т.е. межслойные ребра) как пунктирные линии. В графе G_M внутрислойные ребра показываются как сплошные линии и межслойные ребра пунктирными линиями. Матрица смежности графа (или „сверхграфа“) является матрицей сверхсмежности многослойной сети.

2. Гиперсети. Перейдем к описанию гиперсетевых моделей. Двухуровневая или простая гиперсеть $H = (X, V, R; P, F, W)$ состоит из следующих объектов (см. рис. 4, заимствованный из [71]): $X = (x_1, \dots, x_n)$ — набор вершин; $V = (v_1, \dots, v_m)$ — набор ветвей (ребер графа первичной сети); $R = (r_1, \dots, r_g)$ — набор ребер (ребер графа вторичной сети); $P : V \rightarrow X \times X$ — отображение, которое определяет граф $PN = (X, V)$, который называется первичной сетью; $W : R \rightarrow X \times X$ — отображение, которое определяет граф $SN = (X, R)$, который называется вторичной сетью; $F : R \rightarrow 2^V$ — отображение ребер в маршруты PN .

Вводя множественное вложение вторичных сетей в первичную сеть, вложение вторичных сетей друг в друга, а также отображение нескольких вершин вторичной сети в узел первичной, приходим к формальному определению S-гиперсети [65].

Пусть задано множество графов (гиперграфов) $G_0 = (X^0, V), G_1 = (X^1, U^1), \dots, G_k = (X^k, U^k)$ и корневое дерево $T_0 = (Z, R)$, где $Z = z_0, z_1, \dots, z_k, R = r_1, \dots, r_k$ — определяющее вложение графов G_j в G_i ($i < j$) аналогично вложениям, определяемым в гиперсетях, за исключением того, что вершины x_k^i и x_k^j графов G_i и G_j не тождественны, а инциденты. Очевидно, что одной и той же вершине x_k^i могут быть инциденты несколько вершин $X_k^j = \{x_{k_1}^{j_1}, x_{k_2}^{j_2}, \dots, x_{k_l}^{j_l}\}$ из l графов $\{G_{j_s}\}$, $s = 1, \dots, l$. На множестве вершин X_k^j определяется

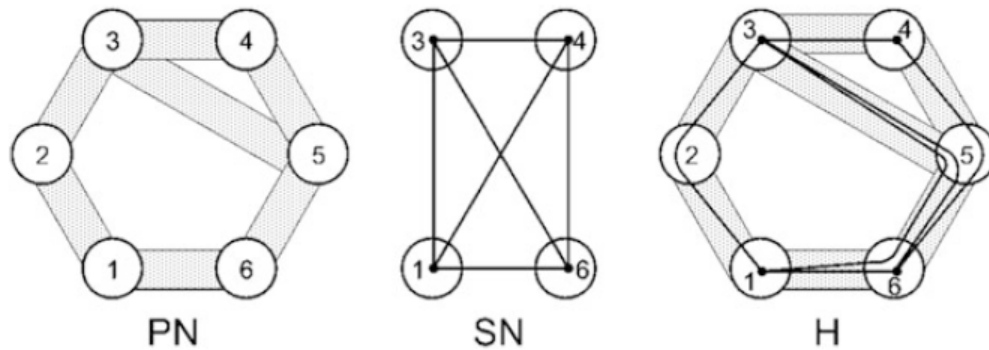


Рис. 4. Иллюстрация к определению гиперсети: PN — это первичная сеть; темные вершины $\{1, 3, 4, 6\}$ из набора вершин относятся к SN ; SN — это вторичная сеть (в нашем случае является полным графом); H — это гиперсеть (SN отображается в PN)

$L^j = (X_k^j, E)$. Вершины $x_{k_j}^{j_i}$ и $x_{k_s}^{j_s}$ смежны в L^j , если соответствующие графы G_{j_i} и G_{j_s} в вершине $x_{k_j}^{j_i}$ имеют некоторую системообразующую связь $l(x^{j_i}, x^{j_s})$. В противном случае эти вершины не связаны. Так же, как и в гиперсетях, ребру $u_i^j \in G_j$ в графе G_i сопоставляется цепь или некоторая связная часть между соответствующими вершинами из G_i . На рис. 5 (заимствованном из [65]) приведен пример такой гиперсети. Системообразующие связи типа $\{l(x, y)\}$ могут иметь различную природу и, как правило, существенно зависят от времени.

Определенную таким образом S-гиперсеть с помощью приведенных в [65] матриц можно задать с точностью до изоморфизма и даже с точностью до нумерации вершин и ребер. В [71] рассмотрены различные варианты гиперсетей с ненадежными, а в [72] — нечеткими элементами.

3. Сравнение. Вышеприведенные модели описывают несколько крупных классов многоуровневых сетей. Модель гиперсети (или S-гиперсети) состоит из физического слоя и логического(-их) слоя(-ев) и тем самым является абстракцией компьютерных сетей. Вероятно, наибольшее число приложений теории гиперсетей и S-гиперсетей приходится на электросвязь и транспорт. Тем не менее, теория S-гиперсетей применима для анализа и синтеза других систем сетевой структуры. Другая же модель может использоваться для представления большинства типов сложных систем (например, в социологии, эпидемиологии, биомедицине и т. д.), которые состоят из нескольких сетей или включают несопоставимые и/или множественные взаимодействия между объектами. Приведем таблицу с изученными статьями, где будет сравниваться принадлежность рассматриваемой в статье модели к тому или иному классу многоуровневых сетей.

В обзоре многослойных сетей [19] резюмируют различные наименования этих сетей в таблице из 26 различных наименований (а также еще большее количество ссылок на статьи, которые можно было бы вписать в таблицу в качестве моделей многослойных сетей) и вводят общее определение многослойных сетей. Также эти наименования классифицируются на основе типов ограничений, которые налагаются на это определение многослойной сети.

В части статей, которые приписываются к классу гиперсетей [56–59] не используется модель гиперсети, однако ее применение вполне возможно. В [60, 75, 76] решаются задачи,

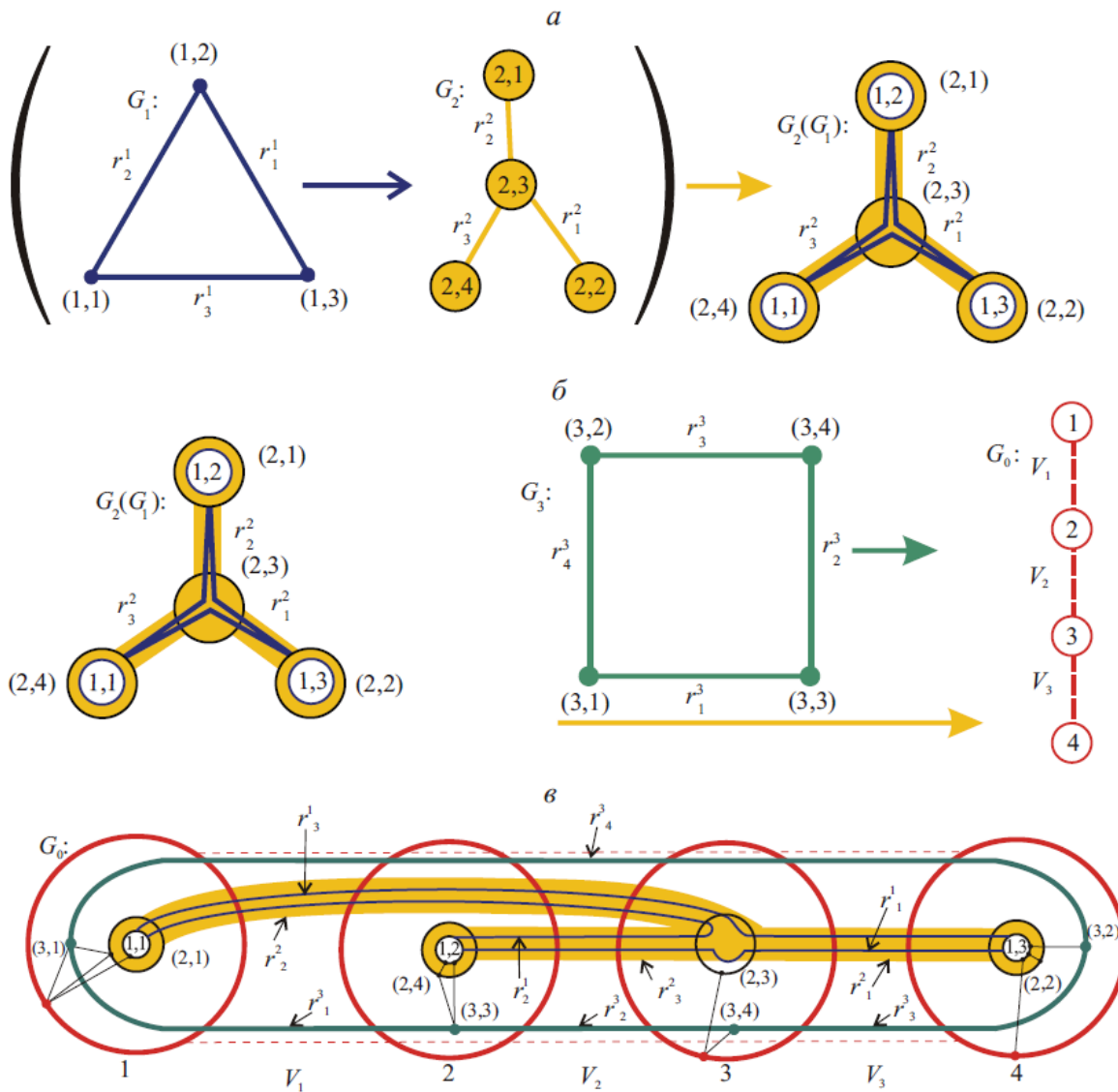


Рис. 5. Гиперсеть и ее составляющие: а — отображение графа вторичной сети G_1 в граф первичной сети G_2 с образованием гиперсети $G_2(G_1)$; б — отображение гиперсети $G_2(G_1)$ и графа G_3 в граф G_0 с образованием S-гиперсети $H = (G_0(G_3, G_2(G_1)))$; в — гиперсеть $H = (G_0(G_3, G_2(G_1)))$, в которой определены внутриузловые связи (графы L_i)

связанные с оценкой, динамикой трафика в сети. Однако из-за особенностей сетей может понадобиться применение той или иной модели [77].

Заключение. Моделирование реальных сетей более сложной моделью, чем граф, давно уже стало необходимостью. Однако вопросы насчет унификации моделей, а самое главное, терминологии начали возникать только в прошлом десятилетии. В данной статье представлены две наиболее общие модели многоуровневых сетей на текущий момент. Показано, что выбор той или иной модели (даже при решении одной и той же задачи) происходит на основе особенностей сети. Например, применение модели гиперсети будет, скорее всего, уместным при моделировании многоуровневой сети электросвязи или транспорта.

Таблица

Принадлежность моделей к рассматриваемым классам многоуровневых сетей

Статья	(S-) Гиперсеть	Многослойная сеть
A multi-layer network model based on ITU-T G.805 [56]	✓	
Cross-layer design in wireless local area networks (WLANs) issues and possible solutions [57]	✓	
Branch-and-cut techniques for solving realistic two-layer network design problems [58]	✓	
On the modeling issue of joint cross-layer network protection/restoration [59]	✓	
Layered complex networks [60]	✓	
Математические модели связности [61]	✓	
Application of Hyperneet Theory for the Networks Optimazation Problems [62]	✓	
On Optimal Placement of the Monitoring Devices on Channels of Communication Network [63]	✓	
Framework for Biologically Inspired Graph Optimization [64]	✓	
Математические модели живучести сетей связи [66]	✓	
Методы оптимизации структур зонových сетей связи [67]	✓	
Математические модели и методы оптимизации городских транспортных систем [68]	✓	
Multilayer and Multiplex Networks: An Introduction to Their Use in Veterinary Epidemiology [74]		✓
Multilayer networks: aspects, implementations, and application in biomedicine [73]		✓
Congestion Induced by the Structure of Multiplex Networks [75]		✓
Method to enhance traffic capacity for two-layer complex networks [76]	✓	
Designing of optmal power supply networks for the equipment of multifunctional safety systems [69]	✓	
Анализ надежности многоуровневых сетей с ненадежными вершинами [70]	✓	
Random Hypernets in Reliability Analysis of Multilayer Networks [71]	✓	
Some Problems of Fuzzy Modeling of Telecommunications Networks [72]	✓	

Приведен список изученной литературы, а также работ автора в таблице, где показывалась принадлежность модели к тому или иному классу многоуровневых сетей.

Каждая приведенная выше модель описывает лишь некоторое подмножество множества многоуровневых сетей. Можно развивать как существующие модели, так и вводить новые для сетей, которые еще не встраиваются в общую теорию. Поэтому исследования в данной области будут оставаться актуальными и иметь множество приложений.

Список литературы

1. Newman, M. E. J. Networks: An Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2010.
2. Wasserman, S., Faust, K. Social Network Analysis: Methods and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
3. Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D.-U. Complex networks: structure and dynamics // Phys. Reps. 2006. N 424. P. 175–308.
4. Bollobas, B. Modern Graph Theory. Berlin: Springer, 1998.

5. Barabasi, A.-L., Albert, R. Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. N 286. P. 509–512.
6. Clauset, A., Shalizi, C. R., Newman, M. E. J. Power-law distributions in empirical data // *SIAM Rev.* 2009. N 51. P. 661–703.
7. Watts, D. J., Strogatz, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*. 1998. N 393. P. 440–442.
8. Porter, M. A. Small-world network // *Scholarpedia*. 2012. N 7. P. 1739.
9. Porter, M. A., Onnela, J.-P., Mucha, P. J. Communities in networks // *Not. Am. Math. Soc.* 2009. N 56. P. 1082–1097, 1164–1166.
10. Fortunato, S. Community detection in graphs // *Phys. Repts.* 2010. N 486. P. 75–174.
11. Lancichinetti, A., Kivela, M., Saramaki, J., Fortunato, S. Characterizing the community structure of complex networks. *PLOS ONE*. 2010. N 5. P. e11976.
12. Bang-Jensen, J., Gutin, G. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, 2nd edn. Berlin: Springer, 2008.
13. Barrat, A., Barthelemy, M., Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. The architecture of complex weighted networks // *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 2004. N 101. P. 3747–3752.
14. Newman, M. E. J. Analysis of weighted networks // *Phys. Rev. E*, 2004. N 70. P. 056131.
15. Breiger, R. L. The duality of persons and groups // *Social Forces*, 1974. N 53. P. 181–190.
16. Holme, P., Saramaki, J. Temporal networks // *Phys. Repts.*, 2012. N 519. P. 97–125.
17. Holme, P., Saramaki, J. (eds). *Temporal Networks*. Berlin: Springer, 2013.
18. Mikko Kivela, Alex Arenas, Marc Barthelemy, James P. Gleeson, Yamir Moreno, and Mason A. Porter. (2014), Multilayer networks // *Journal of Complex Networks* 2, 2014. N 3. P. 203–271.
19. D’Agostino, G., Scala, A. *Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity*. Berlin: Springer, 2014.
20. Boccaletti, S., Bianconi, G., Criado, R., del Genio, C. I., Gomez-Gardenes, J., Romance, M., Sendina-Nadal, I., Wang, Z., Zanin, M. The structure and dynamics of multilayer networks // *Phys. Repts.*, to appear. 2014.
21. Krackhardt, D. (1987) Cognitive social structures // *Soc. Netw.* 1987. N 9. P. 109–134.
22. Padgett, J. F., Ansell, C. K. Robust action and the rise of the medici, 1400–1434 // *Am. J. Soc.* 1993. N 98. P. 1259–1319.
23. Scott, J. *Social Network Analysis*. New York, NY: SAGE Publications, 2012.
24. Roethlisberger, F., Dickson, W. *Management and the Worker*. Cambridge: Cambridge University Press, 1939.
25. Gluckman, M. *The Judicial Process Among the Barotse of Northern Rhodesia*. Manchester: Manchester University Press, 1955.
26. Verbrugge, L. M. Multiplexity in adult friendships // *Soc. Forces*, 1979. N 57. P. 1286–1309.
27. Craven, P., Wellman, B. (1973) The network city // *Sociol. Inquiry*. 1973. N 43. P. 57–88.
28. Pattison, P., Wasserman, S. Logit models and logistic regressions for social networks: II. Multivariate relations // *Br. J. Math. Stat. Psychol.* 1999. N 52. P. 169–193.
29. Lusher, D., Koskinen, J., Robins, G. *Exponential Random Graph Models for Social Networks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
30. Krackhardt, D., Carley, K. M. A PCANS model of structure in organization // *International Symposium on Command and Control Research and Technology*, Monterey, CA, 1998. P. 113–119.
31. Carley, K. M., Hill, V. Structural change and learning within organizations. *Dynamics of Organizational Societies: Models, Theories and Methods* (A. Lomi, ed.). Cambridge, MA: MIT Press/AAAI Press/Live Oak, 2001.
32. Lorrain, F., White, H. C. Structural equivalence of individuals in social networks // *J. Math. Sociol.* 1971. N 1. P. 49–80.

33. Boorman, S. A., White, H. C. Social structure from multiple networks. II. Role structures. *Am. J. Sociol.* 1976. N 81. P. 1384–1446.
34. Breiger, R. L., Pattison, P. E. Cumulated social roles: the duality of persons and their algebras // *Soc. Netw.* 1986. N 8. P. 215–256.
35. Doreian, P., Batagelj, V., Ferligoj, A. *Generalized Blockmodeling*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
36. White, H. C., Boorman, S. A., Breiger, R. L. Social structure from multiple networks. I. Blockmodels of roles and positions // *Am. J. Sociol.* 1976. P. 730–780.
37. Winship, C., Mandel, M. Roles and positions: a critique and extension of the blockmodeling approach // *Sociol. Method.* 1983–1984. N 14. P. 314–344.
38. Pattison, P. Social networks, algebraic models for. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (R. A. Meyers ed.). New York: Springer, 2009. P. 8291–8306.
39. Dunlavy, D. M., Kolda, T. G., Kegelmeyer, W. P. Multilinear algebra for analyzing data with multiple linkages. *Graph Algorithms in the Language of Linear Algebra* (J. Kepner & J. Gilbert eds). *Fundamentals of Algorithms*. Philadelphia: SIAM, 2011. P. 85–114.
40. Kolda, T. G., Bader, B. W. Tensor decompositions and applications. *SIAM Rev.* 2009. N 51. P. 455–500.
41. Acar, E., Yener, B. Unsupervised multiway data analysis: a literature survey // *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, 2009. N 91. P. 6–20.
42. Martin, C. D., Porter, M. A. The extraordinary SVD // *Am. Math. Monthly.* 2012. N 119. P. 838–851.
43. Kolda, T., Bader, B.W. The TOPHITS model for higher-order web link analysis // *Proceedings of the SIAM Data Mining Conference Workshop on Link Analysis, Counterterrorism and Security*, Bethesda, MD, 2006.
44. Kolda, T. G., Bader, B. W., Kenny, J. P. Higher-order web link analysis using multilinear algebra // *Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Data Mining (ICDM 2005)*, Houston, TX, 2005. P. 242–249.
45. Zhou, D., Orshanskiy, S. A., Zha, H., Giles, C. L. Co-ranking authors and documents in a heterogeneous network // *Seventh IEEE International Conference on Data Mining (ICDM 2007)*, Omaha, NE, 2007. P. 739–744.
46. Cai, D., Shao, Z., He, X., Yan, X., Han, J. Community mining from multi-relational networks // *Proceedings of the 9th European Conference on Principles and Practice of Knowledge Discovery in Databases*, Porto, Portugal, 2005.
47. Sun, Y., Han, J. Mining heterogeneous information networks: a structural analysis approach // *ACM SIGKDD Explor. Newslett.* 2013. N 14. P. 20–28.
48. Carley, K. M. Dynamic network analysis. *Dynamic Social Network Modeling and Analysis: Workshop Summary and Papers*. Committee on Human Factors, National Research Council, 2003. P. 133–145.
49. Chang, S. E., Seligson, H. A., Eguchi, R. T. Estimation of the economic impact of multiple lifeline disruption: memphis light, gas and water division case study. Technical Report NCEER-96-0011, Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER), Buffalo, NY, 1996.
50. Little, R. G. Controlling cascading failure: understanding the vulnerabilities of interconnected infrastructures // *J. Urban. Tech.* 2002. N 9. P. 109–123.
51. Rosato, V., Issacharoff, L., Tiriticco, F., Meloni, S., Porcellinis, S., Setola, R. Modelling interdependent infrastructures using interacting dynamical models // *Int. J. Crit. Infra.* 2008. N 4. P. 63–79.
52. Khapugin, S., Rodionov, A. S. Modeling grouped failures in network reliability analysis // *B ACM IMCOM 2015 - Proceedings [a44] (ACM IMCOM 2015 - Proceedings)*. 2015. Association for Computing Machinery, Inc. <https://doi.org/10.1145/2701126.2701218>.

53. Leicht, E. A., D'Souza, R. M. Percolation on interacting networks. arXiv:0907.0894 [condmat. dis-nn]. 2009.
54. Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., Havlin, S. (2010) Catastrophic cascade of failures in interdependent networks // *Nature*. 2010. N 464. P. 1025–1028.
55. Vespignani, A. The fragility of interdependency // *Nature*. 2010. N 464. P. 984–985.
56. Dijkstra, F., Andree, B., Koymans, K., van der Hama, J., Grosso, P., de Laat, C. A multi-layer network model based on ITU-T G.805 // *Comput. Netw.* 2008. N 52. P. 1927–1937.
57. Rotaru, Sandra. Cross-layer design in wireless local area networks (WLANs) issues and possible solutions. 2018. 10.13140/RG.2.2.13913.77924.
58. Koster, A. M. C. A., Orłowski, S., Raack, C., Baier, G., Engel, T., Belotti, P. Branch-and-cut techniques for solving realistic two-layer network design problems // *Graphs and Algorithms in Communication Networks*. Springer, Heidelberg, 2009. P. 95–118.
59. Chigan, C., Atkinson, G., Nagarajan, R. On the modeling issue of joint cross-layer network protection/restoration // *Proceedings of Advanced Simulation Technologies Conference (ASTC '04)*, 2004. P. 57–62.
60. Kurant, M., Thiran, P. Layered complex networks // *Phys. Rev. Lett.* 96, 2006. 138701-1–138701-4.
61. Попков В. К. Математические модели связности. Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН, 2006. 490 с.
62. Попков В. К., Sokolova O. D. Application of Hyper net Theory for the Networks Optimization Problems // 17th IMACS World Congress, July 2005, Paper T4-I-42-011.
63. Rodionov A. S., Sokolova O., Yurgenson A., Choo H. On Optimal Placement of the Monitoring Devices on Channels of Communication Network // *ICCSA 2009, Part II, LNCS, Vol. 5593*. 474487.
64. Rodionov A. S., Choo H., Nechunaeva K. A. Framework for Biologically Inspired Graph Optimization // *Proceedings of ICUIMC 2011, Seoul, Republic of Korea, 2011*. P. 2.5, 4 pages.
65. Попков Владимир Константинович Применение теории S-гиперсетей для моделирования систем сетевой структуры // *Проблемы информатики*. 2010. № 4.
66. Попков В. К. Математические модели живучести сетей связи. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. 233 с.
67. Попков В. К. Методы оптимизации структур зонных сетей связи / В.К. Попков, С. Б. Кауль, М. И. Нечепуренко. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. 182 с.
68. Попков В. К. Математические модели и методы оптимизации городских транспортных систем // *Материалы 2-й Всерос. конф. „Проблемы оптимизации и экономические приложения“*, Омск, 29 июня — 4 июля 2009 г. Омск: Б. и., 2009. С. 80–81.
69. Kalney A., Migov D., Rodionov A., Nasibullina T. Designing of optimal power supply networks for the equipment of multifunctional safety systems // *Novosibirsk, Russia, The 2019 15th International Asian School-Seminar Optimization Problems of complex systems*.
70. Кальней А. М., Родионов А. С. Анализ надежности многоуровневых сетей с ненадежными вершинами // журнал „Проблемы информатики“, 2020, № 2, с.5-15. DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10005
71. Rodionov A., Rodionova O. Random Hypernets in Reliability Analysis of Multilayer Networks. In: Mastorakis N., Bulucea A., Tsekouras G. (eds) *Computational Problems in Science and Engineering // Lecture Notes in Electrical Engineering*. 2015. V. 343. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-15765-8-17>.
72. Garbuzov, A. S. Rodionov. Some Problems of Fuzzy Modeling of Telecommunications Networks // *Proc. of the 9 Int. Conf. on Ubiquitous Information Management and Communication, (IMCOM)*, Indonesia, Bali, 8–10 Jan. New York : ACM, 2015. P. 12.1–12.5. DOI: 10.1145/2701126.2701216. ISBN: 978-1-4503-3377-1. S. 418–422.

73. Hammoud, Zaynab, Kramer, Frank. Multilayer networks: aspects, implementations, and application in biomedicine. *Big Data Analytics*. 2020. 5. 10.1186/s41044-020-00046-0.

74. Kinsley Amy C., Rossi Gianluigi, Silk Matthew J., VanderWaal Kimberly. Multilayer and Multiplex Networks: An Introduction to Their Use in Veterinary Epidemiology. *Frontiers in Veterinary Science*, 2020, P. 596.

75. Sole-Ribalta, Albert \& Gomez, Sergio \& Arenas, Alex. Congestion Induced by the Structure of Multiplex Networks // *Physical Review Letters*. 2016. 116. 10.1103/PhysRevLett.116.108701.

76. Zhang, Shuai \& Liang, Man-Gui \& Li, Hui-Jia. Method to enhance traffic capacity for two-layer complex networks // *Canadian Journal of Physics*. 2014. N 92. P. 1599–1605. 10.1139/cjp-2013-0711.

77. Wu, Jiexin, Pu, Cunlai \& Li, Lunbo \& Cao, Guo. Traffic dynamics on multilayer networks // *Digital Communications and Networks*. 2018. N 6. 10.1016/j.dcan.2018.10.011.



**Кальней Артем Макси-
мович** получил бакалаврскую
и магистерскую степени по на-
правлению „Математика и ком-
пьютерные науки“ в Новоси-
бирском государственном уни-

верситете в 2017 и в 2019 годах. Сейчас специа-
лизируется в Институте вычислительной мате-
матики и математической геофизики СО РАН.

Его основными научными интересами являются
дискретная математика и надежность сетей.

Kalney Artyom Maksimovich received a
bachelor’s and master’s degree in mathematics
and computer science from Novosibirsk State
University in 2017 and 2019. Now specializes
in the Institute of Computational Mathematics
and Mathematical Geophysics SB RAS. His main
research interests are discrete mathematics and
network reliability.

Дата поступления — 05.04.2021