Сибирское отделение
Российской академии наук

ISSN 2073-0667

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ № 2 2021

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И СИСТЕМНАЯ ИНФОРМАТИКА

2
2021

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ № 2 (51) 2021 г.

Журнал выходит ежеквартально, издается с 2008 г.

Учредитель журнала — Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН при поддержке Института информационных и вычислительных технологий МОН РК.

Редакционный совет

Председатель — акад. НАН РК М. Н. Калимолдаев,
Акад. РАН А. Л. Асеев, акад. АН РУ Т. Ф. Бекмуратов (Республика Узбекистан), проф. В. А. Васенин, акад. РАН С. Н. Васильев, проф. В. М. Вишневский, акад. РАН С. С. Гончаров, акад. РАН Ю. Л. Ершов, акад. РАО А. А. Кузнецов, акад. РАН Н. А. Кузнецов, акад. РАН А. П. Кулешов, проф. А. Г. Марчук, проф. Б. Я. Рябко, проф. Н. А. Семенов, акад. РАН И. А. Соколов, проф. А. Н. Сотников, чл.-кор. РАН Ю. А. Флеров, проф. П. С. Чубик.

Редколлегия

Главный редактор — проф. В. Э. Малышкин,
Д. Ж. Ахмед-Заки, А. Г. Вострецов, В. П. Гергель, Б. С. Гольдштейн, В. И. Гужов, Ю. А. Загорулько, С. Д. Каракозов, М. М. Каримов, В. Н. Касьянов, О. В. Кибис, В. В. Корнеев, И. В. Котенко, Т. П. Любимова, А. И. Ляхов, М. А. Марченко, В. В. Окольнишников, Б. В. Поллер, А. С. Родионов (зам. гл. редактора), М. А. Сонькин, В. В. Шахов (зам. гл. редактора), М. С. Хайретдинов, Ph. D. Moonseong Kim (Korea), Prof. Dr.-Eng. V. D. Nguyen (Vietnam), Michele Pagano (Italy).

Редакция: отв. секретарь М. С. Делидович, системный администратор В. А. Перепелкин, верстка Д. В. Лазуткин, логист Л. В. Трофимова.

Адрес редакции, издателя: 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, д. 6, ИВМ и МГ СО РАН
тел. (383) 330-96-43; e-mail: problem-info@sscc.ru, http://www.problem-info.sscc.ru.

Журнал зарегистрирован в Роскомнадзоре. Свидетельство ПИ № ФС77-32088 от 27 мая 2008 г. Подписной индекс в каталоге „Издания органов научно-технической информации“ ОАО «Агентство „Роспечать“» — 69980. Цена свободная. Журнал распространяется на территории России.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных для публикаций Высшей аттестационной комиссией.

Все права авторов сохранены. Использование материалов журнала возможно только с разрешения редакции и авторов.

Отпечатано в типографии ТОО „Инфо-Алдин“. Адрес: 050009, Республика Казахстан, г. Алма-Ата, ул. Толе би, д. 188;
тел./факс 8 (727) 272-78-26. Формат 60 × 84 1/8. Усл. печ. л. ____. Уч.-изд. л. ____. Печать офсетная. Тираж 300 экз. Заказ № _____. Подписано в печать _____ г. Выход в свет _____ г.

© Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2021

© Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК, 2021

JOURNAL "PROBLEMS OF INFORMATICS". No. 2 (51) 2021

Publisher: Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences with the support of the Institute of Information and Computing Technologies of the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan.

Editorial Council
Chairman Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan M. N. Kalimoldayev
Full Member of the RAS A. L. Aseev, Full Member of the Academy of Sciences of Uzbekistan T. F. Bekmuratov, Professor V. A. Vasenin, Full Member of RAS C. N. Vassilyev, Professor V. M. Vishnevsky, Full Member of RAS S. S. Goncharov, Full Member of RAS Yu. L. Ershov, Corr. Member of RAE A. A. Kuznetsov, Full Member of RAS N. A. Kuznetsov, Full Member of RAS A. P. Kuleshov, Professor A. G. Marchuk, Professor B. Y. Ryabko, Professor N. A. Semenov, Full Member of RAS I. A. Sokolov, Professor A. N. Sotnikov, Corr. Member RAS Y. A. Flerov, Full Member of NAS KR J. Sh. Sharshenaliev.

Editorial board
The Editor-in-Chief Professor V. E. Malyshkin
Associate Editors-in-Chief: A. S. Rodionov, V. V. Shakhov
D. Zh. Akhmed-Zaki, A. G. Vostretsov, V. P. Gergel, B. S. Goldstein, V. I. Guzhov, Y. A. Zagorulko, S. D. Karakozov, M. M. Karimov, V. N. Kasyanov, O. V. Kibis, V. V. Korneev, I. V. Kotenko, T. P. Lyubimova, A. I. Lyakhov, M. A. Marchenko, V. V. Okolnishnikov, B. V. Poller, Y. G. Soloveichik, M. A. Sonkin, M. S. Khairetdinov, Moonseong Kim (Korea), Van Duc Nguyen (Vietnam), Michele Pagano (Italy).

Editorial staff: Managing Editor M. S. Delidovich, System Administrator V. A. Perepelkin, Maker-up D. V. Lazutkin, Logistician L. V. Trofimova.

Address of the editorial office: 630090, pr. Lavrentieva, 6, Novosibirsk, Russia, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS.
Phone: +7 (383) 330-96-43; e-mail: problem-info@sscc.ru, http://www.problem-info.sscc.ru.

The journal has been registered in accordance with Legislation of the Russian Federation. Certificate of Mass Media Registration: ПИ № ФС77-32088, of 27 May, 2008, ISSN 2073-0667. The journal is distributed in Russia.

The journal "Problems of Informatics" is in the List of Peer-Reviewed Scientific Journals for publication of scientific results of Ph.D. and Dr. of Sci. theses in three scientific specialties and corresponding scientific disciplines in which academic degrees are awarded:
05.13.11 — Mathematical Support and Software for Computers, Computing Complexes and Computer Networks,
05.13.17 — Theoretical foundations of Informatics.
05.13.18 — Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes.

All rights reserved. The journal contents may only be used by the permission of editors and authors.

© Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 2021

© Institute of Information and Computing Technologies of the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan, 2021

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем выпуске журнала „Проблемы информатики“ публикуются статьи, рекомендованные программным комитетом конференции „Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии“ и отражающие основные направления ее работы.

Международная конференция и молодежная школа „Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии“ проводилась 23–27 ноября 2020 г. в рамках Международного конгресса „Суперкомпьютерные дни в России“ на базе Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского при поддержке корпорации Intel, компании Huawei и группы компаний РСК. Основную тематику конференции составили:

— математическое моделирование динамики систем и процессов управления;
— теория динамических систем и бифуркаций;
— колебательные процессы в динамических сетях;
— модели и методы поддержки принятия решений;
— модели и методы искусственного интеллекта;
— математические модели в биологии и медицине;
— математическое моделирование природных процессов;
— технологии параллельных и распределенных вычислений;
— применение суперкомпьютерных технологий для решения вычислительно-сложных задач.

Основными задачами проведения мероприятия являлись представление актуальных результатов в области математического моделирования сложных процессов и явлений, обсуждение различных аспектов организации суперкомпьютерных вычислений, расширение контактов между специалистами для решения ресурсоемких прикладных задач, обмен опытом научно-образовательной деятельности при подготовке специалистов в области математического моделирования и параллельных вычислений.

Виктор Павлович Гергель, д-р. техн. наук, проф., директор Института информационных технологий, математики и кибернетики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, председатель орг. комитета XX Международной конференции и молодежной школы „Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии“

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретическая и системная информатика

Бусалов А. А. Нелинейная стационарная задача теории переноса в диффузионном приближении 6

Ивлева А. И., Смирнов С. В. Алгоритмы онлайн СППР для выбора закона распределения положительно определенной случайной величины 15

Мухин А. В. Оптимальная стабилизация ротора в системе электромагнитного подвеса с помощью нечетких моделей Takagi-Sugeno 26

Пройдакова Е. В., Федоткин М. А. Оптимизация динамики функционирования сети больниц с учетом ошибок результатов наблюдений 38

Савельев В. П., Сутягина Н. И. Математические модели динамики регионального бизнеса 49

Сорокина М. С. Оптимальное оценивание состояния линейных нестационарных систем с использованием множеств достижимости 59

Федоткин А. М. Численное исследование и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными потоками 69

Правила представления и подготовки рукописей для публикации в журнале „ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ“ 81

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ
№ 2 (51) 2021 г.

CONTENTS

Theoretical informatics

Busalov A. A. Nonlinear stationary problem of transport theory in the diffusion approximation 6

Ivleva A., Smirnov S. Online DSS algorithms for selecting the distribution law of a positively defined random variable 15

Mukhin A. V. Optimal rotor stabilization in an electromagnetic suspension system using Takagi-Sugeno fuzzy models 26

Proydakova E. V., Fedotkin M. A. Optimizing the dynamics of the hospital network taking into account the errors of observation results 38

Savelyev V. P., Sutyagina N. I. Mathematical models of regional business dynamics 49

Sorokina M. Application of optimal evaluation of linear time-varying systems using reachable sets 59

Fedotkin A. M. Numerical investigation and optimization of output processes in cyclic control of conflicting flows 69

Rules of presentation and preparation of manuscripts offered for publication 81

PROBLEMS OF INFORMATICS
N 2 (51) 2021

NONLINEAR STATIONARY PROBLEM OF TRANSPORT THEORY IN THE DIFFUSION APPROXIMATION

A. A. Busalov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
603022, Nizhny Novgorod, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-6-14

One of the most effective mathematical approximations for describing the processes of transfer of X-ray radiation is the multi-group diffusion approximation. The equations of the one-group diffusion approximation are a system of two differential equations for two unknown functions: density and radiation flux.

The article considers a nonlinear problem of the theory of radiation transfer in the diffusion approximation; formulates a linearizing iterative algorithm for solving the nonlinear problem. In addition, the possibility of applicability of the corresponding linearizing iterative algorithm for a nonlinear system of integro-differential equations of radiation transfer and statistical equilibrium for a two-level atom model are investigated. It should be noted that the model of a two-level atom reflects the important meaningful problems. Also it can be considered as an integral part of the study of more complex problems of a multi-level atom. A linearizing iterative solution algorithm is proposed and numerically investigated for solving the arising system of equations. The results of a numerical analysis of the proposed iterative algorithm are presented. They confirm the possibility of its application. The properties of the used difference scheme are discussed.

Key words: radiation transfer, diffusion approximation, stationarity equations, nonlinear system of equations of the theory of transfer, iterative methods.

References

1. Michalas D. Star atmospheres. M.: Mir, 1982.

2. Ivanov V. V. Radiation transfer and spectra of celestial bodies. M.: Science. 1969.

3. Germogenova T. A. Local properties of solutions of the transport equation. M.: Science. Ch. ed. physical -mat. lit., 1986.

4. Vladimirov V. S. Mathematical problems in the one-velocity theory of particle transport. Tr. MIAN SSSR, 61, Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1961.

5. Sushkevich T. A. Mathematical models of radiation transfer. M.: BINOM. Knowledge Laboratory, 2006.

6. Gol'din V. Ya. A quasidiffuse method for solving a kinetic equation. // Zh. Vychisl. mat. and mat. fiz. 1964. V. 4. N 6. P. 1078–1087.

7. Bell D., Glesston S. Theory of nuclear reactors. M.: Atomizdat. 1974.

8. Kalinin A. V., Morozov S. F. On a nonlinear boundary value problem in the theory of radiation transfer // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1990. T. 30, S. 1071–1080.

9. Kalitkin N. N. Numerical methods M.: Nauka, 1978.

10. Frisch, S. E. Optical spectra of atoms / S. E. Frisch. M.; L.: State. publishing house physical-mat. lit. 1963.

11. Elyashevich, M. A. Atomic and Molecular Spectroscopy. M.: State. publishing house physical-mat. lit., 1962.

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. А. Бусалов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
603022, г. Нижний Новгород, Россия

УДК 519.633.2
DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-6-14

Одним из наиболее эффективных математических приближений для описания процессов переноса рентгеновского излучения является многогрупповое диффузионное приближение. Уравнения одногруппового диффузионного приближения представляют собой систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций: плотности и потока излучения.

В работе рассматривается нелинейная задача теории переноса излучения в диффузионном приближении, формулируется линеаризующий итерационный алгоритм решения нелинейной задачи. Кроме того, исследуется возможность применимости соответствующего линеаризующего итерационного алгоритма для нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия для модели двухуровневого атома. Следует отметить, что модель двухуровневого атома отражает важные содержательные задачи, а также может рассматриваться как составная часть исследования более сложных задач многоуровнего атома. Для решения возникающей системы уравнений предлагается и численно исследуется линеаризующий итерационный алгоритм решения. Приводятся результаты численного анализа предлагаемого итерационного алгоритма, подтверждающие возможность его применения. Обсуждаются свойства используемой разностной схемы.

Ключевые слова: перенос излучения, диффузионное приближение, уравнения стационарности, нелинейная система уравнений теории переноса, итерационные методы.

Введение. Вопросы физического, математического и численного моделирования процессов переноса излучения обсуждаются в работах [1–5]. Более полная информация о возможных приложениях и современных подходах к теоретическому и численному исследованию теории переноса содержится в [5, 6].

Одним из наиболее эффективных математических приближений для описания процессов переноса рентгеновского излучения является многогрупповое диффузионное приближение [1]. Уравнения одногруппового диффузионного приближения представляют собой систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций: плотности и потока излучения [7]. Условием применимости диффузионного приближения является малость градиента плотности излучения [1, 5, 7] на расстоянии пробега излучения l. Отметим, что вблизи границы диффузионное приближение может приводить к заметным ошибкам, однако в случае оптически толстых (плотных) тел градиенты плотности малы и диффузионное приближение оправдано.

В работе [8] изучалась нелинейная стационарная система, включающая в себя кинетическое уравнение переноса излучения и уравнения статистического равновесия, возника-

© А. А. Бусалов, 2021

ющая при исследовании модели двухуровнего атома в рамках предположения о полном перераспределении излучения по частоте. В этой работе были получены строгие результаты о существовании и единственности решения краевой задачи для рассматриваемой системы, и был предложен и обоснован линеаризующий итерационный алгоритм решения.

В настоящей работе исследуется возможность применимости соответствующего линеаризующего итерационного алгоритма для нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия для модели двухуровневого атома, в которой перенос излучения описывается диффузионным приближением. Следует отметить, что модель двухуровневого атома [1] отражает важные содержательные задачи, а также может рассматриваться как составная часть исследования более сложных задач многоуровнего атома. Для решения возникающей системы уравнений предлагается и численно исследуется линеаризующий итерационный алгоритм решения. Приводятся результаты численного анализа предлагаемого итерационного алгоритма, подтверждающие возможность его применения. Обсуждаются свойства используемой разностной схемы.

1. Постановка задачи. Система уравнений переноса излучения и статистического равновесия записывается в виде [1, 8]:

$$(\omega,\nabla)\varphi(x,\nu,\omega) + h\nu_{12}\frac{\chi(\nu)}{4\pi}[B_{12}C_1(x) - B_{21}C_2(x)]\phi(x,\nu,\omega) = h\nu_{12}\frac{\chi(\nu)}{4\pi}A_{21}C_2(x) \tag{1}$$

$$[C_{12}n_e(x) + B_{12}\int\limits_I\int\limits_\Omega \frac{\chi(\nu)}{4\pi}\phi(x,\nu,\omega)d\nu d\omega]C_1(x) =$$

$$[A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21}\int\limits_I\int\limits_\Omega \frac{\chi(\nu)}{4\pi}\phi(x,\nu,\omega)d\nu d\omega]C_2(x) \tag{2}$$

$$C_1(x) + C_2(x) = f(x) \tag{3}$$

с граничными условиями $\phi(x,\nu,\omega) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (\omega,n(x)) < 0.$

Здесь $x = \{x_1,x_2,x_3\} \in G \subset R^3, G-$выпуклое открытое множество с гладкой границей ∂G и диаметром $d > 0, n(x)$ — единичный вектор нормали к ∂G в точке $x \in G$, $\omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} \in \Omega = \{\omega \in R^3 : \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1\}; \nu \in I = [0,\nu_0]; h, \nu, \nu_0, A_{21}, B_{12}, B_{21}, C_{12}, C_{21}$ — заданные положительные числа, удовлетворяющие условию $B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12} \geqslant 0$.

Для построения диффузионного приближения в представлении интенсивности излучения $\phi(x,\nu,\omega)$ в виде ряда по сферическим функциям ограничиваемся двумя членами разложения:

$$\phi(x,\nu,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\sum_{i=-k}^{k}\phi_{k,i}(x,\nu)Y_{k,i}(\omega)$$

$$\phi(x,\nu,\omega) \approx \frac{1}{4\pi}[\phi_0(x,\nu) + 3\omega\phi_1(x,\nu)], \tag{4}$$

где $\phi_0(x,\nu) = \int\limits_\Omega \phi(x,\nu,\omega)d\omega$, $\phi_1(x,\nu) = \int\limits_\Omega \omega\phi(x,\nu,\omega)d\omega$. Обратим внимание на физический смысл функций $\phi_0(x,\nu)$ и $\phi_1(x,\nu)$. Первая есть плотность потока фотонов, а вторая представляет собой векторный поток фотонов. Для получения уравнений, связывающих функции ϕ_0 и ϕ_1, уравнение (1) умножается на сферические функции и интегрируется по всем

направлениям. Из полученных в результате соотношений для ϕ_0 и ϕ_1 следует уравнение для плотности потока в диффузионном приближении (P_1-приближении).

$$div(D(x,\nu)\nabla\phi_0(x,\nu)) + \chi`\phi_0(x,\nu) = F, \tag{5}$$

где $\chi`(x,\nu) = h\nu_{12}\chi(\nu)\frac{1}{4\pi}[B_{12}C_1(x) - B_{21}C_2(x)]$, $F(x,\nu) = h\nu_{12}\chi(\nu)A_{21}C_2(x)$, $\phi_0(x,\nu) = \int\limits_\Omega \phi d\omega$ $D-$коэффициент диффузии. $D(\phi_0,x,\nu) = [\frac{3}{4\pi}h\nu_{12}\chi(\nu)[B_{12}C_1(x) - B_{21}C_2(x)]]^{-1}$.

Уравнения статистического равновесия (2), (3) при конструировании диффузионного приближения будут иметь вид:

$$[C_{12}n_e(x) + B_{12}\int\limits_I \chi(\nu)\phi_0(x,\nu)d\nu]C_1(x) = [A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21}\int\limits_I \chi(\nu)\phi_0(x,\nu)d\nu]C_2(x); \tag{6}$$

$$C_1(x) + C_2(x) = f(x)$$

В работе рассматривается один из вариантов возможных граничных условий, соответствующих отсутствию входящего из вне потока излучения [7].

$$(\phi_0(x,\nu) + 2D\frac{\partial\phi_0(x,\nu)}{\partial n}) = 0.$$

2. Итерационный линеаризующий алгоритм. Для решения возникающей системы уравнений предлагается и численно исследуется линеаризующий итерационный алгоритм решения. Введем следующие обозначения:

$$k_{12}(\phi_0,x) = C_{12}n_e(x) + B_{12}\int\limits_I \chi(\nu)\phi_0(x,\nu)d\nu,$$

$$k_{21}(\phi_0,x) = A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21}\int\limits_I \chi(\nu)\phi_0(x,\nu)d\nu$$

Тогда имеем:

$$C_1(x) = \frac{k_{21}(\phi_0,x)}{k_{21}(\phi_0,x) + k_{12}(\phi_0,x)}f(x), \quad C_2(x) = \frac{k_{12}(\phi_0,x)}{k_{21}(\phi_0,x) + k_{12}(\phi_0,x)}f(x).$$

Подставляя значения для $C_1(x)$ и $C_1(x)$ в уравнение переноса (5), получим следующий итерационный алгоритм (где $s-$номер итерации):

$$div(\frac{k_{21}(\phi_0^s,x) + k_{12}(\phi_0^s,x)}{\frac{3}{4\pi}h\nu_{12}\chi(\nu)(B_{12}k_{12}(\phi_0^s,x) - B_{21}k_{21}(\phi_0^s,x))})f(x)\nabla\phi_0^{s+1}(x,\nu) +$$

$$+(\frac{1}{4\pi}h\nu_{12}\chi(\nu)\frac{B_{12}k_{12}(\phi_0^s,x) - B_{21}k_{21}(\phi_0^s,x)}{k_{21}(\phi_0^s,x) + k_{12}(\phi_0^s,x)})\phi_0^{s+1}(x,\nu) =$$

$$= h\nu_{12}\chi(\nu)\frac{k_{12}(\phi_0^s,x)}{k_{21}(\phi_0^s,x) + k_{12}(\phi_0^s,x)}A_{21}f(x),$$

или, используя введенные выше обозначения:

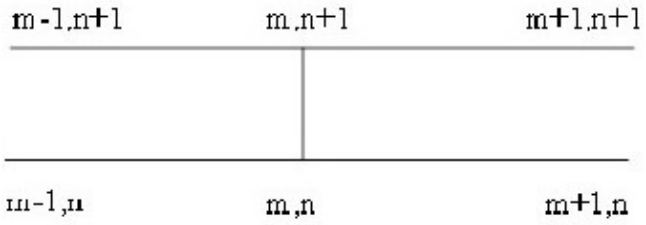


Рис. 1. Шаблон пространственной сетки

$$div(D(\phi_0^s,x,\nu)\nabla\phi_0^{s+1}(x,\nu)) + \chi`(\phi_0^s,x,\nu)\phi_0^{s+1}(x,\nu) = F(\phi_0^s,x,\nu). \tag{7}$$

3. Численное исследование алгоритма в одномерном случае. В соответствии с алгоритмом, описанным в предыдущем параграфе, на каждой итерации должна решаться линейная краевая задача третьего рода для эллиптического уравнения в дивергентной форме. В одномерном случае соответствующая задача имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(D(\phi_0,x,t)\frac{\partial\phi_0}{\partial x}) + \chi\phi_0 = f(\phi_0,x,t)$$

в области $G = [0 \leqslant x \leqslant a]$, удовлетворяющей граничным условиям:

$$(\phi_0(x,\nu) - 2D\frac{\partial\phi_0(x,\nu)}{\partial x})_{x=0} = 0, \quad (\phi_0(x,\nu) + 2D\frac{\partial\phi_0(x,\nu)}{\partial x})_{x=a} = 0. \tag{8}$$

При этом предполагается, что $D \geqslant 0$. Решение этой задачи может быть получено как решение при $t \to \infty$ соответствующей начально-краевой задачи для уравнения параболического типа в области $G = [0 \leqslant x \leqslant a] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$:

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(D(\phi_0,x,t)\frac{\partial\phi_0}{\partial x}) + \chi\phi_0 = f(\phi_0,x,t), \tag{9}$$

удовлетворяющей условиям:

$$\phi(x,0) = \mu(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a,$$

$$(\phi_0(x,\nu) - 2D\frac{\partial\phi_0(x,\nu)}{\partial x})_{x=0} = 0, \quad (\phi_0(x,\nu) + 2D\frac{\partial\phi_0(x,\nu)}{\partial x})_{x=a} = 0$$

Выберем в области G, где отыскивается решение уравнения (9), равномерную сетку D_h с шагами h и τ по переменным x, t. На этой сетке запишем разностную схему для первой краевой задачи, используя шеститочечный шаблон:

$$\frac{1}{\tau}(\phi_m^{n+1} - \phi_m^n) = \frac{1}{h^2}(a_{m+1/2}^n(\phi_{m+1}^{n+1} - \phi_m^{n+1}) - a_{m-1/2}^n(\phi_m^{n+1} - \phi_{m-1}^{n+1})) + f_m^n,\ 1 \leqslant m \leqslant M-1. \tag{10}$$

Здесь a^n вычисляются с помощью значений ϕ^n следующим образом:

$$a^n_{m+1/2} = \frac{1}{2}(D(x_m,\phi^n_m,t_n) + D(x_{m+1},\phi^n_{m+1},t_n)).$$

Граничные условия аппроксимируются следующим образом: $(\phi^{n+1}_m(x,\nu) \pm 2a^n_{m+1/2}\frac{\partial\phi^{n+1}_m(x,\nu)}{\partial x})_{m=1,m=M-1} = 0$, значение $f^{n+1/2}_m = f(x_m,t^{n+1/2})$.

Это линейная система с трехдиагональной матрицей. При этом матрица имеет диагональное преобладание. Следовательно, она невырожденная, и решение системы (10) существует и единственно. Оно может быть найдено прогонкой, условия устойчивости которой выполнены.

Выясним порядок аппроксимации схемы (10). Для этого разложим решение в узлах шаблона, выбрав за точку, в которой производится разложение, $(x_m,t_n + \tau/2)$

$$\phi^{n+1}_{m+1} = \sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P!}(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t} + h\frac{\partial}{\partial x})^P\phi = \phi + \frac{\tau}{2}\phi_t + h\phi_x + \frac{\tau^2}{8}\phi_{tt} + \frac{\tau h}{2}\phi_{tx} + \frac{h^2}{2}\phi_{xx} + \frac{\tau^3}{48}\phi_{ttt} +$$

$$\frac{\tau^3 h}{8}\phi_{ttx} + \frac{\tau h^2}{4}\phi_{txx} + \frac{h^3}{6}\phi_{xxx} + \frac{\tau^4}{384}\phi_{tttt} + \frac{\tau^3 h}{48}\phi_{tttx} + \frac{\tau^2 h^2}{16}\phi_{ttxx} + \frac{\tau h^3}{12}\phi_{txxx} + \ldots, \qquad (11)$$

где все производные отнесены к точке $(x_m,t_n + \tau/2)$. Разложение для ϕ^{n+1}_{m-1} получается из (11) заменой $h \to -h$ разложение для ϕ^n_{m+1} заменой $\tau \to -\tau$ и т. д. Подставляя эти разложения в (10), для компоненты невязки ψ_m [9], обусловленной погрешностью уравнения (10), получим порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Исследуем устойчивость схемы (10) по начальным данным, используя метод разделения переменных. Полагая в (10) $f^{n+1/2}_m = 0$ и $\phi^n_m = \rho^n_q e^{iqx_m}$ для множителя роста ρ_q найдем, учитывая, что

$$\frac{1}{h^2}(\phi^n_{m+1} - 2\phi^n_m + \phi^n_{m-1}) = \rho^n_q e^{iqx_m}\frac{1}{h^2}(e^{\frac{iqh}{2}} - e^{\frac{-iqh}{2}})^2 = -\rho^n_q\frac{4sin^2\frac{qh}{2}}{h^2}e^{iqx_m}$$

$$\rho_q = \frac{1}{1 + \frac{4D\tau}{h^2}sin^2\frac{qh}{2}}.$$

Очевидно, что $\rho_q \leqslant 1$. Это неравенство является условием равномерной устойчивости схемы (10) по начальным данным в $\|\cdot\|_{l_2}$.

Для коэффициентов $\{\alpha_{k+m}\}$ схемы (10) при $\{\phi^{n+1}_m\}$ имеем

$$|\alpha_m| - \sum_{k\neq 0} = \frac{1}{\tau}.$$

Поэтому, в силу [9], схема будет устойчивой и по правой части. Следовательно, выбранная разностная схема будет безусловно устойчивой.

Для проверки работоспособности предложенного итерационного алгоритма решения была посчитана модельная задача распространения излучения в диффузионном приближении. В области $\Pi = \{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ решается уравнение переноса с нулевыми граничными условиями. Начальное значение полного количества частиц в системе $\phi_0 = 0{,}00001$.

Коэффициент Эйнштейна для спонтанного испускания $A_{21} \sim 10^{7-1}$. Энергия при переходе с одного уровень на другой задавалась следующим значением $h\nu_{12} = 3{,}2$.

Значения коэффициентов $B_{12}, B_{21}, C_{12}, C_{21}$ были взяты из [10, 11]. В качестве результата рассматривался скалярный поток ϕ_0 частиц.

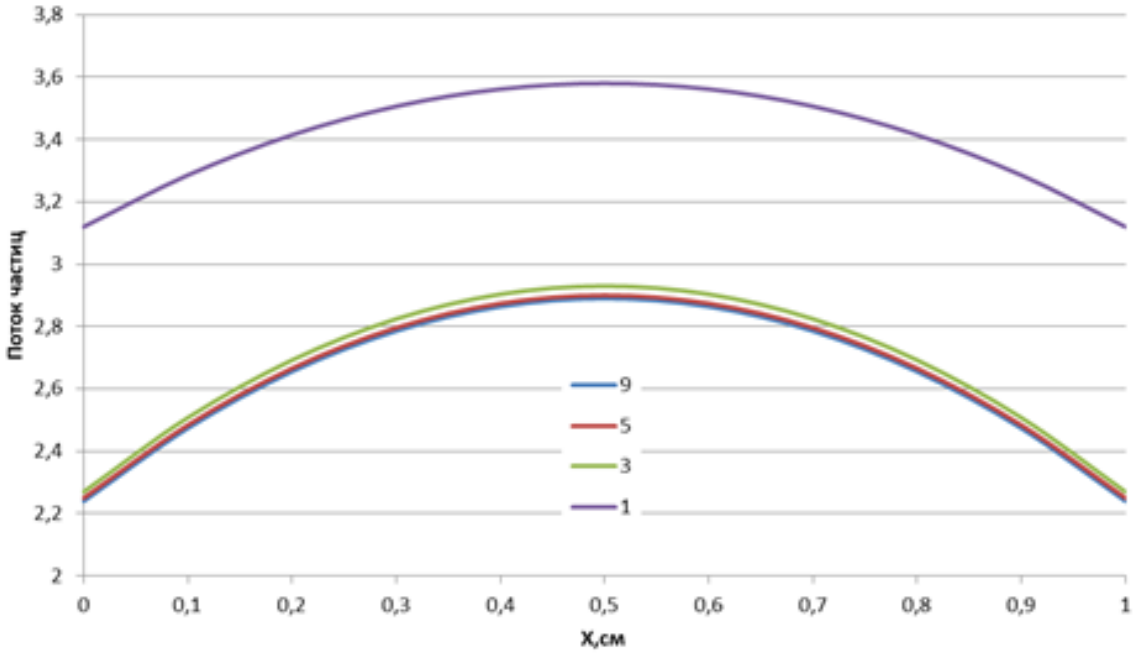


Рис. 2. Шаблон пространственной сетки

Итерационный процесс повторяется до условия достижения заданной точности ($\varepsilon_0 = 10^{-4}, \varepsilon_1 = 10^{-16}$) по критерию: $|\phi_0^{s+1} - \phi_0^s| \leqslant \varepsilon_0 \phi_0^{s+1} + \varepsilon_1$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ — заданные константы.

На рис. 2 показаны профили скалярного потока на первой, третьей, пятой и девятой итерациях соответственно.

Как видно из графика, наблюдается сходимость итерационного процесса. Итерационный процесс сошелся за 9 итераций.

Заключение. В работе рассмотрена нелинейная стационарная задача для системы уравнений переноса излучения в диффузионном приближении и статистического равновесия, соответствующая модели двухуровневого атома в рамках предположения о полном перераспределении излучения по частоте. Для решения возникающей системы уравнений предложен и численно исследован линеаризующий итерационный алгоритм решения. В работе описывается разностная схема для аппроксимации сеточных уравнений диффузионного типа. Проведенные численные исследования подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов. Автор выражает благодарность за постановку задачи и обсуждение результатов научному руководителю проф. А. В. Калинину.

Список литературы

1. Михалас Д. Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.

2. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М.: Наука. 1969.

3. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

4. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, Тр. МИАН СССР, 61, Изд-во АН СССР, М., 1961.

5. Сушкевич Т. А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

6. Гольдин В. Я. Квазидиффузный метод решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1078–1087.

7. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат. 1974.

8. Калинин А. В., Морозов С. Ф. Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30, С. 1071–1080.

9. Калиткин Н. Н. Численные методы М.: Наука, 1978.

10. Фриш, С. Э. Оптические спектры атомов / С. Э. Фриш. М.; Л. Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1963.

11. Ельяшевич М. А. Атомная и молекулярная спектроскопия. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.

Бусалов Алексей Алексеевич — e-mail: busalov89@gmail.com. Закончил кафедру прикладной математики НИЯУ МИФИ. Аспирант первого курса аспирантуры ННГУ. Специальность в аспирантуре — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Научные интересы включают численное моделирование задач механики сплошной среды и тепломассопереноса, а также разработку и создание параллельных алгоритмов для вышеупомянутых задач.

Busalov Alexey Alekseevich — Graduated from the Department of Applied Mathematics, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute). First year postgraduate student of the UNN. (National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod). Specialty in graduate school is differential equations, dynamical systems and optimal control. Research interests include numerical modeling of problems in continuum mechanics and heat and mass transfer as well as the development and creation of parallel algorithms for the above tasks.

Дата поступления — 06.03.2021

ONLINE DSS ALGORITHMS FOR SELECTING THE DISTRIBUTION LAW OF A POSITIVELY DEFINED RANDOM VARIABLE

A. Ivleva, S. Smirnov

Samara Federal Research Scientific Center RAS,
Institute for the Control of Complex Systems RAS
443020, Samara, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-15-25

The problem of making online DSS for selecting a two-parametric distribution law of a continuous positively defined random variable with a finite second moment is considered. These RVs are very important for describing such parameters of real systems as distances, time intervals, value deviations, reliability characteristics, economic indices etc. Algorithms and scenarios of the system operation are given. The main priority is a practical application-oriented approach to selection of the most appropriate type of distribution law out of a finite set of models. The approach is based on usable criteria and is applicable in case of small datasets.

The proposed algorithm for selecting the distribution law of random variables is based on a natural factorization of the space of empirical characteristics — the average and mean standard deviation. In exponential mode, if the average and mean standard deviation are close, the exponential distribution is suggested. In hyperexponential mode (mean standard deviation is greater than the average), the following distributions are proposed as models of a random variable: hyperexponential distribution of a special type, Weibull distribution, gamma distribution, lognormal distribution, inverse Gaussian distribution. For hypoexponential mode (the average is greater than mean standard deviation), the following distributions are offered: hypoexponential distribution, Erlang distribution, Weibull distribution, gamma distribution, lognormal distribution, left truncated normal distribution, inverse Gaussian distribution. If the average is divisible by mean standard deviation, Erlang distribution is used instead of hypo-exponential distribution, and gamma distribution, which degenerates into a special case of a discrete parameter, coincides with the Erlang distribution. Special importance and attention are given to two-phase hyperexponential distribution of a special type, proposed by one of the co-authors of this article, and hypoexponential distribution with two types of phases. These are convenient models for approximating two-parameter distributions of positively defined random variables. The advantages of these distributions are: requirement of two parameters only; existence and uniqueness of the solution of the system of moment equations for hyperexponential distribution of a special type; explicit solution of the system of moment equations for hypoexponential distribution; the physical meaning of the RV distributed according to hyperexponential distribution is the sojourn time in two parallel connected states with exponential distribution laws; the physical meaning of the RV distributed according to hypoexponential distribution is the sojourn time in a series-coupled states with exponential distribution laws; explicit analytical view of the restoration function. Distribution parameters are determined by numerical solution of systems of equations using functions of python libraries. To effectively search for solutions of systems of equations, the initial parameter values are selected adaptively using the equation root localization procedure. The online calculation system is being developed in Python using the Dash framework and is a convenient tool for modeling random

© A. Ivleva, S. Smirnov, 2021

variables, their distributions, and characteristics for engineers and economists. The advantages of the developed automated online system are interactive intuitive interface; availability without software installation; ability to save graphic elements as files; minimal set of statistically reliable and intuitive input data; ability to visually compare different models of random variables by means of various criteria.

The input data block enables the user to upload a file with statistical data. Output forms are: RV distributions and characteristics (densities, parameters, entropies); graphs of densities, distribution functions, and failure rates; scattering diagrams; the table of metrics with quantitative difference estimation for pairs of distributions. These characteristics are applied to visually compare the distribution laws. The block of multi-criteria ranking of distribution laws is applied to rank the distribution laws. The following simple and intuitive criteria, focused on solving practical problems, are proposed for a user (engineer, economist, biologist, etc.): maximization of the differential entropy, fitting empirical quantiles, fitting empirical moments of higher orders, the presence or absence of analytically defined restoration function, the behaviour of the intensity function, the possibility of decomposition into exponential phases. The significance of these six criteria is determined by the user by assigning them to one of the four groups of significance: very important, important, slightly important, ignore. Quantification of these fuzzy assessments into criteria weight coefficients can be done by the method of Piyavsky S. A. Then the multi-criteria problem is to be solved by reducing it to a linear convolution with the criteria weight coefficients obtained. Herewith, each distribution is assigned the number of points (from 1 to N, where N is the size of distribution set according to the natural factorization of the space of empirical characteristics) due to predefined rules. Some additional data are to be specified by user. They are the number of higher-order moments, the number of quantiles, the behavior of the failure rate function (monotonic; non-monotonic (break-in character); other) if respective criteria are taken into account. The DSS can be applied in combination with other existing methods for selecting the distribution law of a random variable.

Key words: DSS, multi-criteria selection, random variable, distribution law, statistical data processing.

References

1. Baranova A. A., Selyaninov A. A., Vihareva E. V. Kriterij dostovernosti vybora zakona raspredeleniya pri modelirovanii processa biologicheskoj destrukcii // Matematicheskoe modelirovanie v estestvennyh naukah. Perm': Izd. Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta, 2015. T. 1. S. 512–514.

2. Ponomarev V. P., Beloglazov I. Yu. K vyboru zakona raspredeleniya vremeni na remont neftyanyh skvazhin // Problemy ekonomiki i menedzhmenta. 2015. N 5 (45). S. 140—143.

3. Duplyakin V. M., Knyazheva Yu. V. Vybor zakona raspredeleniya vhodnogo potoka zayavok pri modelirovanii sistemy massovogo obsluzhivaniya torgovogo predpriyatiya // Vestnik SGAU. 2012. N 6 (37). S. 102–109.

4. Pushkareva L. A., Pushkareva T. A. Vybor i obosnovanie analiticheskogo zakona raspredeleniya skorosti vetra v udmurtskoj respublike dlya proektirovaniya vetroustanovki. // Teoreticheskie i prakticheskie aspekty razvitiya nauchnoj mysli v sovremennom mire: sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii (Samara, 8 oktyabrya 2017g.). Ufa, 2017. S. 67–71.

5. Panov K. V. Vybor zakonov raspredeleniya potoka zayavok i prostoev lokomotivov na obsluzhivanii v depo // Innovacionnye proekty i tekhnologii v obrazovanii, promyshlennosti i na transporte: sbornik trudov nauchnoj konferencii (Omsk, 8 fevralya 2019 g.). Omsk: Izd. Omskogo gosudarstvennogo universiteta putej soobshcheniya, 2019. S. 227—233.

6. Linec G. I., Nikulin V. I., Mel'nikov S. V. Vybor kriteriya identifikacii zakona raspredeleniya sluchajnyh velichin transionosfernyh kanalov svyazi // XLIV Akademicheskie chteniya po kosmonavtike, posvyashchennye pamyati akademika S. P. Korolyova i drugih vydayushchihsya

otechestvennyh uchenyh — pionerov osvoeniya kosmicheskogo prostranstva: sbornik tezisov (Moskva, 28–31 yanvarya 2020 g.). M.: Izd. Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana, 2020. S. 254–256.

7. Akimov S. S. Problema vybora metoda vosstanovleniya zakona raspredeleniya veroyatnosti // MNIZh. 2014. N 1–3 (20). S. 5–8.

8. Tyrsin A. N. Metod podbora nailuchshego zakona raspredeleniya nepreryvnoj sluchajnoj velichiny na osnove obratnogo otobrazheniya // Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika. 2017. N 1. S. 31–38.

9. Smirnov S. V. Modelirovanie „sverhneregulyarnyh“ sluchajnyh velichin po eksperimental'nym dannym. // Avtomatizaciya nauchnyh issledovanij: Mezhvuz. sb. nauchn. trudov. Kujbyshev: KuAI, 1988. S. 52—57.

10. Kovalenko A. I., Smirnov S. V. Sravnenie gipereksponencial'nogo raspredeleniya s drugimi modelyami polozhitel'no opredelennyh sluchajnyh velichin // Infokommunikacionnye tekhnologii. Samara, 2019. Tom 17, N 1. S. 9–16.

11. Ivleva A., Smirnov S. Comparison of Models of Positively Defined Random Variables // XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). Samara, 2019. P. 449–454.

12. Bladt M., Nielsen B. F. Matrix-Exponential Distributions in Applied Probability (Probability Theory and Stochastic Modelling 81). Springer: Science+Business Media LLC, 2017.

13. Ryzhikov Yu.I., Ulanov A. V. Primenenie giper-eksponencial'noj approksimacii v zadachah rascheta nemarkovskih sistem massovogo obsluzhivaniya // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika. 2016. N 3. S. 60—65.

14. Bajhel't F., Franken M. Nadezhnost' i tekhnicheskoe obsluzhivanie. Matematicheskij podhod. M.: Radio i svyaz', 1988.

15. Kalashnikov V. V., Rachev S. T. Matematicheskie metody postroeniya stohasticheskih modelej obsluzhivaniya. M.: Nauka, 1988.

16. Himenko V. I. Sluchajnye dannye: struktura i analiz. M.: TEHNOSFERA, 2018.

17. Piyavskij S. A. Metod universal'nyh koefficientov pri prinyatii mnogokriterial'nyh reshenij // Ontologiya proektirovaniya. 2018. t. 8. N 3(29). S. 449–468. DOI: 10.18287/2223-9537-2018-8-3-449-468.

18. Piyavskij S. A. Kak „numerizovat'“ ponyatie „vazhnee“ // Ontologiya proektirovaniya. 2016. T. 6, 34 (22). S. 414–435. DOI: 10.18287/2223-9537-2016-6-4-414-435.

АЛГОРИТМЫ ОНЛАЙН СППР ДЛЯ ВЫБОРА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

А. И. Ивлева, С. В. Смирнов

Самарский федеральный исследовательский центр РАН,
Институт проблем управления сложными системами РАН,
443020, Самара, Россия

УДК 51-37
DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-15-25

Рассматривается задача создания онлайн системы поддержки принятия решений (СППР) при выборе двухпараметрического закона распределения непрерывной, положительно определенной случайной величины с конечным вторым моментом. Приводятся алгоритмы и сценарии работы системы. При этом основным приоритетом является ориентированный на практическое применение и критерии пользователя подход, позволяющий при минимальной информации выбирать наиболее соответствующий конкретному исследованию вид закона распределения из конечного множества заданных моделей. В основе предлагаемого алгоритма выбора закона распределения случайных величин лежит естественная факторизация пространства эмпирических характеристик — математического ожидания и среднеквадратического отклонения. Для наглядного сравнения законов распределения используются плотности распределения, значения параметров и дифференциальной энтропии; графики плотностей, функций распределений и интенсивностей отказов; диаграммы рассеяния; таблица метрик. Для ранжирования законов распределения предлагаются следующие простые, интуитивно понятные для пользователя (инженера, экономиста, биолога и др.), ориентированные на решение практических задач критерии: максимизация дифференциальной энтропии распределения, максимизация соответствия эмпирическим квантилям, максимизация соответствия эмпирическим моментам третьего и более порядков, наличие или отсутствие аналитически заданной функции восстановления, характер функции интенсивности, возможность разложения на экспоненциальные фазы. Разрабатываемая СППР может применяться в комбинации с другими существующими методами выбора закона распределения случайной величины.

Ключевые слова: СППР, многокритериальный выбор, случайная величина, закон распределения, статистическая обработка данных.

Введение. Необходимость выбора теоретического закона распределения случайной величины (СВ) по экспериментальным данным подтверждается большим количеством публикаций по данной тематике [1–6]. Они охватывают постановки практических задач из самых различных отраслей науки и техники. Наличие аналитической модели случайного фактора важно для описания различного рода систем, процессов, поскольку позволяет определять, прогнозировать и оптимизировать важные характеристики. Кроме того, законы распределения являются входными данными при построении имитационных моделей в современных системах расчетов (MatLab, AnyLogic, SciInTech и др.). В настоящее время

© А. И. Ивлева, С. В. Смирнов, 2021

существует множество подходов к решению задачи подбора теоретического распределения СВ. Обзоры большинства из них можно найти в [7, 8]. Основными недостатками упомянутых подходов являются:

1. Неоднозначность и субъективность результата по нескольким причинам: а) несколько распределений могут не противоречить нулевой гипотезе; б) выбор распределения зависит от критерия согласия; в) чувствительность результата к выбираемой длине интервала группировки данных.

2. Необходимость достаточно большой выборки данных или наличия априорной информации о форме распределения при малых выборках.

3. Сложность адекватного выбора и оценки эффективности методики обработки статистических данных для инженеров, экономистов, биологов и др.

В настоящей работе рассматривается задача создания интерактивной СППР при выборе двухпараметрического закона распределения непрерывной, определенной на положительной полуоси СВ. Эти СВ являются крайне важными для описания таких параметров реальных систем как расстояния, временные интервалы, отклонения от заданного значения, характеристики надежности, прочности, экономические показатели и др. При этом основным приоритетом является ориентированный на практическое применение и критерии пользователя подход, позволяющий при минимальной информации выбирать наиболее соответствующий потребностям конкретного исследования вид закона распределения из конечного множества заданных моделей. В основу СППР положены существующие простые, интуитивно понятные для пользователя количественные и качественные критерии, степень важности которых пользователь сможет настраивать самостоятельно, учитывая необходимость нахождения компромисса между точностью модели и ее конструктивностью (вычислимостью).

1. Сценарий и алгоритм работы СППР при выборе закона распределения. Сценарий работы СППР при выборе закона распределения СВ можно описать следующим образом.

Действующее лицо: пользователь.

Цель: сравнение и ранжирование законов распределения на основе имеющихся у пользователя статистических данных.

Предусловия: пользователь открыл web-страницу СППР.

Главная последовательность:

1) Пользователь загружает файл со статистическими данными.

2) Система вычисляет математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение с интервалами доверия; список распределений, их параметры, значения диференциальных энтропий; графики функций распределений, плотностей распределений, интенсивностей распределений, функций восстановления; окна диаграмм рассеяния с возможностью выбора из выпадающего списка распределения на каждой оси; таблицу метрик распределений; окно выбора групп важности критериев и ввода дополнительных параметров.

3) Пользователь выбирает пару законов распределения на осях диаграммы рассеяния.

4) Система автоматически выводит диаграмму рассеяния для выбранных распределений.

5) Пользователь выбирает в выпадающих списках для каждого из 6 критериев выбора закона распределения группу важности и дополнительные параметры по некоторым критериям.

6) Система выдает пользователю рекомендацию по выбору закона распределения СВ; при необходимости пользователь может открыть справку о генезисе данной рекомендации.

Альтернативная последовательность:

В случае, если введенные пользователем данные соответствуют экспоненциальному распределению, система выведет математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение с интервалами доверия; список распределений, их параметры, значения дифференциальных энтропий; графики функций распределений, плотностей распределений, интенсивностей распределений, функций восстановления; рекомендацию по применению экспоненциального распределения без окна многокритериального выбора.

Алгоритм сравнения и ранжирования законов распределения, который лежит в основе разрабатываемой СППР, представлен на рис. 1. Вывод 1 содержит экспоненциальное распределение; параметр распределения; значение дифференциальной энтропии; графики функции распределения, плотности распределения, интенсивности распределения, функции восстановления; рекомендация по применению экспоненциального распределения. Вывод 2 содержит список распределений для гипер- или гипоэкспоненциального случая; параметры распределений; значения дифференциальной энтропии; графики функций распределения, плотности распределения, интенсивности распределения, функции восстановления; таблицу метрик.

1.1. *Определение множества распределений и параметров законов распределения.* Для определения множества законов распределений, которые на следующих этапах алгоритма будут сравниваться и ранжироваться, используется естественная факторизация пространства эмпирических характеристик — математического ожидания (МО) $M > 0$ и среднеквадратического отклонения (СКО) $D > 0$. Соответственно такой факторизации предлагается три основных набора законов распределений.

1) Экспоненциальный случай. Ситуация, когда математическое ожидание и СКО близки, $|M - D| < \epsilon$ (ϵ — малое число, заданное по умолчанию) моделируется экспоненциальным распределением.

2) Гиперэкспоненциальный случай. Когда СКО больше математического ожидания, т. е. $D > M + \epsilon$, в качестве моделей СВ предлагаются следующие распределения [9]: — гиперэкспоненциальное распределение специального вида; — распределение Вейбулла-Гнеденко; — гамма-распределение; — логарифмически нормальное распределение; — обратное распределение Гаусса.

Двухфазное гиперэкспоненциальное распределение специального вида впервые предложено одним из соавторов данной статьи в [10] как способ аппроксимации двухпараметрических распределений положительно определенных СВ. Его свойства исследовались в [11, 12]. Преимуществами данного распределения являются:

- двухпараметричность (в отличие от хорошо изученного в [13, 14] гиперэкспоненциального распределения общего вида, для применения которого необходимо минимум три параметра);

- существование и единственность решения системы уравнений моментов для гиперэкспоненциального режима [10];

- смысл распределенной по данному закону СВ — время пребывания системы в двух параллельно связанных состояниях, время пребывания в каждом из которых распределено по экспоненциальному закону;

- явный аналитический вид функции восстановления.

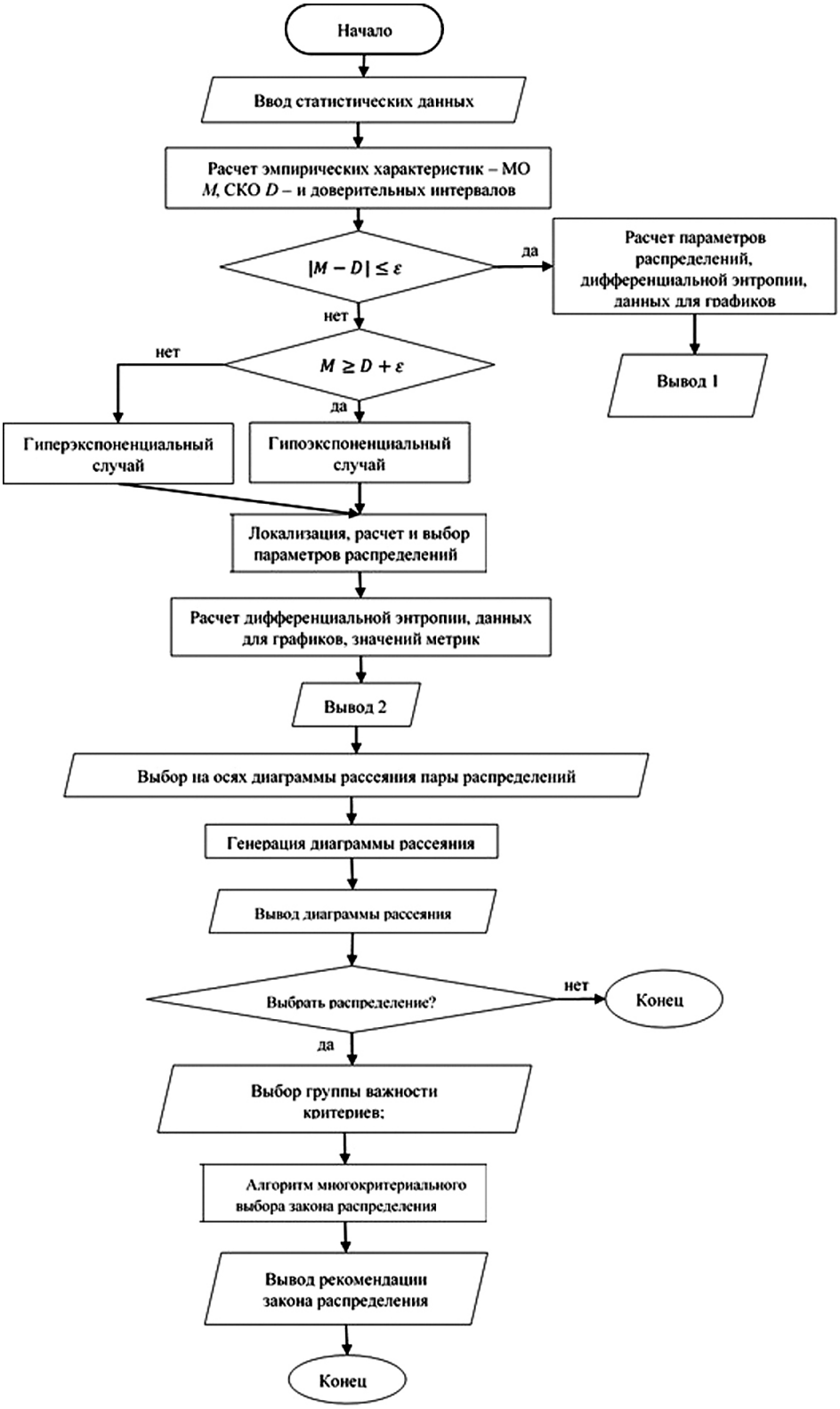


Рис. 1. Алгоритм сравнения и ранжирования законов распределения

3а.) Гипоэкспоненциальный случай, M не кратно D. Когда математическое ожидание больше СКО, т. е. $M > D+\epsilon$, в качестве моделей СВ предлагаются следующие распределения [9]: — гипоэкспоненциальное распределение; — распределение Вейбулла-Гнеденко; — гамма-распределение; — логарифмически нормальное распределение; — усеченное слева нормальное распределение; — обратное распределение Гаусса.

Гипоэкспоненциальное распределение с фазами двух типов удобно для аппроксимации двухпараметрических распределений положительно определенных СВ. Смысл распределенной по данному закону СВ — время пребывания системы в последовательно связанных состояниях, время пребывания в каждом из которых распределено по экспоненциальному закону: $n-1$ фаз с одной интенсивностью и 1 фаза — с другой интенсивностью. Распределение имеет три параметра, для определения которых достаточно двух эмпирических характеристик.

3б.) Гипоэкспоненциальный случай, M кратно D. Гипоэкспоненциальное распределение применимо, если M не кратно D. В противном случае используется распределение Эрланга с однотипными фазами. Остальные распределения в таком случае сохраняются, кроме гамма-распределения, которое вырождается в частный случай и совпадает с распределением Эрланга.

— алгоритм локализации корней уравнений методом равномерного поиска;

— расчет корней систем уравнений моментов функцией fsolve() из библиотеки scipy (Python);

— в случае неединственности решения — выбор по критерию максимизации близости плотности данного распределения к среднему арифметическому плотностей распределений, для которых система уравнений моментов имеет единственное решение.

1.2. *Сравнение и многокритериальное ранжирование законов распределения.* Для количественного и визуального сравнения законов распределения из выбранного набора в СППР используются:

— графики плотностей, функций распределения, интенсивностей и функций восстановления;

— аналитические метрики [15];

— диаграммы рассеяния [16].

Многокритериальная задача выбора наиболее подходящего распределения решается с помощью подхода, развитого Пиявским С. А. [17]. Важность приведенных шести критериев определяется пользователем путем отнесения к одной из четырех групп важности: очень важен, важен, не очень важен, не учитывать. Перевод данных нечетких оценок важности критериев пользователем в весовые коэффициенты важности критериев позволяет осуществить методика из [18]. Далее многокритериальная задача решается сведением к линейной свертке отдельных критериев. При этом каждому распределению ставится в соответствие количество баллов (от 1 до N, где N — количество возможных распределений для данного случая согласно естесвенной факторизации пространства эмпирических характеристик) по правилам из таблицы (столбец „Способ ранжирования распределения“). Дополнительные данные, которые указывает пользователь, отражены в последнем столбце таблицы.

Выводы. Приведенные алгоритмы и сценарии составляют основу интерактивной онлайн СППР при выборе закона распределения положительно определенной случайной величины. По нашему мнению, такая СППР может стать удобным для пользователей (инженеров, экономистов, биологов и др.) инструментом моделирования случайных

Таблица

Способ многокритериального выбора закона распределения случайной величины

№ п.п.	Критерий выбора распределения	Уровень важности критерия (определяется пользователем)	Способ ранжирования распределения	Дополнительная информация (предоставляет пользователь)
1.	Максимизация дифференциальной энтропии	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	от 1 до N баллов по возрастанию значения дифференциальной энтропии	
2.	Максимизация соответствия эмпирическим моментам более высокого порядка	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	от 1 до N баллов по убыванию значения эвклидовой нормы разностей моментов, расчитанных по данным и по законам распределений	Выбор количества учитываемых моментов
3.	Максимизация соответствия эмпирическим квантилям	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	от 1 до N баллов по убыванию значения эвклидовой нормы разностей уровней квантилей, расчитанных по данным и по законам распределений	Выбор количества и значения учитываемых квантилей
4.	Наличие аналитически заданной функции восстановления	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	1 балл — при отсутствии аналитически заданной функции восстановления; N/2 балла — при наличии трудновычислимой аналитически заданной функции восстановления; N баллов — при наличии аналитически заданной функции восстановления.	
5.	Характер функции интенсивности	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	В случае выбора монотонного характера функции интенсивности: 1 балл — распределения с немонотонной функцией интенсивности; N баллов — распределения с монотонной функцией интенсивности. В случае выбора немонотонного характера функции интенсивности (с учетом приработки): наоборот. В случае выбора другого характера функции интенсивности: N/2 балла — все распределения.	Выбор желаемого характера функции интенсивности: монотонный; немонотонный (с учетом приработки); другой
6.	Возможность разложения на экспоненциальные фазы	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	N баллов — при возможности разложения на экспоненциальные фазы; 1 балл — при невозможности разложения на экспоненциальные фазы.	

величин, их распределений и характеристик. Преимущества системы — интуитивно понятный интерфейс; доступность без установки программного обеспечения; возможность сохранения графических элементов в виде файлов; минимальный набор статистически надежных, интуитивно понятных входных данных; возможность наглядного адаптивного сравнения законов распределения случайных величин по разным критериям. В основе

СППР лежат существующие количественные и качественные критерии, степень важности которых пользователь сможет настраивать самостоятельно, учитывая необходимость нахождения компромисса между точностью модели и ее конструктивностью (вычислимостью). Стоит отметить, что, если есть подозрение на распределение с тяжелым хвостом, следует воспользоваться другими специальными методиками для выбора распределения.

Список литературы

1. Баранова А. А., Селянинов А. А., Вихарева Е. В. Критерий достоверности выбора закона распределения при моделировании процесса биологической деструкции // Математическое моделирование в естественных науках. Пермь: Изд. Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2015. Т. 1. С. 512—514.

2. Пономарев В. П., Белоглазов И. Ю. К выбору закона распределения времени на ремонт нефтяных скважин // Проблемы экономики и менеджмента. 2015. № 5 (45). С. 140—143.

3. Дуплякин В. М., Княжева Ю. В. Выбор закона распределения входного потока заявок при моделировании системы массового обслуживания торгового предприятия // Вестник СГАУ. 2012. № 6 (37). С.102—109.

4. Пушкарева Л. А., Пушкарева Т. А. Выбор и обоснование аналитического закона распределения скорости ветра в удмуртской республике для проектирования ветроустановки // Теоретические и практические аспекты развития научной мысли в современном мире: сборник статей Международной научно-практической конференции (Самара, 8 октября 2017 г.). Уфа: Общество с ограниченной ответственностью „Аэтерна“, 2017. С. 67—71.

5. Панов К. В. Выбор законов распределения потока заявок и простоев локомотивов на обслуживании в депо // Инновационные проекты и технологии в образовании, промышленности и на транспорте: сборник трудов научной конференции (Омск, 8 февраля 2019 г.). Омск: Изд. Омского государственного университета путей сообщения, 2019. С. 227—233.

6. Линец Г. И., Никулин В. И., Мельников С. В. Выбор критерия идентификации закона распределения случайных величин трансионосферных каналов связи // XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов (Москва, 28—31 января 2020 г.). М.: Изд. Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, 2020. С. 254—256.

7. Акимов С. С. Проблема выбора метода восстановления закона распределения вероятности // МНИЖ. 2014. № 1—3 (20). С. 5—8.

8. Тырсин А. Н. Метод подбора наилучшего закона распределения непрерывной случайной величины на основе обратного отображения // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2017. № 1. С. 31—38.

9. Смирнов С. В. Моделирование „сверхнерегулярных“ случайных величин по экспериментальным данным // Автоматизация научных исследований: Межвуз. сб. научн. трудов. Куйбышев: КуАИ, 1988. С. 52—57.

10. Коваленко А. И., Смирнов С. В. Сравнение гиперэкспоненциального распределения с другими моделями положительно определенных случайных величин // Инфокоммуникационные технологии. Самара, 2019. Том 17, № 1. С. 9—16.

11. Ivleva A., Smirnov S. Comparison of Models of Positively Defined Random Variables // XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). Samara, 2019. P. 449—454.

12. Bladt M., Nielsen B. F. Matrix-Exponential Distributions in Applied Probability (Probability Theory and Stochastic Modelling 81). Springer: Science+Business Media LLC, 2017.

13. Рыжиков Ю. И., Уланов А. В. Применение гипер-экспоненциальной аппроксимации в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 3. С. 60—65

14. Байхельт Ф., Франкен М. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. М.: Радио и связь, 1988.

15. Калашников В. В., Рачев С. Т. Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. М.: Наука, 1988.

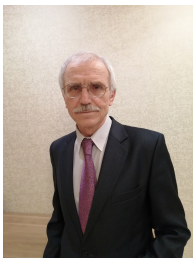
16. Хименко В. И. Случайные данные: структура и анализ. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018.

17. Пиявский С. А. Метод универсальных коэффициентов при принятии многокритериальных решений // Онтология проектирования. 2018. т. 8. № 3(29). С. 449-468. DOI: 10.18287/2223-9537-2018-8-3-449-468.

18. Пиявский С. А. Как „нумеризовать“ понятие „важнее“ // Онтология проектирования. 2016. т.6, 34(22). С. 414-435. DOI: 10.18287/2223-9537-2016-6-4-414-435.

Ивлева Анна Игоревна — канд. техн. наук., старш. науч. сотр. Института проблем управления сложными системами РАН — обособленного подразделения Самарского федерального исследовательского центра РАН, e-mail: annushka199@bk.ru. Окончила Севастопольский государственный университет в 2013 г. Количество печатных работ — 37. Область научных интересов: моделирование сложных систем, системный анализ, анализ данных, искусственный интеллект, концептуальное моделирование, онтологический инжиниринг, информационные технологии, марковские и полумарковские процессы, многокритериальная оптимизация.

Anna Ivleva — candidate of Engineering Sciences, senior researcher, Samara Federal Research Scientific Center RAS, Institute for the Control of Complex Systems RAS, e-mail: annushka199@bk.ru. Graduated from Sevastopol State University in 2013. The number of publications: 37. Research interests: modeling of complex systems, system analysis, data analysis, artificial intelligence, conceptual modeling, ontological engineering, information technologies, Markov and semi-Markov processes, multi-criteria optimization.



Смирнов Сергей Викторович — д-р техн. наук, главн. науч. сотр. Института проблем управления сложными системами РАН — обособленного подразделения Самарского федерального исследовательского центра РАН, e-mail: smirnov@iccs.ru. Окончил Куйбышевский авиационный институт в 1975 г. Количество печатных работ: более 170 (в т. ч. 2 монографии). Область научных интересов: анализ данных, искусственный интеллект, информационные технологии.

Sergey Smirnov — PhD in Engineering Sciences, chief researcher, Samara Federal Research Scientific Center RAS, Institute for the Control of Complex Systems RAS, e-mail: smirnov@iccs.ru. Graduated from Kuibyshev Aviation Institute in 1975. The number of publications: more than 170 (including 2 monographs). Research interests: data analysis, artificial intelligence, information technologies.

Дата поступления — 06.03.2021

OPTIMAL ROTOR STABILIZATION IN AN ELECTROMAGNETIC SUSPENSION SYSTEM USING TAKAGI-SUGENO FUZZY MODELS

A. V. Mukhin

Lobachevsky State University,
603950, Nizhny Novgorod, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-26-37

An electromagnetic suspension is a rotor located in the field of gravity and the magnetic attraction force acting on the side of the electromagnet. When the two forces are equal, the rotor is stationary. The operation principle of an electromagnetic suspension is based on the phenomenon of magnetic levitation, which is applied in active magnetic bearings. Thanks to this, it becomes possible to overcome gravity without contact and to provide the rotor hanging in active magnetic bearings. The obvious advantage of such systems is, first of all, the absence of mechanical contact and, as a consequence, the absence of friction. This advantage allows significantly increase the service life and efficiency compared to traditional mechanical counterparts.

The magnetic forces acting on the electromagnet are controlled by a control system that ensures a stable equilibrium position of the rotor. It is necessary to note that an electromagnetic suspension is inherently unstable system and it is describes nonlinear differential equations which present additional difficulties for the control low realizing. The standard scheme of the electromagnetic suspension assumes the presence of a sensor of the position of the suspended body as the main element for forming feedback in the control loop. Also there is another scheme that involves measuring only the current in the circuit of the electromagnet without measuring the position of the body and its speed. The advantages of such a scheme are the compactness and reliability of the design, as well as the lower cost compared to the traditional scheme.

The control of the rotor in an electromagnetic suspension is an important and actual task associated with the wide practical application of electromagnetic bearings. The practical application of electromagnetic bearings covers a wide range of different areas of industry and technology, as well as some areas of medicine. For the construction of regulators, the most widely used approach is based on the use of linearized models. Despite its simplicity and convenience, the obvious disadvantage of linearized models is their limited applicability. Linearized models correctly describe the dynamics of an object only in the neighborhood of the equilibrium position, with small initial deviations. In fact, the initial perturbations of an object can go far beyond the applicability of linearized models. As a result, the regulators calculated on the basis of linearized systems are only operable for small initial perturbations. One of the ways to take into account the nonlinearities of the object and build corresponding controllers can be the use of fuzzy logic and fuzzy systems based on it.

This paper presents the results of solving the problem of constructing fuzzy output regulators for an electromagnetic suspension system based on the use of Takagi-Sugeno fuzzy models. Two control problems are considered: the construction of stabilizing regulators and the construction of optimal regulators according to a given quadratic quality criterion.

To solve these problems, the original nonlinear mathematical model was transformed to a special form, and then replaced with an equivalent fuzzy model consisting of a set of linear subsystems.

© A. V. Mukhin, 2021

To construct a fuzzy mathematical model of the system, triangular distribution functions were used. Ultimately, the fuzzy model was represented as a weighted sum of all linear subsystems. To synthesize the control laws, we used the apparatus of linear matrix inequalities, extended to the case of fuzzy systems. In this case, for each linear subsystem is consistent with its own system of linear matrix inequalities.

As a result of numerical calculations, fuzzy controllers of both types were obtained, which were then alternately substituted into the original nonlinear object closed by the fuzzy controller. To check the operability of the regulators, mathematical modeling of the rotor dynamics was performed. Transient processes in a closed system are presented as simulation results.

The results of numerical calculations and mathematical modeling showed that using the Takagi-Sugeno fuzzy models, it is possible to construct both a stabilizing regulator and an optimal regulator according to a given quadratic quality criterion for controlling the rotor in an electromagnetic suspension. The found regulators provided stabilization of the rotor in a fairly wide range of initial perturbations, up to the maximum possible values. Based on the results obtained, it can be concluded that the presented approach, based on the use of fuzzy Takagi-Sugeno models, allows to stabilize the rotor in an electromagnetic suspension system in a wide range of initial perturbations.

Key words: electromagnetic suspension, magnetic levitation, rotor, stabilization, fuzzy Takagi-Sugeno models, linear matrix inequalities.

References

1. Zhuravlev Yu.N. Active Magnetic Bearings. Theory, Calculation, Application. SPb.: Politechnica, 2003.

2. Schweitzer G., and Maslen E. Magnetic Bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. Berlin: Springer, 2009.

3. Grinvald V. M., Kusmin G. S., Masloboev Yu. P., Selishchev S. V., Telyshev D. V. First domestic ventricular assistant device AVK-N „Sputnik“ on basis of implantable blood pump // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektronika. 2015. Vol. 20. N 5. P. 516–521.

4. Masuzawa T., Osa M., Mapley M. Ch. 11: Motor design and impeller suspension // Mechanical Circulatory and Respiratory Support. Elsevier, 2017. P. 335–377.

5. Balandin D. V., Biryukov R. S., Kogan M. M., Fedyukov A. A. Optimal stabilization of bodies in electromagnetic suspensions without measurements of their locations // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. N 56. P. 351–363.

6. Gruber W., Pichler M., Rothbock M., Amrhein W. Self-Sensing Active Magnetic Bearing Using 2-Level PWM Current Ripple Demodulation // Proc. 7th Intern. Conf. on Sensing Technology. Wellington, New Zealand, 2013. P. 591–595.

7. Gluck T., Kemmetmuller W., Tump C., Kugi A. Resistance Estimation Algorithm for Self-Sensing Magnetic Levitation Systems // Proc. 5th IFAC Symp. on Mechatronic Systems. Boston, USA, 2010. P. 32–37.

8. Kumar V., Jerome J. LQR Based Optimal Tuning of PID Controller for Trajectory Tracking of Magnetic Levitation System // Procedia Engineering. 2013. V. 64. P. 254–264.

9. Yang Yifei, Zhu Huangqiu. Optimal Control and Output Feedback Design Options for Active Magnetic Bearing Spindle Position Regulation // J. Networks. 2013. V. 8. P. 1624–1631.

10. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 1985. Vol. 15. N 116. P. 116–132.

11. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities. M.: Fizmatlit, 2007.

12. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РОТОРА В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОДВЕСА С ПОМОЩЬЮ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ TAKAGI-SUGENO

А. В. Мухин

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
603950, Нижний Новгород, Россия

УДК 517.977
DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-26-37

В статье представлены результаты решения задачи стабилизации ротора в системе электромагнитного подвеса на основе применения нечетких моделей Takagi-Sugeno. Рассмотрены две задачи управления: построение стабилизирующих регуляторов и построение оптимальных регуляторов по заданному квадратичному критерию качества.

Для решения поставленных задач исходная нелинейная математическая модель преобразовывалась к определенному виду, а затем заменялась эквивалентной нечеткой моделью, состоящей из совокупности линейных подсистем. Для построения нечеткой математической модели использовались функции распределения треугольного вида. Результирующая нечеткая модель представлялась как взвешенная сумма всех линейных подсистем. Для синтеза законов управления применялся аппарат линейных матричных неравенств, расширенный на случай нечетких систем. В этом случае каждой линейной подсистеме соответствовала своя система линейных матричных неравенств.

В результате проведения численных расчетов были получены нечеткие регуляторы обоих типов, которые затем поочередно подставлялись в исходный нелинейный объект, замкнутый нечетким регулятором. Для проверки работоспособности регуляторов выполнялось математическое моделирование динамики ротора. В качестве результатов моделирования представлены переходные процессы в замкнутой системе.

Результаты численных расчетов и проведенного математического моделирования показали, что с помощью нечетких моделей Takagi-Sugeno можно построить как стабилизирующий регулятор, так и оптимальный регулятор по заданному квадратичному критерию качества для управления ротором в электромагнитном подвесе. Найденные регуляторы обеспечивали стабилизацию ротора в достаточно широком диапазоне начальных возмущений, вплоть до максимально возможных значений. Основываясь на полученных результатах, можно заключить, что представленный подход, основанный на использовании нечетких моделей Takagi-Sugeno, позволяет в широком диапазоне начальных возмущений стабилизировать ротор в системе электромагнитного подвеса.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, магнитная левитация, нелинейный объект, ротор, стабилизация, нечеткие модели Takagi-Sugeno, линейные матричные неравенства.

Введение. Принцип действия электромагнитного подвеса основан на явлении магнитной левитации. Благодаря этому эффекту становится возможным бесконтактно преодолевать гравитацию и обеспечивать вывешивание тела в активных магнитных подшипниках.

© А. В. Мухин, 2021

Очевидным преимуществом таких систем является, прежде всего, отсутствие механического контакта и как следствие — отсутствие трения. Это преимущество позволяет существенно увеличить срок эксплуатации и КПД по сравнению с традиционными механическими аналогами.

Управление ротором в электромагнитном подвесе является важной и актуальной задачей, связанной с широким практическим применением электромагнитных подшипников. Практическое применение электромагнитных подшипников охватывает целый спектр самых разных областей промышленности и техники, а также некоторых областей медицины [1–4]. Управление реализуется, как правило, путем изменения величины магнитного поля, создаваемого электромагнитом. Для построения регуляторов наибольшее распространение получил подход, основанный на применении линеаризованных моделей [5–9]. При этом система дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитный подвес, представляет собой нелинейный объект. Несмотря на простоту и удобство, очевидным недостатком линеаризованных моделей является их ограниченная применимость. Линеаризованные модели работают только в окрестности положения равновесия, при небольших начальных отклонениях. В действительности, начальные возмущения объекта могут выходить далеко за пределы применимости линеаризованных моделей. Вследствие этого такие модели не могут в полной мере описывать динамику исследуемого объекта, а вычисленные регуляторы работоспособны только при небольших начальных возмущениях. Одним из способов учета нелинейностей и построения нелинейных регуляторов может быть использование нечеткой логики и нечетких систем на ее основе.

В статье представлены результаты решения задачи управления ротором в электромагнитном подвесе на основе применения непрерывных нечетких моделей Takagi-Sugeno [10]. Рассматривались задачи управления по измеряемому выходу в предположении, что измеряемой переменной является вертикальное смещение ротора. В рамках данной задачи применялись два подхода: построение стабилизирующего регулятора и построение оптимального регулятора с заданным квадратичным критерием качества. Для синтеза законов управления использовался аппарат линейных матричных неравенств [11].

Статья включает в себя введение, четыре раздела, заключение и список литературы. В первом разделе представлен вывод нечеткой математической модели. Второй раздел представляет собой постановку задач управления. В третьем разделе представлены системы линейных матричных неравенств, а также процедура для их численной реализации. Четвертый раздел содержит результаты математического моделирования.

1. Нечеткая модель объекта. Ротор в электромагнитном подвесе находится в поле действия двух сил: силы тяжести и силы магнитного притяжения. Согласно второму закону Ньютона, при равенстве этих сил тело будет находиться в неподвижном состоянии. Динамика ротора в подвесе описывается следующей системой уравнений [5]

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x_3)^2}{(1-x_1)^2} - 1\right], \\ \dot{x_3} &= -\frac{(1+x_3)}{(1-x_1)}x_2 - a\,(1-x_1)\,x_3 + (1-x_1)\,u, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)^T \in R^{n_x}$ — вектор состояния системы; $u \in R^{n_u}$ — управление; a — постоянная величина ($a = 7{,}5$).

Безразмерная переменная x_1 соответствует вертикальному перемещению ротора, x_2 соответствует скорости перемещения, а x_3 описывает ток в цепи электромагнита. Для вывода нечеткой модели Takagi-Sugeno необходимо привести объект (1) к следующему виду

$$\dot{x} = F(\sigma)x + B(\sigma)u, \;\; x\,(0) = x_0, \tag{2}$$

где $F(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}$; $B(\sigma) \in R^{n_x \times n_u}$; $\sigma = \sigma(x) \in R^{n_\sigma}$.

Элементами матриц $F(\sigma)$ и $B(\sigma)$ должны быть непрерывные нелинейные функции $\sigma_i(x)$. Для преобразования объекта (1) к виду (2) введем новую фазовую переменную

$$x_4 = \frac{1 + x_3}{1 - x_1} \tag{3}$$

Продифференцировав выражение (3), получим следующее линейное уравнение

$$\dot{x_4} = \frac{\dot{x_3} + x_4 x_2}{1 - x_1} = -a x_3 + u. \tag{4}$$

Таким образом, после преобразования система уравнений, описывающих электромагнитный подвес, примет следующий вид

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= \; x_2, \\
\dot{x_2} &= \frac{1}{2}\left[{x_4}^2 - 1\right], \\
\dot{x_3} &= -x_4 x_2 - a\,(1 - x_1)\,x_3 + (1 - x_1)\,u, \\
\dot{x_4} &= -a x_3 + u,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $x^* = (x_1,\; x_2,\; x_3,\; x_4)^T \in R^{{n_x}^*}$ — состояние системы; $u \in R^{n_u}$ — управление.

Переход от (1) к (5) означает отображение вида $R^{n_x} \longmapsto R^{{n_x}^*}$. Теперь приведем систему (5) к матричному виду (2). Матрицы $F(\sigma)$ и $B(\sigma)$ запишутся как

$$F(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B\,(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\sigma_1 = \frac{1}{2}(x_4 - \frac{1}{x_4})$; $\sigma_2 = a x_3$; $\sigma_3 = -x_4$; $\sigma_4 = a(x_1 - 1)$; $\sigma_5 = -x_2$; $\sigma_6 = 1 - x_1$.

Зададим подмножество $\Omega = \{a_{i_1} \leqslant x_i < a_{i_2}, i = \overline{1,{n_x}^*}\}$, в котором будем рассматривать нелинейный объект (5). Для того чтобы обеспечить непрерывность функции σ_1, сделаем следующую замену во втором уравнении системы (5):

$$\dot{x_2} = \frac{1}{2}\left[{x_4}^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\,(x_4 - 1)\,(x_4 + 1) = \frac{1}{2}{x_4}^*({x_4}^* + 2). \tag{7}$$

Опустив звездочку в новой переменной ${x_4}^*$, система уравнений примет следующий вид

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2, \\
\dot{x_2} &= \frac{1}{2}x_4(x_4+2), \\
\dot{x_3} &= -(x_4+1)x_2 - a\,(1-x_1)\,x_3 + (1-x_1)\,u, \\
\dot{x_4} &= -ax_3 + u,
\end{aligned} \tag{8}$$

Для каждой функции σ_i определим соответствующие функции принадлежности вида

$$M_{i1,2} = \frac{\pm\sigma_i \mp \sigma_i^{min,max}}{\sigma_i^{max} - \sigma_i^{min}},\ i = \overline{1,n_\sigma} \tag{9}$$

Область значений каждой функции принадлежности образует свое нормированное нечеткое множество. Сформируем базу нечетких правил для исследуемого объекта (8)

$$\begin{gathered}
R^i : IF\ \sigma_1\ is\ \ M_{11}\ and\ \ldots and\ \sigma_{n_\sigma}\ is\ \ M_{n_\sigma 1} \\
THEN\ \dot{x}(t) = A_i x\,(t) + B_i u\ (t),
\end{gathered} \tag{10}$$

где R^i — нечеткое правило ($i = \overline{1,r}$), $r = 2^{n_\sigma}$ — количество правил;

Тогда, нечеткая модель нелинейной системы (8) представляется как взвешенная сумма всех линейных подсистем

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} h_i\,(\sigma)\,[A_i x + B_i u] \tag{11}$$

где $h_i\,(\sigma) = \prod_{j=1}^{n_\sigma} M_{i1,2}^j(\sigma_j)$ — произведение функций принадлежности.

Полученная непрерывная нечеткая модель (11) представляет нелинейный объект (8) на рассматриваемом подмножестве Ω.

Прежде чем переходить к постановке задачи, сделаем одно упрощение. Поскольку наибольшее количество нелинейных функций сосредоточено в третьем уравнении системы (8), то линеаризация этого уравнения позволит существенно сократить количество правил и, тем самым, упростить весь дальнейший теоретический анализ. После линеаризации этого уравнения в окрестности положения равновесия система (8) примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2, \\
\dot{x_2} &= \frac{1}{2}x_4(x_4+2), \\
\dot{x_3} &= -x_2 - ax_3 + u, \\
\dot{x_4} &= -ax_3 + u.
\end{aligned} \tag{12}$$

Единственная нелинейная функция σ_1 запишется как

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(x_4+2). \tag{13}$$

Окончательная нечеткая модель нелинейной системы (12) запишется в следующем виде

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} M_i A_i x + B_u \tag{14}$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим две задачи управления по измеряемому выходу: первая задача — построение стабилизирующего нечеткого регулятора, вторая — нечеткого регулятора с квадратичным критерием качества. В качестве измеряемой переменной будем считать вертикальное перемещение ротора $\mathbf{x_1}$. Соответствующее матричное уравнение измеряемого выхода

$$y = C_2 x, \tag{15}$$

$y \in R^{n_y}$ — измеряемый выход; $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Закон управления линейной системой по измеряемому выходу в форме линейного динамического регулятора имеет следующий вид [11]

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r{}^i x_r(t) + B_r{}^i y \\ u(t) &= C_r{}^i x_r(t) + D_r{}^i y, \end{aligned} \tag{16}$$

где $x_r \in R^{n_x{}^*}$ — состояние регулятора.

В случае нечеткой системы исходный объект представляется в виде совокупности линейных подсистем, каждая из которых характеризуется своими матрицами. Запишем нечеткую модель управления в форме нечеткого динамического регулятора для системы (14)

$$\begin{aligned} \dot{x_r} &= \sum_{i=1}^{r} M_i \overset{i}{A}_r x_r + \sum_{i=1}^{r} M_i \overset{i}{B}_r y \\ u &= on \sum_{i=1}^{r} M_i \overset{i}{C}_r x_r + \sum_{i=1}^{r} M_i \overset{i}{D}_r y. \end{aligned} \tag{17}$$

Для второй задачи введем в рассмотрение уравнение целевого выхода $z(t) \in R^{n_z}$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{18}$$

В качестве квадратичного критерия будем рассматривать следующий функционал

$$\|z\|^2 = \int_0^\infty \left(\sum_{i=2}^{n_x{}^*} x_i(t)^2 + u(t)^2 \right) dt. \tag{19}$$

Задача заключается в вычислении такого нечеткого регулятора вида (17), который будет удовлетворять следующим неравенствам

$$\|z(t)\|^2 < \gamma^2 |x_0|^2, \ \ \forall x_0 \neq 0. \tag{20}$$

Приведем уравнение (18) к следующему виду

$$z(t) = \left(C + DD_r{}^i C_2\right) x + DC_r{}^i x_r = C_c^i x_c. \tag{21}$$

Тогда замкнутая нечеткая система примет следующий вид

$$\dot{x_c} = \sum_{i=1}^{r} M_i {A_c}^i x_c,$$
$$z = \sum_{i=1}^{r} M_i C_c^i x_c, \tag{22}$$

где $x_c = (x\ x_r)^T$.

Матрицы замкнутых подсистем определяются следующим образом

$${A_c}^i = \begin{pmatrix} A_i + BD_r^i C_2 & BC_r^i \\ B_r^i C_2 & A_r^i \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$C_c^i = \begin{bmatrix} \left(C + DD_r{}^i C_2\right) & DC_r{}^i \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Таким образом, требуется вычислить два нечетких регулятора по измеряемому выходу: регулятор стабилизирующего типа и γ-оптимальный регулятор по критерию (20).

3. Методика вычислений. Для синтеза законов управления использовался аппарат линейных матричных неравенств [11], адаптированный для случая нечетких систем.

Вычисление стабилизирующего нечеткого регулятора. Для того чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы (22) с матрицами (23), необходимо и достаточно найти такую общую матрицу квадратичной функции $\mathbf{X}=\mathbf{X^T}>\mathbf{0}$, которая удовлетворяет следующим неравенствам

$$\left({A_c}^i\right)^T X + X {A_c}^i < 0, \quad i = \overline{1, r}. \tag{25}$$

Введем матрицу параметров регуляторов Θ_i и представим матрицы замкнутых подсистем в следующем виде

$${A_c}^i = {A_0}^i + B_0 \Theta_i C_0, \tag{26}$$

где ${A_0}^i = \begin{pmatrix} A_i & 0_{n_x{}^* \times n_x{}^*} \\ 0_{n_x{}^* \times n_x{}^*} & 0_{n_x{}^* \times n_x{}^*} \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x{}^* \times n_x{}^*} & B \\ I_{n_x} & 0_{n_x{}^* \times n_u} \end{pmatrix}$, $C_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x{}^* \times n_x{}^*} & I_{n_x} \\ C_2 & 0_{n_y \times n_x{}^*} \end{pmatrix}$;
$\Theta_i = \begin{pmatrix} A_r^i & B_r^i \\ C_r^i & D_r^i \end{pmatrix}$.

Подставим (26) в (25) и запишем полученные неравенства в виде

$$\left({A_0}^i\right)^T X + X {A_0}^i + C_0^T {\Theta_i}^T B_0^T X + X B_0 \Theta_i C_0 < 0. \tag{27}$$

Далее приведем неравенства (27) к системе линейных матричных неравенств [11] вида

$$\Psi_{\mathrm{i}} + P^T {\Theta_i}^T Q + Q^T \Theta_i P < 0, \quad i = \overline{1, r}. \tag{28}$$

В [11] показано, что выполнение неравенств (28) для регуляторов полного порядка эквивалентно выполнению следующих линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} W_C^T ({A_i}^T X_{11} + X_{11} A_i) W_C < 0, \quad X_{11} &= X_{11}^T > 0, \\ W_{B^T}^T (Y_{11} {A_i}^T + A_i Y_{11}) W_{B^T} < 0, \quad Y_{11} &= Y_{11}^T > 0, \end{aligned} \tag{29}$$

где W_C и W_{B^T} образуют базисы ядер матриц C и B^T соответственно; X_{11} и Y_{11} — верхние левые блоки двух взаимообратных матриц X и Y.

Для того чтобы выполнялось условие $XY = I$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} > 0. \tag{30}$$

Таким образом, объект стабилизируем тогда и только тогда, когда существуют две положительно определенные симметрические матрицы X_{11} и Y_{11}, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (29) и (30). Если матрицы X_{11} и Y_{11} найдены, то общая матрица квадратичной формы X может быть восстановлена по формуле [11].

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11} - {Y_{11}}^{-1} \\ X_{11} - {Y_{11}}^{-1} & X_{11} - {Y_{11}}^{-1}. \end{pmatrix} \tag{31}$$

После того, как матрица X найдена, матрицы параметров регуляторов Θ_i вычисляются из неравенств (28) и затем подставляются в нечеткий динамический регулятор (17).

Вычисление нечеткого γ-оптимальноrо регулятора. Как было отменно выше, задача γ-оптимального нечеткого управления состоит в вычислении такого нечеткого регулятора, который обеспечивает выполнение условия (20) для всех линейных подсистем. Для выполнения этого условия нормы передаточных матриц замкнутого объекта должны удовлетворять условиям

$$\left\| {H_c}^i \right\|_2 < \gamma |x_0| \ \forall x_0 \neq 0 \tag{32}$$

где ${H_c}^i = [C \ + DD_r^i C_2 \ \ DC_r^i]\left(sI - {A_c}^i\right)^{-1} x_c^0$.

Основная идея вычисления регуляторов такого типа заключается в приведении матриц замкнутых подсистем ${A_c}^i$ к линейным матричным неравенствам вида (28). Последующие действия аналогичны предыдущему случаю. Сначала вычисляются матрицы Ψ_{i}, а затем из (28) находятся искомые матрицы регуляторов. Поскольку матрицы Ψ_{i} содержат общую неизвестную положительно определенную симметрическую блочную матрицу, то необходимо сначала вычислить эту матрицу. Поскольку ранги матриц P и Q меньше ранга матриц Ψ_{i}, то для системы неравенств (28) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие матричные неравенства

$${W_P}^T \Psi_i W_P < 0, \ \ {W_Q}^T \Psi_i W_Q < 0, \tag{33}$$

где W_P и W_Q — ядра матриц P и Q соотвественно, т. е. $PW_P = 0$ и $QW_Q = 0$.

Выполнив ряд матричных преобразований, учитывая блочную структуру матриц, неравенства (33) можно привести к следующим неравенствам

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} {A_i}^T X_{11} + X_{11} A_i & C^T \\ C & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \\ N^T \begin{pmatrix} Y_{11} {A_i}^T + A_i Y_{11} & Y_{11} C^T \\ C Y_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} N \ < 0, \end{gathered} \tag{34}$$

где столбцы матриц W_{C_2} и N образуют базисы ядер матриц C_2 и $(B^T \ D^T)$ соответственно.

Для существования γ-оптимальных регуляторов полного порядка необходимо и достаточно, чтобы существовали две положительно определенные симметрические матрицы X_{11} и Y_{11}, удовлетворяющие неравенствам (34), а также неравенствам

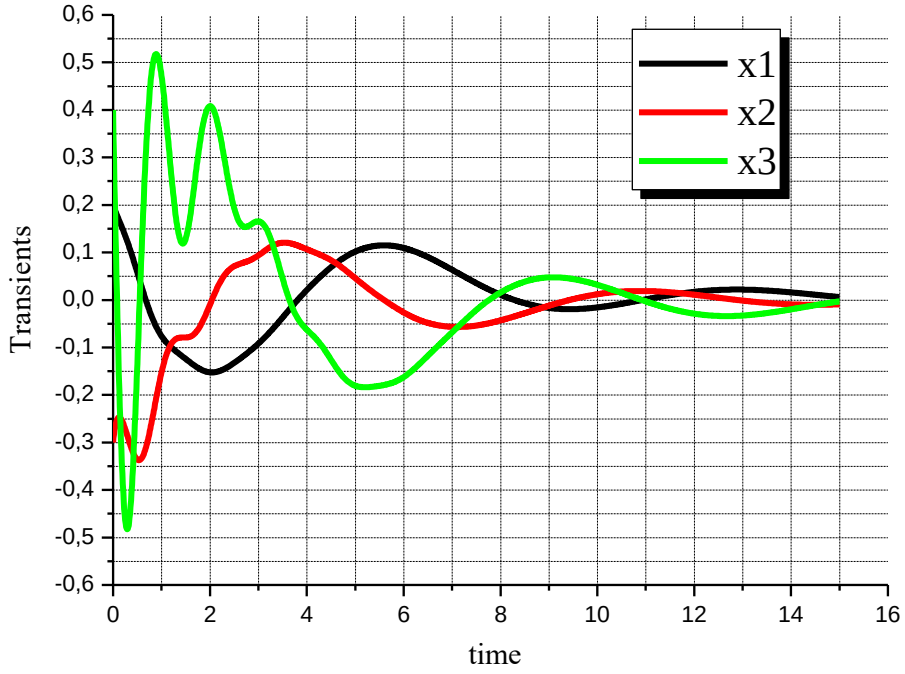


Рис. 1. Переходные процессы в замкнутой системе с нечетким регулятором стабилизирующего типа

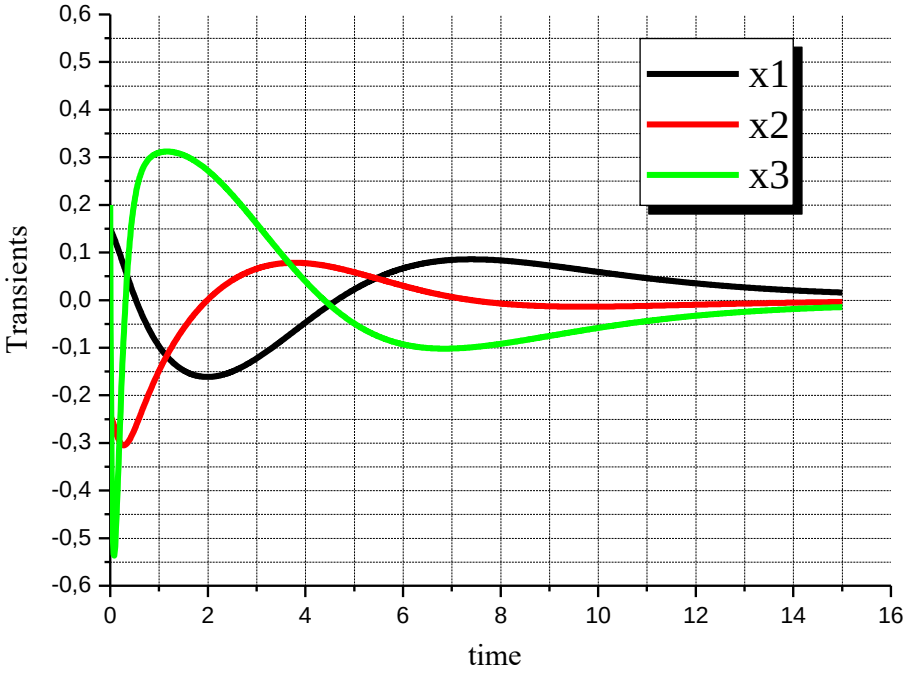


Рис. 2. Переходные процессы в замкнутой системе с нечетким γ-оптимальным регулятором

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & Y_{11} \end{pmatrix} \geqslant 0 \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \gamma I_{n_x} \end{pmatrix} > 0, \tag{36}$$

где $i = \overline{1,r}$.

Если матрицы X_{11} и Y_{11} найдены, то матрица Y может быть восстановлена по формуле

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{11} - {X_{11}}^{-1} \\ Y_{11} - {X_{11}}^{-1} & Y_{11} - {X_{11}}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Если матрица X найдена, матрицы параметров регуляторов Θ_i вычисляются из неравенств (28) и затем подставляются в нечеткий динамический регулятор (17).

Линейные матричные неравенства и системы неравенств определяют нелинейные, но выпуклые ограничения [11]. Поэтому, для численной реализации могут использоваться методы выпуклой оптимизации. Разрешимость системы неравенств (29) сводится к минимизации параметра t, для которого справедливо линейное матричное неравенство вида $F(x) - tI \leqslant 0$. Система неравенств (34–36) представляет собой задачу разрешимости линейной функции с ограничениями, заданными системой линейных матричных неравенств. Для численной реализации систем линейных матричных неравенств применялся алгоритм внутренней точки (interior-point method), реализованный в форме стандартных команд пакета программ MATLAB [12].

Графики переходных процессов в системе с нечетким γ-оптимальным регулятором показаны на рис. 2.

4. Результаты. Вычисленные регуляторы поочередно подставлялись в исходный нелинейный объект (1), замкнутый нечетким регулятором (17). Графики переходных процессов в системе с регулятором стабилизирующего типа представлены на рис. 1.

Исходя из сравнительного анализа рис. 1 и 2, можно сделать вывод о том, что γ-оптимальный регулятор обеспечивает стабилизацию с лучшим качеством переходных процессов, чем стабилизирующий нечеткий регулятор. Результаты математического моделирования показали, что вычисленные нечеткие регуляторы обоих типов позволяют стабилизировать ротор в широком диапазоне начальных возмущений, вплоть до максимально возможных значений.

Заключение. В статье представлены результаты решения задачи управления ротором в электромагнитном подвесе по измеряемому выходу. Выведены нечеткая модель объекта, эквивалентная исходной нелинейной модели, а также нечеткая модель управления. Выполнены численные расчеты нечетких регуляторов. Проведено математическое моделирование переходных процессов.

По результатам проведенной работы можно заключить, что, измеряя только перемещение ротора, можно вычислить как стабилизирующий регулятор, так и γ-оптимальный регулятор с квадратичным критерием качества. Найденные нечеткие регуляторы обеспечивали стабилизацию ротора при любых начальных возмущениях, вплоть до максимально возможных значений. Таким образом, представленные нечеткие модели, в отличие от линеаризованных моделей, позволяют в более широком диапазоне начальных возмущений стабилизировать ротор в электромагнитном подвесе.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Д. В. Баландина за консультацию и интерес к работе.

Список литературы

1. Zhuravlev Yu.N. Active magnetic bearings. Theory, calculation, application. SPb.: Politechnica, 2003.

2. Schweitzer G. Magnetic bearings theory, design, and application to rotating machinery. Berlin: Springer, 2009.

3. Grinvald V. M., Kusmin G. S., Masloboev Yu. P., Selishchev S. V., Telyshev D. V. First domestic ventricular assistant device AVK-N „Sputnik“ on basis of implantable blood pump // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektronika. 2015. Vol. 20. N 5. P. 516–521.

4. Masuzawa T., Osa M., Mapley M. Ch. 11: Motor design and impeller suspension // Mechanical Circulatory and Respiratory Support. Elsevier, 2017. P. 335–377.

5. Balandin D. V., Biryukov R. S., Kogan M. M., Fedyukov A. A. Optimal stabilization of bodies in electromagnetic suspensions without measurements of their locations // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. N 56. P. 351–363.

6. Gruber W., Pichler M., Rothbock M., Amrhein W. Self-Sensing Active Magnetic Bearing Using 2-Level PWM Current Ripple Demodulation // Proc. 7th Intern. Conf. on Sensing Technology. Wellington, New Zealand, 2013. P. 591–595.

7. Gluck T., Kemmetmuller W., Tump C., Kugi A. Resistance Estimation Algorithm for Self-Sensing Magnetic Levitation Systems // Proc. 5th IFAC Symp. on Mechatronic Systems. Boston, USA, 2010. P. 32–37.

8. Kumar V., Jerome J. LQR Based Optimal Tuning of PID Controller for Trajectory Tracking of Magnetic Levitation System // Procedia Engineering. 2013. V. 64. P. 254–264.

9. Yang Yifei, Zhu Huangqiu. Optimal Control and Output Feedback Design Options for Active Magnetic Bearing Spindle Position Regulation // J. Networks. 2013. V. 8. P. 1624–1631.

10. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 1985. Vol. 15. N 116. P. 116–132.

11. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities. M.: Fizmatlit, Moscow, 2007.

12. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.

Мухин Алексей Валерьевич — аспирант кафедры дифференциальных уравнений математического и численного анализа ННГУ им. Н. И. Лобачевского;

e-mail: myhin-aleksey@yandex.ru;

тел. 8-929-047-64-75.

Область научных интересов: математическое моделирование, математическая теория управления, нечеткие системы.

Aleksey Mukhin — postgraduate, department of differential equations, mathematical and numerical analysis Lobachevsky State University;

Area of scientific interests: mathmatical modeling, mathematical control system, fuzzy system.

Дата поступления — 06.03.2021

OPTIMIZING THE DYNAMICS OF THE HOSPITAL NETWORK TAKING INTO ACCOUNT THE ERRORS OF OBSERVATION RESULTS

E. V. Proydakova, M. A. Fedotkin

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (UNN)
603950, Nizhnij Novgorod, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-38-48

In Russia, over the past few years, there has been a tendency for an increase in the number of elderly citizens and the incidence of this category of persons. The situation that has arisen requires an increase in the efficiency of the existing system of medical institutions for each specific subject in the context of limited financial and other resources in health care. This task cannot be solved without an analytical study aimed at economic optimization of costs in each medical institution and in the network of medical institutions of the subject as a whole.

In this paper, we use a representation of the process of functioning of a network of medical institutions in the form of a control cybernetic system. The authors, using the cybernetic approach, have synthesized a mathematical model of the functioning of a typical medical institution of the network in the form of a control system. The created mathematical model allows for a single measurement with a given accuracy to generate the values of the main indicators of the work of a medical institution during each reporting period and, thus, to obtain additional statistics of any final volume for these indicators.

The data obtained using the constructed model can be used to study the quality and dynamics of the functioning of a medical institution. And also to study the influence of erroneous information on the performance indicators of the functioning of the network of medical institutions of the subject. In this work, on the basis of the additional statistics obtained, a solution to the problem of determining the mechanism for the optimal distribution of resources between medical institutions of a network of a particular subject is proposed, using the example of Nizhny Novgorod.

Key words: cybernetic control system, functioning of a medical institution, basic indicators, measurement accuracy, realization of a random variable, sample values, optimization.

References

1. Fedotkin M. A. Netradicionnye problemy matematicheskogo modelirovaniya eksperimentov. M.: FIZMATLIT. 2018.

2. Fedotkin M. A., Projdakova E. V., Edeleva A. N. Matematicheskie i instrumental'nye metody postroeniya modeli ekonomiki funkcionirovaniya bol'nicy // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. Seriya: Social'nye nauki. 2019, N 4(56). S. 54–64.

3. Fedotkin M. A., Projdakova E. V., Edeleva A. N. Matematicheskie i instrumental'nye metody postroeniya modeli ekonomiki funkcionirovaniya bol'nicy // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. Seriya: Social'nye nauki. 2020, N 2(58). S. 55–65.

This work was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (No. 18-413-520005).

© E. V. Proydakova, M. A. Fedotkin, 2021

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТИ БОЛЬНИЦ С УЧЕТОМ ОШИБОК РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Е. В. Пройдакова, М. А. Федоткин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия

УДК 330.46; 519.71; 519.213
DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-38-48

В России за последние несколько лет наблюдается тенденция роста числа престарелых граждан и заболеваемости данной категории лиц. Возникшая ситуация требует повышения эффективности работы существующей системы медицинских учреждений для каждого конкретного субъекта в условиях ограничения финансовых и других ресурсов в здравоохранении. Указанную задачу невозможно решить без аналитического исследования, направленного на экономическую оптимизацию расходов в каждом медицинском учреждении и в сети медицинских учреждений субъекта в целом. В данной работе используется представление процесса функционирования сети медицинских учреждений в виде управляющей кибернетической системы. Авторами, с использованием кибернетического подхода, проведен синтез математической модели функционирования типового медицинского учреждения сети в виде управляющей системы. Созданная математическая модель позволяет по единственному измерению с заданной точностью генерировать значения основных показателей работы медицинского учреждения в течении каждого отчетного периода и, таким образом, получать дополнительную статистику любого конечного объема по этим показателям. Полученные с помощью построенной модели данные можно использовать для изучения качества и динамики функционирования медицинского учреждения. А также для исследования влияния ошибочной информации на показатели эффективности функционирования сети медицинских учреждений субъекта. В работе на основании полученной дополнительной статистики предлагается решение задачи определения механизма оптимального распределения ресурсов между медицинскими учреждениями сети конкретного субъекта на примере Нижнего Новгорода.

Ключевые слова: кибернетическая управляющая система, функционирование медицинского учреждения, основные показатели, точность измерения, реализация случайной величины, выборочные значения, оптимизация.

Введение. В работах [1–3] предлагается метод построения и изучения математических моделей разного рода систем и процессов управления на основе кибернетического подхода Ляпунова–Яблонского. В данной статье, которая является непосредственным продолжением перечисленных работ, осуществляется синтез математической модели функционирования медицинского учреждения в виде управляющей кибернетической системы, а также проводится аналитический и численный анализ его деятельности с учетом ошибок результатов наблюдений. Кибернетический подход позволяет по единственному измерению

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-413-520005)

© Е. В. Пройдакова, М. А. Федоткин, 2021

основных показателей результатов работы конкретного медицинского учреждения в течение каждого отчетного года получить дополнительную статистику по основным показателям любого конечного объема. С использованием дополнительной статистики изучены качество и динамика функционирования медицинского учреждения. В настоящей работе также предложено обоснование выбора критериев эффективности деятельности сети из упомянутых медицинских учреждений, что позволяет решить задачу оптимизации распределения ресурсов внутри конкретной сети медицинских учреждений.

1. Построение математической модели. Обозначим через символ t номер отчетного года из множества $T \in \{1, 2, \ldots, k\}$ дискретного функционирования типовой больницы M_j с номером j из множества $J \in \{1, 2, \ldots, n\}$. В этих обозначениях длительность всего периода наблюдений за работой сети из n больниц равна k. Администрация медицинского регионального подразделения и администрация каждого медицинского учреждения M_j в течение каждого отчетного года t выбирает так называемое нормативное управление $u(t)$ из некоторого множества R. Нормативное управление $u = u(t)$ однозначно определяет для типового медицинского учреждения M_j в течение отчетного года t количество $x_j^{(u)}(t)$ используемых коек и точность $\varepsilon = \varepsilon(t)$ измерений всех параметров и результатов работы сети. Для точности измерений справедливо естественное ограничение $0 < \varepsilon(t) < 1$. По итогам работы больницы M_j в отчетном году t и при использовании $x_j^{(u)}(t)$ коек фиксируется лишь единственное наблюдение как фактических значений различных m статей финансовых затрат $A_{1,j}^{(u)}(t), A_{2,j}^{(u)}(t), \ldots, A_{m,j}^{(u)}(t)$, так и фактических значений количества $Q_j^{(u)}(t)$ пролеченных больных, количества $G_j^{(u)}(t)$ умерших, число $L_j^{(u)}(t)$ койко-дней. Наименование всех статей затрат приведено в работе [2]. В частности, статья $A_{m,j}^{(u)}(t)$ играет важную роль, так как определяет суммарный объем финансирования расходов по всем статьям затрат больницы с номером j в отчетном году t. На основе только одного измерения указанных показателей трудно оценить работу сети из n отделений ее сестринского ухода и тем самым решить задачу оптимизации процесса медицинского обслуживания. Поэтому необходимо разработать методику получения выборочной статистики заданного объема для величины стоимости статей затрат, для числа пролеченных больных, для числа умерших больных и для количества койко-дней.

Для решения этой проблемы в [2, 3] при нормативном управлении $u = u(t) \in R$, при заданной точности $\varepsilon = \varepsilon(t)$ для медицинского учреждения M_j за каждый отчетный год t предложены алгоритм построения и метод изучения следующих нормально распределенных случайных величин: a) стоимости $A_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega; t)$ затрат статьи с номером $i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$; b) количества $Q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega; t)$ пролеченных больных; c) количества $G_j^{(u;\varepsilon)}(\omega; t)$ умерших больных; d) числа $L_j^{(u;\varepsilon)}(\omega; t)$ койко-дней. Здесь действительное число ω является значением или реализацией случайной величины ξ с равномерным законом распределения на отрезке $[0, 1]$. Генерируя множество значений случайной величины ξ, можно получить выборку заданного объема для стоимости статей затрат, для числа пролеченных больных, для числа умерших больных и для количества койко-дней.

Для целесообразного распределения материальных и финансовых средств между медицинскими учреждениями сети в течение каждого отчетного года $t \in T = \{1, 2, \ldots, k\}$ необходимо выбирать управление $r(t) \in R$. Управление $r(t)$ существенно влияет на основные параметры и показатели функционирования сети медицинского обслуживания, например, оно однозначно определяет количество $x_j^{(r)}(t)$ используемых коек медицинским учреждением M_j в отчетном году t. Обозначим через символ $[x]$ ближайшее целое чис-

ло к действительному числу x. Тогда при управлении $r = r(t)$ и при заданном значении $\omega \in [0,1]$ соотношение (1) позволяет вычислить с заданной точностью ε значения $A_{i,j}^{(r;\varepsilon)}(\omega;t)$ каждой статьи затрат, значения $Q_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t)$ количества пролеченных больных, значения $G_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t)$ количества умерших и значения $L_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t)$ числа койко-дней для медицинского учреждения M_j за отчетный год t.

$$\begin{aligned} A_{i,j}^{(r;\varepsilon)}(\omega;t) &= A_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j^{(r)}(t)/x_j^{(u)}(t), \\ Q_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t) &= [Q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j^{(r)}(t)/x_j^{(u)}(t)], \\ G_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t) &= [G_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j^{(r)}(t)/x_j^{(u)}(t)], \\ L_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t) &= [L_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j^{(r)}(t)/x_j^{(u)}(t)]. \end{aligned} \tag{1}$$

В частности, в работах [2, 3] по формулам (1) при $r(t) = u(t)$ и при различных значениях параметров $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и ω выполнены вычисления характеристик $A_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $Q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $G_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $L_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ и изучены их свойства. Обозначим при фиксированных значениях параметров ε и ω через символы $a_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ постоянные величины, которые определяются из соотношений (2).

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t) &= A_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)/x_j^{(u)}(t), \\ q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t) &= Q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)/x_j^{(u)}(t), \\ g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t) &= G_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)/x_j^{(u)}(t), \\ l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t) &= L_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)/x_j^{(u)}(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Для больницы M_j постоянные величины или нормативные коэффициенты вида $a_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ и $l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ в расчете на одну койку являются плотностью стоимости затрат статьи с номером i, плотностью числа пролеченных больных, плотностью количества умерших больных и, соответственно, плотностью величины койко-дней. Управление $r(t)$ однозначно определяет количество $x_j^{(r)}(t)$ используемых коек медицинским учреждением M_j в каждом отчетном году t. Поэтому в дальнейшем при постановке и решении проблемы оптимизации работы медицинской сети под математическим описанием управления $r(t)$ будем понимать целочисленный n-мерный вектор $x^{(r)}(t) = (x_1^{(r)}(t), x_2^{(r)}(t), \ldots, x_n^{(r)}(t))$ из заданной области $X^{(n)}(t)$. Ради простоты записи, исключая случай $r(t) = u(t)$, будем опускать символ r для верхних индексов и писать управление $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ вместо управления $x^{(r)}(t) = (x_1^{(r)}(t), x_2^{(r)}(t), \ldots, x_n^{(r)}(t))$. В силу этого величины $A_{i,j}^{(r;\varepsilon)}(\omega;t)$, $Q_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t)$, $G_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t)$ и $L_j^{(r;\varepsilon)}(\omega;t)$ будем теперь обозначать через $A_{i,j}^{(\varepsilon)}(\omega;t)$, $Q_j^{(\varepsilon)}(\omega;t)$, $G_j^{(\varepsilon)}(\omega;t)$ и $L_j^{(\varepsilon)}(\omega;t)$. Используя соотношения (1) и (2), указанные величины будем теперь вычислять с помощью более простого соотношения (3).

$$\begin{aligned} A_{i,j}^{(\varepsilon)}(\omega;t) &= a_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t), \\ Q_j^{(\varepsilon)}(\omega;t) &= [q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)], \end{aligned} \tag{3}$$

$$G_j^{(\varepsilon)}(\omega;t) = [g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)],$$
$$L_j^{(\varepsilon)}(\omega;t) = [l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)].$$

Перейдем непосредственно к определению области $X^{(n)}(t)$ или системы ограничений на управляющие переменные $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Эта система включает следующие типы ограничений.

1. Ограничения на количество $x_j(t)$ коек по больнице M_j:

$$x_{j,min}(t) \leqslant x_j(t) \leqslant x_{j,max}(t), j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где величины $x_{j,min}(t)$ и $x_{j,max}(t)$ определяют минимально возможное число коек и максимально возможное число коек для медицинского учреждения M_j с номером j. Эти величины для отчетного года t задаются условиями функционирования сети из n медицинских учреждений. Если $x_{j,}(t)$ — резерв коек медицинского учреждения с номером j, который является известной величиной в отчетном году t, то $x_{j,max}(t) \leqslant x_{j,}(t)$, $x_{j,min}(t) \geqslant 0$.

2. Ограничение на общее количество коек по сети:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j(t) \leqslant (\sum_{j=1}^{n} x_j(t))_{max}, \tag{5}$$

где величина $(\sum_{j=1}^{n} x_j(t))_{max}$ характеризует максимально возможное число коек сети медицинских учреждений и задается условиями функционирования всех медицинских учреждений в отчетном году t. Непосредственно из (4) следует соотношение: $\sum_{j=1}^{n} x_j(t) \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_{j,max}(t)$. Если $(\sum_{j=1}^{n} x_j(t))_{max} = \sum_{j=1}^{n} x_{j,max}(t)$, то условие (5) непосредственно следует из (4) и его можно не требовать.

3. Ограничения на общее число пролеченных больных по сети:

$$\sum_{j=1}^{n} Q^{(u;\varepsilon)}(\omega;t) \leqslant \sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t) \leqslant (\sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t))_{max}, \tag{6}$$

где величины $\sum_{j=1}^{n} Q^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ и $(\sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t))_{max}$ определяют по всем медицинским учреждениям в отчетном году t фактическое число пролеченных больных и, соответственно, максимально возможное число пролеченных больных. Величина $(\sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t))_{max} \leqslant (\sum_{j=1}^{n} x_j(t))_{max} \times 365$ определяется условиями функционирования всех медицинских учреждений в отчетном году t. Например, если верно равенство $(\sum_{j=1}^{n} x_j(t))_{max} = 225$, то $(\sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t))_{max} \leqslant 225 \times 365 = 82125$. Величины $q_1^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $q_2^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $\ldots$, $q_n^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ являются исходной информацией или нормативными коэффициентами первого типа для статической оптимизационной модели. Величина $q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ характеризует профессиональные и организационные особенности медицинского учреждения с номером j в отчетном году t по восстановлению здоровья больных.

4. Ограничение на общее количество умерших больных по сети:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t) \leqslant G_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t), \tag{7}$$

где величины $g_1^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $g_2^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $\ldots$, $g_n^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ также являются исходной информацией или нормативными коэффициентами второго типа для статической оптимизационной

модели. Величина $g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ характеризует профессиональные и организационные особенности медицинского учреждения с номером j в отчетном году t в критических случаях состояния больных.

5. Ограничение на общее количество койко-дней по сети:

$$\sum_{j=1}^{n} l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t) \leqslant (\sum_{j=1}^{n} x_j(t))_{max} \times 365, \tag{8}$$

где величины $l_1^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $l_2^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $\ldots$, $l_n^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ являются исходной информацией или нормативными коэффициентами третьего типа для статической оптимизационной модели. Величина $l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ также характеризует профессиональные и организационные свойства загруженности медицинского учреждения с номером j в отчетном году t.

6. Если число m определяет общее количество статей затрат каждого медицинского учреждения, то ограничения по стоимости каждой статьи затрат с номером i в каждом отчетном году всеми медицинскими учреждениями можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t) \leqslant A_{i,plan}(t), i = 1, 2, \ldots, m. \tag{9}$$

В соотношении (9) величина $A_{i,plan}(t)$ определяет в отчетном году плановые затраты всех медицинских учреждений по статье с номером i. При фиксированных $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ величина $a_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ является исходной информацией или нормативным коэффициентом четвертого типа для статической оптимизационной модели. Величина $a_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ характеризует профессиональные и организационные особенности финансовых затрат по статье с номером i для больницы с номером j в отчетном году t. При этом суммарный объем $A_m^{(\varepsilon)}(\omega;t)$ финансовых расходов по всем статьям затрат n сети медицинских учреждений в отчетном году t вычисляется с помощью формулы вида $A_m^{(\varepsilon)}(\omega;t) = \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)$. В приведенных выше ограничениях с использованием управляющих переменных $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ и нормативных коэффициентов $q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $a_{m,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$ приводятся формулы для вычисления основных показателей $Q^{(\varepsilon)}(\omega;t)$, $G^{(\varepsilon)}(\omega;t))$, $L^{(\varepsilon)}(\omega;t)$, $A_m^{(\varepsilon)}(\omega;t)$ эффективности работы сети медицинских учреждений. Следовательно, эти показатели можно приближенно найти с помощью следующих линейных функций:

$$Q^{(\varepsilon)}(\omega;t) \approx q^{(\varepsilon)}(\omega; x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t),$$

$$G^{(\varepsilon)}(\omega;t) \approx g^{(\varepsilon)}(\omega; x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t), \tag{10}$$

$$L^{(\varepsilon)}(\omega;t) \approx l^{(\varepsilon)}(\omega; x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t),$$

$$A_m^{(\varepsilon)}(\omega;t) \approx a^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t).$$

Таким образом можно считать, что для сети из n больниц линейные функции $q^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $g^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $l^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$ и $a^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$ отвечают за количество пролеченных больных, за количество умерших больных, за количество койко-дней и за суммарный объем финансовых затрат соответственно. Для семейства линейных функций $q^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $g^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $l^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$ и $a^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$ можно ставить и решать различные оптимизационные многокритериальные задачи, которые зависят от физического смысла целевых показателей. Например, будем находить такое распределение $x_1^*(t)$, $x_2^*(t),\ldots,x_n^*(t)$ коек по медицинским учреждениям, для которого выполняется хотя бы одно из следующих условий оптимальности:

$$q^{(\varepsilon)}(\omega;x_1^*(t),x_2^*(t),\ldots,x_n^*(t)) =$$
$$= max\left\{q^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) : (x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) \in X^{(n)}(t)\right\},$$

$$g^{(\varepsilon)}(\omega;x_1^*(t),x_2^*(t),\ldots,x_n^*(t)) =$$
$$= min\left\{g^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) : (x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) \in X^{(n)}(t)\right\}.$$

Желательно найти такое распределение $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $\ldots,x_n^*(t)$ коек, которое обеспечивает за отчетный год для всей сети отделений сестринского ухода максимальное число пролеченных больных и минимальное количество умерших. Такое распределение коек назовем оптимальным. Построенная статическая оптимизационная многокритериальная модель распределения числа коек по медицинским учреждениям в каждом году t определяется соотношениями (4–10) и условиями оптимальности. Эти соотношения и условия содержат n управляющих переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots,x_n(t)$ и в общем случае не более $(2n+m+5)$ линейных независимых ограничений.

2. Оптимизация распределения коек. Известно, что одним из наиболее важных критериев функционирования сети из медицинских учреждений является количество пролеченных больных. Рассмотрим однокритериальную оптимизационную модель распределения числа коек по медицинским учреждениям в каждом отчетном году $t = 1,2,\ldots,k$ с учетом ошибок измерений фактических показателей. Для определения и анализа оптимальных значений $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $\ldots,x_n^*(t)$ управляющих переменных в отчетном году только по условию максимума пролеченных больных необходимо при фиксированных значениях параметров ε и ω знать исходную информацию в виде значений величин
$A_{1,j}^{(u)}(t)$, $A_{2,j}^{(u)}(t)$, $\ldots$, $A_{m,j}^{(u)}(t)$, $Q_j^{(u)}(t)$, $G_j^{(u)}(t)$, $L_j^{(u)}(t)$, $A_{1,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $A_{2,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $\ldots$, $A_{m,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $Q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $G_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$, $L_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)$. В этом случае однокритериальная оптимизационная модель распределения числа коек по медицинским учреждениям в отчетном году t определяется соотношениями (4) — (9) и равенством:

$$q^{(\varepsilon)}(\omega;x_1^*(t),x_2^*(t),\ldots,x_n^*(t)) =$$

$$= max\left\{q^{(\varepsilon)}(\omega;x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) : (x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) \in X^{(n)}(t)\right\}.$$

Расчет оптимальных значений $x_1^*(t),x_2^*(t),\ldots,x_n^*(t)$ управляющих переменных проводился с использованием программы Microsoft Excel на основе данных [1] о функционировании за период с 2007 по 2015 годы ($t = 1,\ldots,9$) сети из пяти медицинских учреждений

Таблица 1

Оптимизационная задача на фактических данных

Больница	№ 34	№ 24	№ 14	№ 11	№ 37
$x_j^*(t)$	93	10	53	38	42
$a_j(t)$	223599,43	296975,85	376255,98	297359,12	394013,12
$q_j(t)$	10,86	8,58	14,58	8,70	12,24
$l_j(t)$	302,92	309,06	318,24	333,12	300,12
$g_j(t)$	0,16	0,06	0,14	1,00	0,40

Таблица 2

Оптимизационная задача на сгенерированных данных при $\varepsilon = 0{,}01$

Больница	№ 34	№ 24	№ 14	№ 11	№ 37
$x_j^*(t)$	95	5	53	37	44
$a_j^{(u,\varepsilon)}(\omega,t)$	223547,81	296907,30	376169,12	297290,47	393922,16
$q_j^{(u,\varepsilon)}(\omega,t)$	10,86	8,58	14,58	8,70	12,24
$l_j^{(u,\varepsilon)}(\omega,t)$	302,85	308,99	318,17	333,04	300,05
$g_j^{(u,\varepsilon)}(\omega,t)$	0,16	0,06	0,14	1,00	0,40

Таблица 3

Оптимизационная задача на сгенерированных данных при $\varepsilon = 0{,}1$

Больница	№ 34	№ 24	№ 14	№ 11	№ 37
$x_j^*(t)$	88	9	50	36	41
$a_j^{(u,\varepsilon)}(\omega,t)$	234787,11	311834,89	395081,75	312237,33	413727,36
$q_j^{(u,\varepsilon)}(\omega,t)$	11,40	9,01	15,31	9,14	12,85
$l_j^{(u,\varepsilon)}(\omega,t)$	318,08	324,52	334,16	349,79	315,14
$g_j^{(u,\varepsilon)}(\omega,t)$	0,17	0,06	0,15	1,05	0,42

($j = 1, \ldots, 5$) Нижнего Новгорода. При этом $m = 25$, $n = 5$ и $k = 9$. При расчетах фактическое распределение коек для больниц за каждый период t определялось набором $x_1^{(u)}(t) = x_2^{(u)}(t) = x_3^{(u)}(t) = x_4^{(u)}(t) = 50$ и $x_5^{(u)}(t) = 25$. В качестве примера ниже приведено решение оптимизационной задачи по критерию максимума пролеченных больных по данным за 2015 год.

Из табл. 1 следует, что при фактических данных оптимальные значения равны: $x_1^*(t) = 93, x_2^*(t) = 10, x_3^*(t) = 53, x_4^*(t) = 38, x_5^*(t) = 42$. Значения, полученные в результате применения метода генерации новой статистики по нормальному закону при $\varepsilon = 0{,}01$ и одной реализации ω, представлены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что по новой статистике оптимальные значения изменились, но в целом не существенно: $x_1^*(t) = 95, x_2^*(t) = 5, x_3^*(t) = 53, x_4^*(t) = 37, x_5^*(t) = 44$. Значения, полученные в результате применения метода генерации новой статистики по нормальному закону при $\varepsilon = 0{,}1$ и одной реализации ω представлены в табл. 3.

Из табл. 3 видно, что оптимальные значения, вычисленные по новой статистике при $\varepsilon = 0{,}1$ изменились существеннее, чем в предыдущем случае (при $\varepsilon = 0{,}01$): $x_1^*(t) = 88, x_2^*(t) = 9, x_3^*(t) = 50, x_4^*(t) = 36, x_5^*(t) = 41$.

Заключение. Можно сделать вывод, что точность измерения ε существенно влияет на полученные оптимальные значения распределения коек в сети медицинских учреждений. Причем, судя по полученным данным, это влияние не является линейным. Например, если при $\varepsilon = 0{,}01$ (табл. 2) оптимальное распределение коек отличалось от полученного по фактическим данным за 2015, (табл. 1) по четырем больницам, а для одной больницы из четырех ($j = 2$) наблюдаемое значение отличалось существенно: в два раза. То при $\varepsilon = 0{,}1$ (табл. 3) значения оптимального распределения коек отличались от фактического уже по всем больницам сети, но такой существенной разницы, как при $\varepsilon = 0{,}01$ и $j = 2$, не наблюдалось ни для одной больницы.

Список литературы

1. Федоткин М. А. Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2018.

2. Федоткин М. А., Пройдакова Е. В., Эделева А. Н. Математические и инструментальные методы построения модели экономики функционирования больницы // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. 2019, № 4(56). С. 54–64.

3. Федоткин М. А., Пройдакова Е. В., Эделева А. Н. Математические и инструментальные методы построения модели экономики функционирования больницы // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. 2020, № 2(58). С. 55–65.

Пройдакова Е. В. — тел. +79308003435; e-mail: ekaterina.projdakova@itmm.unn.ru. Родилась 11 сентября 1980 года в г. Горьком. В 2002 закончила с отличием Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.

В 2008 году присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук, научный руководитель диссертации — Федоткин Михаил Андреевич.

С 2012 года и по настоящее время работает в Нижегородском государственном университете (ННГУ) им. Н. И. Лобачевского. Осуществляет педагогическую деятельность в Институте информационных технологий математики и механики (ИИТММ) и Институте биологии и биомедицины (ИББМ). Читает лекции по дисциплинам: „Теория вероятностей и математическая статистика“, „Математическая статистика“, „Теория вероятностей“, „Системы массового обслуживания“, „Теория управляющих систем“.

В 2018 году Пройдакова Е. В. было присвоено ученое звание доцента по специальности 05.13.18 „Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ“.

Область научных интересов Пройдаковой Е. В: построение математических моделей сложных систем, использование методов теории вероятностей, математической статистики и имитационного моделирования для исследования построенных моделей и оптимизации реальных систем.

Имеет более 30 публикаций, в том числе учебных изданий и научных трудов. Получено 2 авторских свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ. С 2018 года Пройдакова Е. В. является ведущим исполнителем по гранту Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) № 18-413-520005.

В настоящее время Е. В. Пройдакова занимает должность доцента кафедры Программ-

ной инженерии Института информационных технологий математики и механики ННГУ.

Proydakova Ekaterina Vadimovna was born on September 11, 1980 in the city of Gorky. In 2002 she graduated with honors from the Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky. In 2008 she was awarded the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, the scientific supervisor of the thesis - Fedotkin M. A.

Since 2012 and currently works in the Nizhny Novgorod State University (UNN) to them. N. I. Lobachevsky. Carries out teaching activities at the Institute of Information Technologies of Mathematics and Mechanics (IITMM) and the Institute of Biology and Biomedicine. Lectures on disciplines: „Probability theory and mathematical statistics“, „Mathematical statistics“, „Probability theory“, „Queuing systems“, „Theory of control systems“.

In 2018, Proydakova E. V. was awarded the academic title of associate professor in the specialty 05.13.18 „Mathematical modeling, numerical methods and program complexes.“

The area of scientific interests of Proydakova E. V.: construction of mathematical models of complex systems, the use of methods of probability theory, mathematical statistics and simulation to study the constructed models and optimization of real systems.

Has over 30 publications, including educational publications and scientific papers. Received 2 copyright certificates of state registration of a computer program. Since 2018, Proydakova E. V. is the leading performer under the grant of the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) № 18-413-520005.

Currently E. V. Proydakova holds the position of Associate Professor at the Department of Software Engineering at IITMM, NNSU.

Михаил Андреевич Федоткин — тел. (831) 432-1563, e-mail: `fma5@rambler.ru`. Родился 1 мая 1941 г. в деревне Киселевка Липецкой области. В 1963 году окончил механико-математический факультет Горьковского государственного университета (ГГУ) им. Н. И. Лобачевского. С 1963 года и по настоящее время работает в Нижегородском государственном университете (ННГУ) им. Н.И. Лобачевского. В 1969 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности „Теоретическая кибернетика“ в ГГУ им. Н. И. Лобачевского. В 1984 году защитил докторскую диссертацию по специальности „Теория вероятностей и математическая статистика“ в МГУ им. М. В. Ломоносова. Получил звание профессора. В 1986 году на факультете ВМК создал общеуниверситетскую кафедру прикладной теории вероятностей и являлся ее заведующим вплоть до 2015 года. Федоткин М. А. создал и руководил лабораторией № 6 „Методы теории вероятностей и математической статистики“ в НИИ ПМК при ННГУ и факультетской лабораторией „Вероятностное моделирование“ в составе научно-исследовательской части ННГУ. По научной тематике кафедры, лабораторий и центра защищено 10 докторских и 40 кандидатских диссертации. Области научных интересов, в которых получены основные результаты: 1) управляемые случайные процессы; 2) нелокальное описание маркированных точечных процессов; 3) алгоритмическое и адаптивное управление конфликтными потоками требований в системах обслуживания с переменной структурой; 4) кибернетический подход к построению, анализу и оптимизации вероятностных моделей эволюционных экспериментов с управлением; 5) теория пространственных и временных характеристик случайных потоков; 6) оптимизация принятия статистических неоднородных решений; 7) построение, анализ и оптимизация математической модели функционирования сети медицинских учреждений с учетом ошибок результатов наблюдений.

Наиболее известные опубликованные им учебники для студентов классического университетского образования, обучающихся по направлениям „Прикладная математика и информатика“ и „Фундаментальная информатика и информационные технологии“: 1) Основы прикладной теории вероятностей (М.: Высшая школа, 2006, 368 с.), 2) Модели в теории вероятностей (М.: Наука-Физматлит, 2012, 608 с.), 3) Методы Монте-Карло для параллельных вычислений (М.: Издательство МГУ, 2013, 192 с.), 4) Лекции по анализу случайных явлений

(М.: Наука-Физматлит, 2016, 462 с.); 6) Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов (М.: Наука-Физматлит, 2018, 424 с.).

В настоящее время М. А. Федоткин занимает должность профессора и руководителя научного центра „Прикладная теория вероятностей“ ННГУ.

Mikhail Andreevich Fedotkin was born on May 1, 1941 in the village of Kiselevka, Lipetsk region. In 1963 he graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Gorky State University (GSU) named after I. N.I. Lobachevsky. From 1963 to the present, he has been working at the Nizhny Novgorod State University (NNSU) named after I. N.I. Lobachevsky. In 1969 he defended his Ph.D. thesis in the specialty „Theoretical Cybernetics“ at the GGU im. N.I. Lobachevsky. In 1984 he defended his doctoral dissertation in the specialty „Probability theory and mathematical statistics“ at Moscow State University. M.V. Lomonosov. Received the title of professor. In 1986, at the Faculty of CMC, he created a university-wide department of applied probability theory and was its head until 2015. Fedotkin M.A. created and directed laboratory No. 6 „Methods of Probability Theory and Mathematical Statistics“ at the Research Institute of the PMC at UNN and the Faculty Laboratory „Probabilistic Modeling“ as part of the research part of the UNN. 10 doctoral and 40 candidate dissertations were defended on the scientific topics of the department, laboratories and center.

Research interests of Fedotkin MA: 1) controlled random processes; 2) a non-local description of marked point processes; 3) algorithmic and adaptive management of conflicting flows of claims in service systems with variable structure; 4) a cybernetic approach to the construction, analysis and optimization of probabilistic models of evolutionary experiments with control; 5) theory of spatial and temporal characteristics of random streams; 6) optimization of statistical inhomogeneous decision making; 7) construction, analysis and optimization of a mathematical model of the functioning of a network of medical institutions, taking into account the errors of observation results.

The most famous textbooks published by him for students of classical university education, studying in the areas of „Applied Mathematics and Informatics“ and „Fundamental Informatics and Information Technologies“: 1) Fundamentals of Applied Probability Theory 2) Models in Probability Theory, 3) Monte Carlo Methods for Parallel Computing, 4) Lectures on the analysis of random phenomena ; 6) Non-traditional Problems of Mathematical Modeling of Experiments.

Currently M. A. Fedotkin holds the position of professor and head of the scientific center „Applied Probability Theory“ of the UNN.

Дата поступления — 06.03.2021

MATHEMATICAL MODELS OF REGIONAL BUSINESS DYNAMICS

V. P. Savelyev, N. I. Sutyagina

Nizhny Novgorod State University of Engineering and Economics,
606340, Knyaginino, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-49-58

Some simple mathematical models of functioning of small business enterprises (such that auto-services, hairdressing saloons, barber's saloons, taxi-services, workshops, studios, dressmaking and tailoring establishments, baker's shops, confectioner's shops, groceries and so on) to deliver goods and service for regional population are constructed and investigated at this paper. I's supposed there exist some establishments of the other type: for example, state institutions having strict federal financing (such that schools, clinics, police), and some commercial enterprises (such that poultry farm, dairy farm) making profit generally of selling their goods and service outside the region.

These models are realized in the form of one linear and two non-linear autonomous second order systems of differential equations. Corresponding dynamic systems are investigated by means of qualitative theory of differential equations and phase portraits are drawn depending of parameters. The results of the investigation of all dynamic systems are corresponding well. Subject to some natural suppositions, there exists a stable state of equilibrium, corresponding to stable functioning of small business enterprises. The only difference is the following: this stable state of equilibrium exists for non-linear systems if the sum of external financing of state institutions and the profit of commercial enterprises is rather big. Bifurcation relations between the parameters of non-linear systems are indicated, when passing through which the specified equilibrium state loses stability, and another state becomes stable, corresponding to the absence of small business enterprises.

Key words: region, small business enterprises, dynamic system, equilibrium state, linearization, phase portrait.

References

1. Neimark Yu. I. Prostye matematicheskie modeli i ih rol v poznanii mira // Sorosovsky obrazovatelel'nyj zhurnal, 1997. N 3. S. 139–143.

2. Neimark Yu. I., Savelyev V. P. Prosteishie matematicheskie modeli i ih rol v poznanii prirody i obshestva // Estestvenno-nauchnoe obrazovanie gumanitariev v kontekste razvitya kul'tury XXI veka: Materialy Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konserentsii, N. Novgorod: Izd—vo NNGU, 1999. S. 102–156.

3. Neimark Yu. I. Matematicheskoe modelirovanie kak nauka i iskusstvo. N. Novgorod: Izd—vo NNGU, 2010.

4. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. Kachestvennaya teoriya dinamicheskih system vtorogo poryadka. M.: Nauka, 1966.

© V. P. Savelyev, N. I. Sutyagina, 2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ РЕГИОНАЛЬНОГО БИЗНЕСА

В. П. Савельев, Н. И. Сутягина

Нижегородский государственный инженерно-экономический университет,
город Княгинино, Нижегородская область, Россия

УДК 519.8
DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-49-58

В работе построены и исследованы простые математические модели функционирования предприятий малого бизнеса (таких как автосервис, парикмахерские, такси, мастерские по ремонту обуви, одежды, булочные, кондитерские и т. д.) по предоставлению товаров и услуг населению региона. Предполагается, что в регионе имеются также учреждения и предприятия другого типа: например, имеющие внешнее (бюджетное) финансирование (такие как школа, больница), либо коммерческие предприятия (такие как птицеферма, мясокомбинат, завод по переработке молока), продукция и услуги которых пользуются спросом за пределами данного региона.
Модели реализованы в виде одной линейной и двух нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений второго порядка Проведено качественное исследование соответствующих динамических систем в зависимости от параметров и построены их фазовые портреты. Результаты исследования всех трех динамических систем хорошо согласуются. При довольно естественных предположениях относительно параметров существует устойчивое состояние равновесия, соответствующее устойчивому функционированию предприятий малого бизнеса. Отличие состоит лишь в том, что в нелинейных системах это устойчивое состояние равновесия появляется при достаточно большом внешнем финансировании. Указаны бифуркационные соотношения между параметрами нелинейных систем, при прохождении через которые указанное состояние равновесия теряет устойчивость, а устойчивым состоянием становится другое, соответствующее отсутствию предприятий малого бизнеса.

Ключевые слова: регион, предприятия малого бизнеса, динамическая система, состояние равновесия, линеаризация, фазовый портрет.

Введение. Дифференциация уровня жизни городского и сельского населения продолжает оставаться значительной. Жители небольших населенных пунктов либо недополучают часть услуг, либо их выбор существенно ограничен. В работе показано, что появление в сельском регионе предприятий, продукция (услуги) которых востребована за пределами региона, может привести к появлению и устойчивому функционированию предприятий малого бизнеса, оказывающих услуги жителям региона и, соответственно, к успешному экономическому развитию данного региона.

1. Построение и исследование математических моделей. Будем считать, что трудоспособное население сельского региона состоит из двух частей. Первая часть работает в сфере услуг для населения региона (малый бизнес), множество предприятий такого типа обозначим X. Вторая часть трудоспособного населения работает на предприятиях, производящих продукцию и оказывающих услуги для населения за пределами региона.

© В. П. Савельев, Н. И. Сутягина, 2021

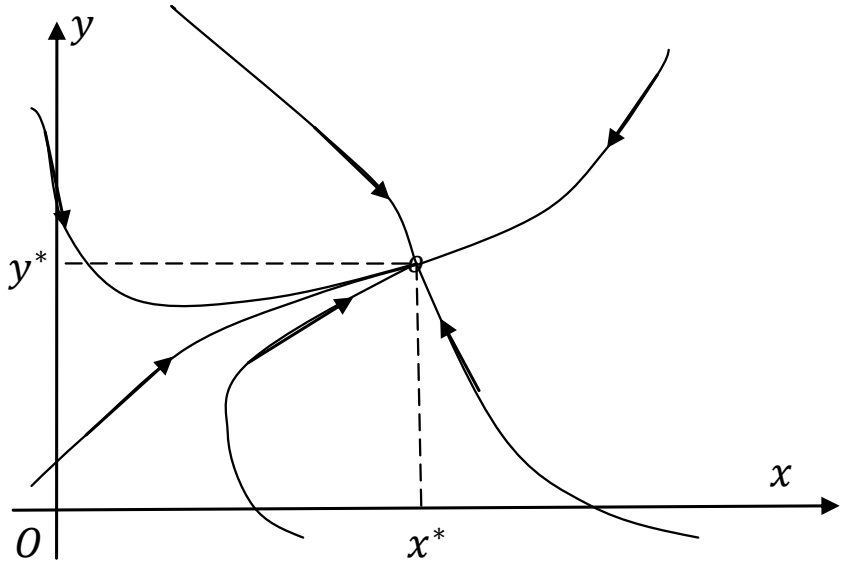


Рис. 1. Фазовый портрет линейной системы (1)

Совокупность предприятий такого типа обозначим Y. Для построения математической модели, описывающей динамику финансовых потоков, введем понятие состояния динамической системы. Отметим, что Ю. И. Неймарк при построении простых математических моделей [1–3] придавал первостепенное значение выбору фазовых переменных и соответствующего фазового пространства. Под состоянием системы будем понимать двумерную функцию времени $(x(t), y(t))$, где $x(t)$ — объем предоставляемых услуг (в денежном выражении) предприятиями типа X, а $y(t)$ — объем произведенных товаров и предоставленных услуг предприятиями типа Y.

1.1. *Линейная модель.* Составим систему линейных дифференциальных уравнений, позволяющую анализировать сферу услуг жителям сельского региона.

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by, \\ \dot{y} = R + dx - cy, \end{cases} \tag{1}$$

в которой все параметры положительны. Слагаемые в правых частях уравнений означают (в единицу времени): ax — оплата труда работников внутреннего сервиса за вычетом их затрат на свой продукт, by — доход системы предприятий типа X от работников предприятий типа Y, R — доход предприятий типа R от продажи товаров и услуг на внешнем рынке, dx — доход предприятий типа Y от работников предприятий типа X, cy — оплата труда работников предприятий типа Y за вычетом их затрат на свой продукт.

При естественном предположении, что $c > b$, $a > d$, суммы денег $(a-d)x$ и $(c-b)y$ тратятся жителями региона на покупку товаров и услуг вне данного региона. Фазовым пространством динамической системы (1) является неотрицательный квадрант $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Нетрудно видеть, что состояние равновесия $\left(\frac{bR}{ac-bd}, \frac{aR}{ac-bd}\right)$ системы (1) является устойчивым узлом. Соответствующий фазовый портрет системы (1) представлен на рис. 1.

Заметим, что поведение траекторий на положительной полуоси Ox определяется вектором $(\dot{x},\dot{y}) = (-ax, R + dx)$. Это значит, что траектории системы (1) пересекают ось Ox снизу вверх, так как $\dot{y} = R + dx > 0$. Поведение траекторий на положительной полуоси Oy определяется вектором $(\dot{x}, \dot{y}) = (by, R + cy)$. Это значит, что траектории пересекают ось Oy слева направо, так как $\dot{x} = by > 0$. Таким образом, для любого начального условия $(x_0, y_0) \in K$ фазовая траектория $(x(t), y(t))$ не выходит из фазового пространства K.

1.2. *Нелинейная модель* 1. В линейной модели (1) предполагалось, что доход by системы предприятий типа X зависит лишь от объема y произведенных товаров и услуг предприятиями типа Y. Однако, такое предположение справедливо лишь при постоянном объеме xy услуг малого бизнеса. Очевидно, что доход зависит и от объема x, то есть равен bxy. В соответствии с этим составим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bxy, \\ \dot{y} = R + dx - cy - bxy, \end{cases} \tag{2}$$

в которой слагаемое cy означает теперь оплату труда работников предприятий типа Y за вычетом их затрат не только на свой продукт, но и затрат на внутренний сервис bxy. При естественном предположении, что $a > d$, суммы денег $(a - d)x$ и cy тратятся на покупку товаров и услуг вне данного региона. Динамическая система (2) имеет два состояния равновесия: 1) $\left(0, \frac{R}{c}\right)$, 2) $\left(\frac{Rb-ac}{b(a-d)}, \frac{a}{b}\right)$. При условии $Rb - ac > 0$ оба состояния равновесия находятся в фазовом пространстве K.

Как известно [4], для исследования состояния равновесия нелинейной системы требуется ее линеаризовать в окрестности состояния равновесия. В окрестности первого состояния равновесия $\left(0, \frac{R}{c}\right)$ линеаризованная система (2) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(R\dfrac{b}{c} - a\right)x + 0\left(y - \dfrac{R}{c}\right), \\ \dot{y} = \left(d - R\dfrac{b}{c}\right)x - c\left(y - \dfrac{R}{c}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Собственные числа матрицы легко находятся:

$$\lambda_1 = R\frac{b}{c} - a > 0, \qquad \lambda_2 = -c < 0.$$

Так как собственные числа матрицы действительные и разных знаков, состояние равновесия $\left(0, \frac{R}{c}\right)$ является седлом.

В окрестности второго состояния равновесия линеаризованная система (2) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0\left(x - \dfrac{Rb - ac}{b(a-d)}\right) + \dfrac{Rb - ac}{a - d}\left(y - \dfrac{a}{b}\right), \\ \dot{y} = (d - a)\left(x - \dfrac{Rb - ac}{b(a-d)}\right) - \dfrac{Rb - cd}{a - d}\left(y - \dfrac{a}{b}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Уравнение для собственных значений матрицы имеет вид:

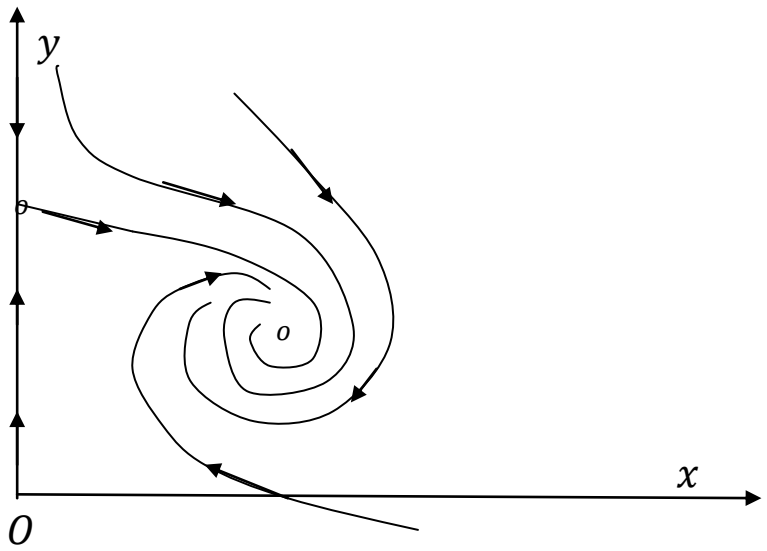


Рис. 2. Фазовый портрет системы (2) и системы (6) с устойчивым фокусом

$$\lambda^2 + \frac{Rb - cd}{a - d}\,\lambda + Rb - ac = 0. \tag{5}$$

Поскольку $Rb - ac > 0$, $a > d$, то и $Rb - cd > 0$. Это значит, что собственные числа либо оба действительные и отрицательные, либо комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью. Таким образом, состояние равновесия $\left(\frac{Rb-ac}{b(a-d)}, \frac{a}{b}\right)$ является или устойчивым узлом, или устойчивым фокусом. Соответствующий устойчивому фокусу фазовый портрет системы (2) представлен на рис. 2.

Поведение траекторий на положительной полуоси Ox определяется вектором $(\dot{x}, \dot{y}) = (-ax, R + dx)$. Это значит, что траектории пересекают ось Ox снизу вверх, так как $\dot{y} = R + dx > 0$. Поведение траекторий на положительной полуоси Oy определяется вектором $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, R - cy)$, а также собственным вектором $(0,1)^T$, то есть обе ω — сепаратрисы седла $\left(0, \frac{R}{c}\right)$ лежат на положительной полуоси Oy. Тот факт, что для любого начального условия $(x_0, y_0) \in K$ фазовая траектория $(x(t), y(t))$ не выходит из фазового пространства K, служит косвенным признаком того, что математическая модель (2) адекватно описывает динамику финансовых потоков $(x(t), y(t))$.

Далее, предположим, что $Rb - ac < 0$. Это значит, что либо поступления R недостаточные, либо коэффициенты a и c, характеризующие оплату труда, велики, либо люди слабо пользуются услугами внутреннего сервиса (коэффициент b *невелик*). В этом случае состояние равновесия $\left(0, \frac{R}{c}\right)$ становится устойчивым узлом, а состояние равновесия $\left(\frac{Rb-ac}{b(a-d)}, \frac{a}{b}\right)$ — седлом, но оно расположено вне фазового пространства. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 3.

Заметим, что из любой начальной точки фазового пространства $x(0) = x_0 \geqslant 0$, $y(0) = y_0 \geqslant 0$ все траектории входят в устойчивый узел $\left(0, \frac{R}{c}\right)$. Это значит, что не имеется достаточных ресурсов для поддержания регионального сервиса, он исчезает.

1.3. *Нелинейная модель* 2. В моделях (1) и (2) предполагалось, что внешний доход R предприятий типа Y является постоянной величиной. Однако, такое положение дел соответствует ситуации, когда в регионе имеются лишь бюджетные организации. При наличии

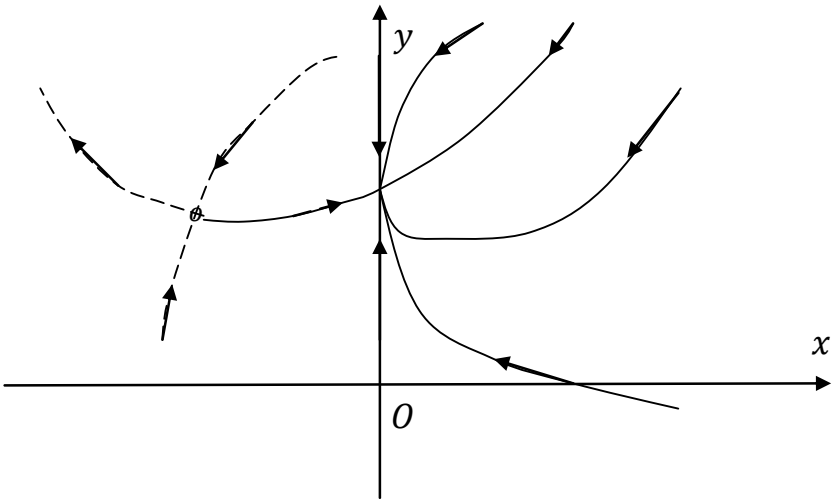


Рис. 3. Фазовый портрет системы (2) при условии $Rb - ac < 0$, и системы (6) при условии $Rb^2 + ab(p-c) - \varepsilon a^2 < 0$

в регионе коммерческих предприятий естественно предположить, что с ростом объема выпускаемой продукции (услуг) доход от их продажи на внешнем рынке будет увеличиваться, то есть имеет вид $R + py$, $p > 0$. Если же учесть, что с ростом объема товаров и услуг цены несколько снижаются, то предлагается доход задать в виде $R + py - \varepsilon y^2$, $p > 0$, $\varepsilon > 0$.

Тогда динамику изменения финансов можно представить в виде несколько измененной системы (2)

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bxy, \\ \dot{y} = R + (p-c)y - \varepsilon y^2 + dx - bxy, \end{cases} \tag{6}$$

в которой, кроме неравенства $a - d > 0$, будем предполагать, что $p - c < 0$.

Система (6) имеет в фазовом пространстве K два состояния равновесия:

1) $(0, y_1)$, где $y_1 = \frac{(p-c)+\sqrt{(p-c)^2+4\varepsilon R}}{2\varepsilon}$ — положительный корень уравнения

$$\varepsilon y^2 + (c-p)y - R = 0, \tag{7}$$

2) $\left(x_1, \frac{a}{b}\right)$, где $x_1 = \frac{Rb^2+ab(p-c)-\varepsilon a^2}{(a-d)b^2}$.

Заметим, что состояние равновесия $\left(x_1, \frac{a}{b}\right)$ принадлежит фазовому пространству при выполнении неравенства

$$Rb^2 + ab(p-c) - \varepsilon a^2 > 0. \tag{8}$$

В окрестности первого состояния равновесия $(0, y_1)$ линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = (by_1 - a)x + 0(y - y_1), \\ \dot{y} = (d - by_1)x - \sqrt{(-c)^2 + 4\varepsilon R(y - y_1)}. \end{cases} \tag{9}$$

Собственные значения матрицы линейной системы (9) легко находятся:

$$\lambda_1 = by_1 - a, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{(p-c)^2 + 4\varepsilon R}. \tag{10}$$

Заметим, что выражения $by_1 - a$ и $Rb^2 + ab(p-c) - \varepsilon a^2$ имеют одинаковый знак:

$$by_1 - a = \frac{b(p-c) + b\sqrt{(p-c)^2 + 4\varepsilon R}}{2\varepsilon} - a = \frac{b\sqrt{(p-c)^2 + 4\varepsilon R} - (b(c-p) + 2\varepsilon a)}{2\varepsilon} =$$
$$= \frac{b^2((p-c)^2 + 4\varepsilon Rb(c-p) + 2\varepsilon a)^2}{2\varepsilon[b\sqrt{(p-c)^2 + 4\varepsilon R} + b(c-p) + 2\varepsilon a]} = 2\frac{Rb^2 + ab(p-c) - \varepsilon a^2}{b\sqrt{(p-c)^2 + 4\varepsilon R} + b(c-p) + 2\varepsilon a}.$$

При условии (8) собственные значения (10) будут действительными и разных знаков, то есть, состояние равновесия $(0, y_1)$ — седло.

В окрестности второго состояния равновесия $\left(x_1, \frac{a}{b}\right)$ линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0(x - x_1) + bx_1\left(y - \dfrac{a}{b}\right), \\ \dot{y} = (d-a)(x - x_1) - \dfrac{Rb^2 + bd(p-c) + \varepsilon a(a-2d)}{(a-d)b}\left(y - \dfrac{a}{b}\right). \end{cases} \tag{11}$$

Уравнение для собственных значений матрицы линейной системы (11) имеет вид:

$$\lambda^2 + \frac{Rb^2 + bd(p-c) + \varepsilon a(a-2d)}{(a-d)b}\lambda + (a-d)bx_1 = 0. \tag{12}$$

При выполнении условий $a - d > 0$, $p - c < 0$, выполняется неравенство

$$Rb^2 + bd(p-c) + \varepsilon a(a-2d) > Rb^2 + ab(p-c) - \varepsilon a^2 > 0, \tag{13}$$

поэтому корни уравнения (12) либо оба действительные и отрицательные, либо комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью. Это значит, что состояние равновесия $\left(x_1, \frac{a}{b}\right)$ является устойчивым узлом или фокусом. Соответствующий устойчивому фокусу фазовый портрет системы (6) представлен на рис. 2.

При уменьшении параметра R выполнится неравенство $Rb^2 + ab(p-c) - \varepsilon a^2 < 0$. В этом случае второе состояние равновесия системы (6) не принадлежит фазовому пространству, а первое состояние равновесия $\left(0, \frac{(p-c)+\sqrt{(p-c)^2+4\varepsilon R}}{2\varepsilon}\right)$ становится устойчивым узлом (рис. 3). Это значит, что не имеется достаточных ресурсов для поддержания регионального сервиса, он исчезает.

Выводы.

1) Результаты исследования линейной модели (1) и нелинейных моделей (2) и (6) хорошо согласуются.

2) Из исследования линейной модели следует: a) наличие в регионе предприятий типа Y работающих на „экспорт“, является достаточным условием для возникновения и устойчивого функционирования малого бизнеса; b) для увеличения объема услуг малого бизнеса $x = \frac{bR}{ad-bc}$ надо сокращать разницу между a и c, а также между d и b, то есть уменьшать суммы денег $(a-c)x$, $(d-b)y$, которые тратятся на покупку товаров и услуг вне региона.

3) Из исследования нелинейных моделей следует: a) начиная с достаточно большого объема товаров и услуг R, производимых в единицу времени предприятиями типа Y,

появляется возможность для возникновения и устойчивого функционирования малого бизнеса; b) для увеличения объема услуг малого бизнеса $x = \frac{bR-ac}{b(a-d)}$ надо сокращать разницу между a и d, и уменьшать коэффициент c, то есть уменьшать суммы денег $(a-d)x$ и cy, которые тратятся на покупку товаров и услуг вне региона.

Список литературы

1. Неймарк Ю. И. Простые математические модели и их роль в познании мира // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 3. С. 139–143.

2. Неймарк Ю. И., Савельев В. П. Простейшие математические модели и их роль в познании природы и общества // Естественно-научное образование гуманитариев в контексте развития культуры XXI века: Материалы Всероссийской научно-методической конференции, Н. Новгород: Изд—во ННГУ, 1999. С. 102–156.

3. Неймарк Ю. И. Математическое моделирование как наука и искусство. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2010.

4. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.

Савельев Владимир Петрович — e-mail: vpsavelyev@rambler.ru; тел.: +7 (906) 351-13-71. Родился 5 июля 1938 года в селе Дивеево Горьковской области. В 1962 году, после окончания Горьковского государственного университета, был оставлен на работе на механико-математическом факультете, из которого в 1963 году выделился факультет вычислительной математики и кибернетики (ВМК). Научным руководителем был известный ученый профессор Неймарк Ю. И., инициатор создания факультета ВМК. В 1971–1972 годах работал на Кубе, в Центральном университете (город Санта Клара). В 1974 году защитил диссертацию „Управляемость и оптимальность одномерного движения“ на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, в 1980 году получил ученое звание доцента. В 1982–1986 годах работал в Браззавильском университете (республика Конго). С 1990 по 2006 годы трижды избирался деканом факультета ВМК в Нижегородском государственном университете им Н. И. Лобачевского. С первых лет существования Нижегородского инженерно-экономического института (2002) в г. Княгинино (впоследствии университет) работал в нем по совместительству, в настоящее время доцент кафедры физико-математических наук Нижегородского инженерно-экономического университета. Почетный работник высшего профессионального образования РФ, почетный работник Нижегородского государственного университета им Н. И. Лобачевского, почетный профессор Нижегородского инженерно-экономического университета, имеет более 90 научных статей и учебно-методических пособий. Основные темы научной работы: управляемость нелинейных систем, оптимальное управление, непрерывная и дискретная оптимизация. Наиболее важные публикации: монография „Динамические модели теории управления“, Москва, Наука, 1985 г. (совместно с Неймарком Ю. И., Коганом Н. Я.), „Качественные методы глобального исследования областей управляемости на плоскости“, журнал „Дифференциальные уравнения“, 1995, Т. 31, № 4, (совместно с Бутениной Н. Н., Павлюченок З. Г.), „Оптимальное планирование ритмичного производства“, Вестник НГИЭИ. 2018. №11(90) (совместно с Шаминым А. А.), монография „Задачи дискретной и непрерывной оптимизации. Число Фробениуса“, изд—во LAMBERT, 2020 г.

Savel'ev Vladimir Petrovich was born on the 5-th of July 1938 in Diveevo, Gorky region. In 1962 after graduating Gorky state University I was left at work at the faculty of mechanics and mathematics, from which the faculty of Computational Mathematics and Cybernetics (CMC) was separated in 1963. The

well-known scientist Professor Neimark Yu. I., the initiator of the creation of the faculty of CMC, was my scientific supervisor. In 1971-1972, I worked in Cuba, at the Central University (Santa Clara city). In 1974 I defended my thesis „Controllability and optimality of one-dimensional motion“ for the degree of candidate of physical and mathematical sciences. In 1980 I received the academic title of Associate Professor. In 1982-1986, I worked at the University of Brazzaville (Republic of Congo). From 1990 to 2006, I was elected as a Dean of the CMC faculty at Lobachevsky state University of Nizhny Novgorod. From the first years of existence of the Nizhny Novgorod engineering and economics Institute (2002) in Knyaginino (later — the University) I worked in it part-time, currently I am an Associate Professor of the Chair of physical and mathematical sciences of the Nizhny Novgorod state engineering and economics University. I am an honorary worker of higher professional education of the Russian Federation, an honorary worker of Nizhny Novgorod state University named after N. I. Lobachevsky, and an honorary professor of Nizhny Novgorod state engineering and economic University, have more than 90 scientific articles and methodical works. The main topics of scientific work are controllability of nonlinear systems, optimal control, continuous and discrete optimization. The most important publications: monograph „Dynamic models of control theory“, Moscow, Nauka, 1985 (together with Neimark Yu.I., Kogan N. Ya.), „Qualitative methods of global research of controllability areas on the plane“, journal „Differential equations“, 1995, Vol. 31, No. 4, (together with Butenina N. N., Pavlyuchenok Z. G.), „Optimal planning of rhythmic production“, Vestnik NGIEI. 2018. No. 11 (90) (together with A. A. Shamin), monograph „Problems of discrete and continuous optimization. The Frobenius number“, LAMBERT Publishing House, 2020.

Сутягина Наталья Игоревна — e-mail: sutyagina_2012@mail.ru; тел.: +7 (915) 930-90-09. Родилась 27 октября 1977 года в р. п. Княгинино Нижегородской области. В 2000 году окончила механико-математический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. С 2000 года по 2010 год находилась на муниципальной и государственной службе. С 2010 года работает в Нижегородском государственном инженерно-экономическом университете (ранее — институте). В 2012 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата экономических наук, в 2017 году присвоено ученое звание доцента по научной специальности „Математические и инструментальные методы экономики“. С 2013 года по настоящее время является заведующей кафедрой „Физико-математические науки“ Нижегородского государственного инженерно-экономического университета. Основные области научных интересов — формирование и развитие рынков услуг, устойчивое развитие сельских территорий и социальной инфраструктуры, разработка систем поддержки принятия решений. Имеет более 60 научных и учебно-методических работ, среди которых: „Метод динамического программирования при принятии микроэкономического решения“, Вестник НГИЭИ. №11(42). 2014. С. 72–77, „Математическая модель для расчета основных показателей рынка услуг“ Экономика и предпринимательство, № 11, ч. 3 (52–3). 2014. С. 885–887.

Sutyagina Natalia Igorevna was born on the 27-th of October, 1977 in Knyaginino, Nizhny Novgorod region. In 2000, she graduated from the faculty of mechanics and mathematics of the Lobachevsky state University of Nizhny Novgorod. From 2000 to 2010, she was in the municipal and state service. Since 2010, she has been working at the Nizhny Novgorod state engineering and economic University (formerly the Institute). In 2012, she defended her thesis for the degree of candidate of economic sciences, in 2017 she was awarded the academic title of Associate Professor in the scientific specialty — Mathematical and instrumental methods of Economics. Since 2013, she has been the head of the Chair of Physical and mathematical Sciences of the Nizhny Novgorod state engineering and economic University. The main areas of research interests are the formation and development of service markets, sustainable development of rural areas and social infrastructure, development of

decision support systems. She has more than 60 scientific and educational works, including: „The method of dynamic programming in making microeconomic decisions“, Vestnik NGIEI. N 11 (42). 2014. P. 72–77, „Mathematical model for calculating the main indicators of the service market“ Economics and entrepreneurship, N 11, part 3 (52–3). 2014. P. 885–887.

Дата поступления — 06.03.2021

APPLICATION OF OPTIMAL EVALUATION OF LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS USING REACHABLE SETS

M. Sorokina

Lobachevsky University,
603950, Nizhniy Novgorod, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-59-68

The paper is devoted to reachable sets of linear time-varying systems under uncertain initial states and disturbances with a bounded uncertainty measure. The uncertainty measure is the sum of a quadratic form of the initial state and the integral over the finite-time interval from a quadratic form of the disturbance. One of the main problems of dynamic system control theory is researching the opportunity of reaching this or that state under control. Reachable sets studying allows us to solve it. Reachable sets play a large role in different parts of control theory. The main are optimal control problems, disturbance estimation, etc. It makes them applicable to practically all spheres of activity: technical field (preservation of given trajectory by pilotless aircraft, taking into account the speed and direction of the wind [1] and building manipulator path [2]), economics [3], medicine [4], chemistry [5], etc. Reachable set for system is class of all trajectory ends emerging from closed set in state space defining class of possible initial system states. These trajectories correspond to different values of disturbance. For the system under disturbance reachable set describes area in which the system comes under disturbance and allows us to evaluate accuracy of system hitting a finite state [6]. Reachable sets allow us to realise whether it is possible to put the system into the given state provided we add a control to the system. There are two problems in this article: reacable sets finding problem and reachable sets estimation problem.

We solve some special matrix differential Riccati equations for finding reachable sets. We demonstrate it using the Mathieu equation as the example of uncertain initial states and disturbances problem and linear oscillator with floating stiffness coefficient equation as the example of parametric uncertainty problem. Method of estimation of ellipsoidal reachable sets has been cosidered for such systems also using matrix differential Riccati equation. Applying this method allows to find minimal ellipsoidal set that is defined by optimal observer. Besides, linear time-varying system with parametric time-varying uncertainty is being examined. Evaluation of ellipsoidal reachable sets is also given in the article. Applying the method is demonstrated with numerical modeling with the Mathieu-Hill dying-away equation for parametric vibrations and resonance. Euler iterative method is applied to compute required estimations.

Key words: reachable sets, ellipsoidal sets, optimal observer, parametric uncerainty.

References

1. Rogalev A. N., Rogalev A. A. Controlling the path and reachable set estimations of unmanned air vehicle//Mathematical methods of modelling, control and data analysis, 2017.

2. Holmes P., Kousik S., Zhang B. and others Reachable Sets for Safe, Real-Time Manipulator Trajectory Design, 2020.

Supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project 0729-2020-0055)

© M. Sorokina, 2021

3. Lagosha B. A., Apal'kova T. G. Optimal control in economics: theory and applications. Moscow: Finance and statistics, 2008.

4. Bolodurina I. P., Lygovskova Yu. P. Optimal control of immunological reactions of the human body // Control sciences, N 5. P. 44–52, 2009.

5. Shatkhan F. A. Application of maximum principle to optimization problems of parallel chemical reactions // Avtomat. i Telemekh. 1964. V. 25. Issue 3. P. 368—373.

6. Chernousko F. L. Estimation of the phase state of dynamic systems. Moscow: Nayka, 1988.

7. Balandin D. V., Biryukov R. S., Kogan M. M. Ellipsoidal reachable sets of linear time-varying continuous and discrete systems in control and estimation problems // Automatica, N 116. P. 1–8, 2020.

8. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of Control Laws Based on Linear Matrix Inequalities. Moscow: Nauka, 2007.

9. Kvakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems. New York: Wiley, 1972.

10. Sorokina M. S. Optimal evaluation of linear time-varying systems using reachable sets.

11. Sorokina M. S. Application of reachable sets in optimal estimationof linear tyme-varying systems // Mathematical modelling and supercomputer technologies, 2020.

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ

М. С. Сорокина

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
603950, Нижний Новгород, Россия

УДК 517.9
DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-59-68

Рассматривается линейная нестационарная система при неточно известных начальном состоянии и действующем возмущении, удовлетворяющих единому ограничению. Ограничение представляет собой сумму квадратичной формы начального состояния и интеграла по времени от квадратичной формы возмущения (квадратичные формы могут быть вырожденными). Для такой системы приведен способ оценки эллипсоидального множества достижимости с использованием матричного дифференциального уравнения Риккати. Его использование позволяет найти минимальное множество достижимости (то есть оценка оптимальна), которое определено при помощи оптимального наблюдателя. Помимо этого, рассматривается линейная нестационарная система, включающая в себя параметрическую неопределенность, которая также является нестационарной. Для нее также приводится оценка эллипсоидальных множеств достижимости. Применение обоих методов продемонстрировано на примере уравнения Матье-Хилла с затуханием, которое описывает параметрические колебания и резонанс и уравнения маятника. Для вычислений применяется итерационная процедура с использованием метода Эйлера.

Ключевые слова: множества достижимости, эллипсоидальные множества, оптимальный наблюдатель, параметрическая неопределенность.

Введение. Исследование возможности достижения системой того или иного состояния под действием управления является одной из основных задач в теории управления динамическими системами. Изучение множеств достижимости системы позволяет ее решать. Множества достижимости играют важную роль в разных областях теории управления. Основные из них: задачи оптимального управления (при известном множестве достижения задача сводится к минимизации функции n переменных на нем); оценка возможностей управления (возможно ли привести систему в заданное состояние в фиксированный момент времени); оценка возмущений (множество достижимости характеризует область, в которую может попасть система под действием возмущения); гарантированное оценивание (фильтрация) в динамических системах (при известном множестве достижимости и заданных ограничениях на возмущения получаем оценку разброса траекторий под его воздействием). Это делает их применимыми практически во всех сферах деятельности: в технической деятельности (задачу сохранения беспилотным летательным аппаратом за-

При поддержке Министерства высшего образования и науки (проект 0729-2020-0055)

© М. С. Сорокина, 2021

данной траектории с учетом скорости и направления ветра [1] и задачу построения траектории манипулятора [2]), экономике([3]), медицине ([4]), химии ([5]) и т. д. В данной работе будет рассмотрено применение множеств достижимости для задачи с неизвестным начальным условием и задачи с параметрической неопределенностью.

1. Множества достижимости. Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0 \in M, t \in [t_0, T], \tag{1}$$

где $x \in R^{n_x}$ — состояние системы; $v \in R^{n_v}$ — возмущение, действующее на систему: $v = v(\sigma), \sigma \in [t_0, t]$; M — замкнутое множество в пространстве состояний, определяющее совокупность возможных начальных состояний системы:

$$M(t, R) = \{(x, v(\sigma)) : x^T(t_0)R^{-1}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v^T(\sigma)G^{-1}v(\sigma) \leqslant 1\}.$$

Из каждой точки множества M выходит множество траекторий системы, которые отвечают разным значениям возмущения. Множество достижимости для системы при $t \geqslant t_0$ — совокупность концов всех траекторий $x(t)$, выходящих из M в момент времени $t \geqslant t_0$.

Для системы, подверженной возмущениям, множество достижимости характеризует область, в которую под воздействием возмущения приходит система, и позволяет оценить точность попадания системы в заданное конечное состояние [6]. Также, при добавлении в систему управления, оно дает возможность понять, возможно ли привести систему из одного состояния в заданное.

2. Нахождение множеств достижимости.

2.1. *Задача с неточно известным начальным состоянием и возмущением.* Рассмотрим систему (1). Положим, что $x(t_0)$ и $v = v(\sigma)$ принадлежат множеству:

$$\begin{array}{l} \mathbf{S}(t, t_0, R, G) = \{(x, v(\sigma)) : x = R^{1/2}\omega_1, v(\sigma) = G^{1/2}(\sigma)\omega_2(\sigma), \\ |\omega_1|^2 + \int_\tau^t ||\omega_2(\sigma)|^2|d\sigma \leqslant 1\} \end{array} \tag{2}$$

для заданных $R = R^T \geqslant 0$ и $G(\sigma) = G^T(\sigma) \geqslant 0$.

Теорема 1. Множество достижимости системы (1) в момент времени $t \geqslant t_0$ при любых начальных состояниях и возмущениях из множества (2) с $R \geqslant 0$ и $G(\sigma) \geqslant 0$, $\sigma \in [t_0, t], t \in [t_0, T]$ имеет вид эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$, матрица которого удовлетворяет уравнению:

$$\dot{Y} = A(t)Y + YA^T(t) + B(t)G(t)B^T(t). \tag{3}$$

2.1.1. *Пример.* Продемонстрируем применение метода на примере уравнения Матье:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))x = v, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{4}$$

Матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t)) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрицы начальных состояний и ограничений:

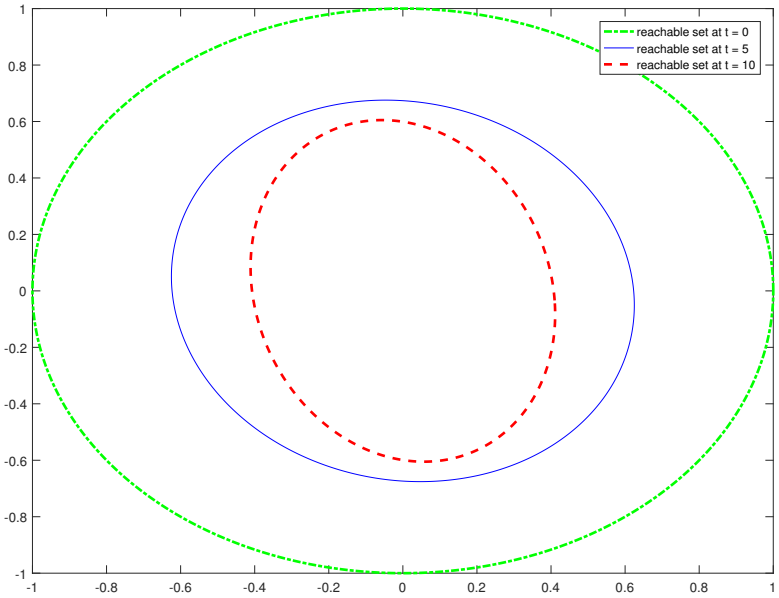


Рис. 1. Множество достижимости в задаче с неопределенными начальным состоянием и возмущением

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Решим уравнение (3), чтобы найти множества достижимости. Выберем значения параметров: $\omega_0 = \pi, \quad \omega = 2\pi, \quad \varepsilon = 0.1$.

Решим задачу на отрезке времени $[0,\ 1]$, для решения применим разностную схему, основанную на методе Эйлера. Метод отыскания множеств достижимости в частных случаях описан в [7].

Все множества достижимости в момент времени $t > t_0$ содержатся внутри множества достижимости при $t = t_0$ (рис. 1).

2.2. *Задача с параметрической неопределенностью.* Рассмотрим постановку задачи из [8]. Рассматриваемая система имеет вид:

$$\dot{x} = \hat{A}(t)x(t), \hat{A} = A + F\Omega(t)E, x(t_0) = x_0, t \in [t_0, T], \tag{7}$$

где A — матрица исходной системы; F, E — заданные постоянные матрицы; $\Omega(t)$ — неизвестная матричная функция: $\Omega^T(t)\Omega(t) \leqslant I$.

Добавим в систему возмущение и введем обозначение: $\omega(t) = \Omega(t)E(t)x(t)$.

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)v(t) + F(t)\omega(t), x(t_0) = x_0, t \in [t_0, T] \\ \omega^T(t)\omega(t) \leqslant z^T z, z = E(t)x(t); \\ x_0^T R^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{T} v^T(t)v(t)dt \leqslant 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Теорема 2. Множество достижимости системы (8) заключено в множестве достижимости, имеющем вид эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$, матрица которого удовлетворяет неравенству $\dot{Y} \geqslant YA^T + YA + BB^T + \mu^{-2}FF^T + \mu^2 YE^T EY$ с начальным условием $Y(t_0) = R$.

Доказательство:

Рассмотрим для системы (8) квадратичную форму $V = x^T Y^{-1} x$, матрица Y которой является положительно определенной симметрической и удовлетворяет дифференциальному матричному неравенству

$$\dot{Y} \geqslant YA^T + YA + BB^T + \mu^{-2}FF^T + \mu^2 YE^T EY, Y(t_0) = R. \tag{9}$$

Найдем производную в силу системы от квадратичной формы:

$$\dot{V} = x^T[-Y^{-1}\dot{Y}Y^{-1} + A^TY^{-1} + Y^{-1}A]x + v^TB^TY^{-1}x + x^TY^{-1}Bv + \omega^TF^TY^{-1}x + x^TY^{-1}F\omega.$$

Используя (9), получим:

$$\dot{V} \leqslant v^Tv + \mu^2(|\omega|^2 - |z|^2v - v_*)^T(v - v_*\mu\omega - \mu^{-1}\omega_*)^T(\mu\omega - \mu^{-1}\omega_*),$$
$$v_* = B^TY^{-1}x, \omega_* = F^TY^{-1}x$$

Проинтегрировав на отрезке $[t_0, T]$ и используя ограничения из (8), получим:

$$x^T(t)Y^{-1}(t)x(t) \leqslant 1. \tag{10}$$

Таким образом, в любой момент времени $t \in [t_0, T]$ множество достижимости системы с параметрической неопределенностью вида (8) лежит внутри эллипсоида (10).

2.2.1. *Нахождение функции* $\eta(t)$. Запишем (9) в виде:

$$\dot{Y} \geqslant YA^T + YA + BB^T + \eta(t)FF^T + \eta^{-1}(t)YE^TEY, Y(t_0) = R, \eta(t) = \mu^{-2}(t).$$

Обозначим $\dot{Y} = \Gamma$, тогда

$$trace(\Gamma) = trace(YA^T + AY + BB^T) + \eta trace(FF^T) + \eta^{-1}trace(YE^TEY)$$

Выполним минимизацию правой части по параметру η, решением будет

$$\eta_* = \sqrt{\frac{trace(YE^TEY)}{trace(FF^{T)}}}.$$

Это позволит найти „наименьший“ эллипсоид, определяемый матрицей $Y(t)$.

2.2.2. *Пример.* Рассмотрим линейный осциллятор с переменным коэффициентом жесткости:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon\Omega(t))x_1$$

Матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица начальных условий:

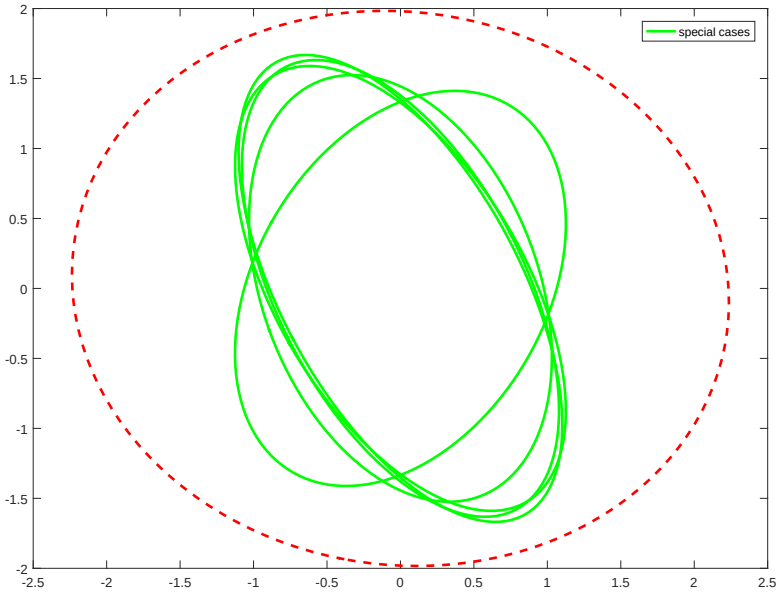


Рис. 2. Множества достижимости для системы с параметрической неопределенностью

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Также выберем значения параметров: $\omega_0 = \pi$, $\varepsilon = 0.1$.

Решение приводится для нулевых начальных условий на отрезке времени [0,1]. Для решения применяется разностная схема, основанная на методе Эйлера. Эллипсоид, который должен включать в себя все возможные множества достижимости системы, удовлетворяющей ограничениям, приведенным в (8), найден после решения матричного дифференциального неравенства (9). Способ отыскания эллипсоидов для частных случаев неопределенности описан в [7]. Рассматриваемый частный случай — $\Omega(t) = \sin(t + \varphi)$, $\varphi = [\pi/6; \pi/4; \pi/2; \pi; 2\pi]$.

Красной пунктирной линией на рис. 2 обозначен эллипс, который получен из решения (9), зелеными сплошными — частные случаи при разных значениях φ. Все множества достижимости в частных случаях содержатся внутри множества достижимости, описывающего все возможные состояния системы вида (7).

3. Оценивание множеств достижимости. Рассмотрим способ построения оптимальной оценки множества достижимости, приведенный в статье [7].

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v, \\ y &= C(t)x + D(t)v \end{aligned} \tag{11}$$

с неизвестным начальным условием $x(t_0)$.

Пусть начальное состояние системы и возмущения представимо в виде

$$\begin{aligned} x(t_0) - x_* = R^{1/2}w_1,\ v(t) = G^{1/2}(t)w_2(t), \\ |w_1|^2 + \int_{t_0}^{t} |w_2(\sigma)|^2 d\sigma \leqslant 1, t \in [t_0, T] \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим задачу оценивания состояния $x(t)$ системы (11) по измерениям выхода $y(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$ для заданной матрицы $R = R^T > 0$ и матричной функции $G^T(\sigma) = G(\sigma) > 0$.

Тогда получаем условие:

$$|x(t_0) - x_*|_R^2 + ||v||_{G_{[t_0;t]}}^2 \leqslant 1.$$

Построим наблюдатель полного порядка [9]

$$\dot{\widehat{x}} = A(t)\widehat{x} + L(t)[y - C(t)\widehat{x}], \quad \widehat{x}(t_0) = x_*, \tag{13}$$

где $\widehat{x}(t)$ — оценка состояния $x(t)$, а $L(t)$ — матрица параметров наблюдателя, подлежащая определению. Обозначим ошибку оценки $\varepsilon(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varepsilon} = A_c(t)\varepsilon + B_c(t)v, \quad \varepsilon(t_0) = x(t_0) - x_*,$$

где $A_c(t) = A(t) - L(t)C(t)$, $B_c(t) = B(t) - L(t)D(t)$.

Для нахождения оптимальной эллипсоидальной оценки состояния системы (11) воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3. [7] Если $det[D(\sigma)G(\sigma)D^T(\sigma)] \neq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, то оптимальный наблюдатель (13), обеспечивающий наилучшую эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}(Y_*(t), \widehat{x}(t))$ состояния системы (11) в момент времени $t \geqslant t_0$ при любых начальных состояниях и возмущениях, удовлетворяющих ограничению (12) с $R \geqslant 0$ и $G(\sigma) \geqslant 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, определяется матрицей

$$L_*(t) = [D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y_*(t)]^T[D(t)G(t)D^T(t)]^{-1}, \tag{14}$$

где матрица $Y_*(t) \geqslant 0$ является решением матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{gathered}\dot{Y} = A(t)Y + YA^T(t) + B(t)G(t)B^T(t) - \\ -[D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y]^T[D(t)G(t)D^T(t)]^{-1}[D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y]\end{gathered} \tag{15}$$

с начальным условием $Y(t_0) = R$. Кроме того, при $R > 0$ выполняется $Y_*(t) > 0$, $t \in [t_0, T]$.

Таким образом, для системы (13) множество достижимости имеет вид эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$, матрица которого удовлетворяет уравнению

$$\dot{Y} = A_c(t)Y + YA_c^T(t) + B_c(t)G(t)B_c^T(t) \tag{16}$$

с начальным условием $Y(t_0) = R$. То есть для системы (11) состояние $x(t)$ находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$ с центром в точке $\widehat{x}(t)$, определяемой уравнением наблюдателя (13).

Полученное множество позволяет найти состояние $x(t)$ в момент времени t.

3.1. *Пример нахождения множества достижимости для задачи с неизвестным начальным условием.* Рассмотрим применение описанного способа на примере уравнения Матье-Хилла с затуханием [10, 11]:

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \omega_0^2(t)(1 + F(t))x = u + v, \quad F(t) = \frac{2\mu}{a + b\cos\omega t},$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a > b$. Добавим в систему выход $y = x_1 + x_2 + v$ и решим полученную задачу на отрезке времени $[0, 4]$.

Система примет вид:

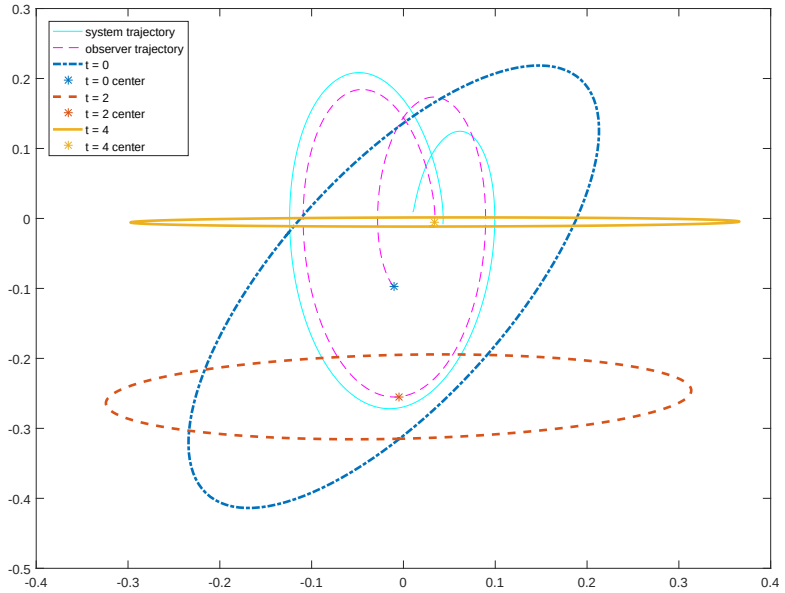


Рис. 3. Траектории системы и эволюция множеств достижимости

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(1+F(t)) & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 1.$$

Матрицы для ограничений (12) возьмем в виде

$$G = 1, \quad R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Также выберем значения параметров: $\omega_0 = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 1$, $b = 0.5$, $\mu = 0.1$.

Для нахождения множеств достижимости системы под действием возмущения решим уравнение (15), используя его решение, найдем $L_*(t)$ при помощи (14), далее найдем матрицы замкнутой системы A_c и B_c и с их помощью найдем множества достижимости, решив (16).

Также, для наглядности работы метода, построим траектории системы и наблюдателя. Для этого добавим в систему (11) нестационарное возмущение $v = 0.5 \sin \pi t$ и сдвинем ее начальное условие в точку $x_0 = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}$. Тогда из (12) начальным условием для оптимального наблюдателя (13) будет $x_0 - R^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

Построим траекторию системы и положение наблюдателя. Для этого отдельно построим (x_1, x_2) и (x_3, x_4). Голубой сплошной линией на рис. 3 обозначена траектория системы, сиреневой пунктирной — траектория наблюдателя. Также на нем показана эволюция множеств достижимости в моменты времени $t = 0$ (синий пунктирный с точкой), $t = 2$ (красный пунктирный), $t = 4$ (желтый сплошной) и их центры.

С течением времени размер множеств достижимости уменьшается, при этом они содержат траекторию системы и положение наблюдателя, которое является его центром.

Заключение. Были рассмотрены 2 задачи: задача нахождения множеств достижимости и задача оценивания множества достижимости. Множества достижимости были

найдены для задачи с неточно заданными начальным условием и возмущением и для задачи с параметрической неопределенностью, применение обоих методов продемонстрировано на примерах. Также была получена оценка множеств достижимости для задач с неточно известными начальным состоянием и возмущением, работа метода показана на примере.

Список литературы

1. Рогалев А. Н., Рогалев А. А. Управление маршрутом и оценка множеств достижимости беспилотных летательных аппаратов//Математические методы моделирования, управления и анализа данных, 2017.

2. Holmes P., Kousik S., Zhang B. and others Reachable Sets for Safe, Real-Time Manipulator Trajectory Design, 2020.

3. Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008.

4. Болодурина И. П., Луговскова Ю. П. Оптимальное управление иммунологическими реакциями организма человека// Проблемы управления, 2009. № 5. С. 44–52.

5. Шатхан Ф. А. Применение принципа максимума к задачам оптимизации параллельных химических реакций // Автоматика и телемеханика, 1964. Т. 25. Вып. 3. С. 368–373.

6. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988.

7. Баландин Д. В., Бирюков Р. С., Коган М. М. Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем в задачах оценивания и управления // Дифференциальные уравнения, 2019. Т. 55. № 11. С. 1485–1498.

8. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств М.: Наука, 2007.

9. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления (пер. с англ. Васильева В. А., Николаева Ю. А.) М.: Мир, 1977.

10. Сорокина М. С. Оптимальное оценивание линейных нестационарных систем с использованием множеств достижимости // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е. В. Воскресенского, 2020.

11. Сорокина М. С. Применение множеств достижимости в оптимальном оценивании линейных нестационарных систем // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии, 2020.

Сорокина Мария Сергеевна — ассистент кафедры ДУМЧА Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского. E-mail: `sorokina@itmm.unn.ru`. В 2020 году окончила магистратуру по направлению „Прикладная математика и информатика“ ННГУ им. Н. И. Лобачевского с отличием. На данный момент является аспиранткой 1 года по направлению „Математика и механика“.

Mariya Sorokina — assistant of the Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis Department, the Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky University. In 2020 she graduated from the magistracy in the educational program „Applied Mathematics and Informatics“, Lobachevsky University with honors. At the moment she is a 1st year graduate student in the educational program „Mathematics and Mechanics“.

Дата поступления — 06.03.2021

NUMERICAL INVESTIGATION AND OPTIMIZATION OF OUTPUT PROCESSES IN CYCLIC CONTROL OF CONFLICTING FLOWS

A. M. Fedotkin

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod
603950, Nizhnij Novgorod, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-69-80

In this article, we consider a non-classical queuing system with waiting, in which m conflicting flows are managed in a class of cyclic algorithms. Conflicting threads mean that they cannot be summed up and this does not allow you to reduce the problem to a simpler case with a single thread. Requirements from different conflicting threads are served at non-overlapping intervals. In addition, there are additional time intervals — readjustments, due to which the problem of conflicting threads is resolved. Such systems are adequate models of real-world systems for processing and transmitting information, technological systems, transport systems, etc.

Unlike most well-known works, the so-called non-local description of the requirements flow proposed in [1–6] is used to construct a mathematical model of output flows. The description of output streams includes the state of the service device and the values of queues for conflicting streams. Note that the functioning of the system under consideration for servicing heterogeneous requirements and managing conflict flows in continuous time is a complex non-Markov process. Therefore, studying the characteristics of the system and the properties of the output streams in continuous time is a difficult task. Using the theoretical results of works [7–12], this article substantiates the method of numerical investigation of the system by simulation methods using computer and information technologies. The results of studies of the dynamics of output processes for servicing requirements on a simulation model are interpreted on the problem of managing conflict heterogeneous traffic flows at isolated intersections.

The problem of cyclic management of m conflicting flows $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \ldots, \overline{\Pi}_m$ heterogeneous requirements during their maintenance by the system is considered. Input streams $\overline{\Pi}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ are considered conflicting and independent. Conflicting input streams means that the maintenance of the streams must occur at non-overlapping intervals. Moreover, the specified intervals should be separated by time intervals during which the service of any requirements is prohibited. The j stream requests only go to the O_j drive with an unlimited number of waiting places. In the system without loss of requests, it is possible to record the outgoing flow N_j with an unlimited supply of pending requirements in the O_j storage and with maximum use of the resources of the service device for each $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Flows $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ are called saturation flows. The need to introduce saturation flows arises primarily in those real queuing systems in which it is clear in advance that the service durations of different requirements can be determined by the state of the service system and, as a result, be dependent and have different distribution laws. As an example, the process of crossing the stop line by vehicles with a green traffic light allowing it can be cited. If there is a queue, the first cars only start moving and move more slowly than those who arrive at the intersection at the green light interval and continue driving at maximum speed. The service device has $2m$ states $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$. For a fixed $n \in \{1, 2, \ldots, 2m\}$, the duration of stay in the state $\Gamma^{(n)}$ is equal to T_n. For all $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ in state $\Gamma^{(2j-1)}$, only the requirements of flow $\overline{\Pi}_j$ are served. The maximum possible number of serviced

© A. M. Fedotkin, 2021

requirements of the flow $\overline{\Pi}_j$ in the state $\Gamma^{(2j-1)}$ is determined by the saturation flow Π_j and is equal to l_j. For all $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ in state $\Gamma^{(2j)}$, the requirements of each of the threads are not served. The service device changes states cyclically in the following sequence: $\Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \cdots \to \Gamma^{(2m)} \to \Gamma^{(1)}, \ldots$. So, the service of conflicting threads occurs in non-overlapping time intervals, which are separated by changeover intervals. An adequate mathematical model of this kind of real problems is the control systems of service with a variable structure [1].

We consider input streams $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \ldots, \overline{\Pi}_m$ to be nonordinary Poisson random processes Gnedenko-Kovalenko [1]. Then the sequence of calling moments at which the requirements arrive in the system for each thread $\overline{\Pi}_j$ is a Poisson process with the parameter λ_j. Moreover, let's assume that at each of these moments, one or two applications appear, respectively, with probabilities p_j or $q_j = 1 - p_j$. Let the random variable $\eta_j(t)$ for each $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ determine the number of received requests to the storage O_j along the stream $\overline{\Pi}_j$ for the time interval $[0, t)$. An important characteristic of the process of cyclic management of conflicting flows of requirements is the loading of the service system for each flow and its overall loading for all or only some pre-fixed flows. Unfortunately, determining the load of managed unconventional queuing systems is always a difficult task. In classical single-channel systems with an unlimited queue, Poisson input flow, and demand service, according to the exponential law, the probability that there will be at least one demand in the system in stationary mode $\lambda\mu^{-1} < 1$. Here, the parameters λ and μ are the intensities of receipt and, respectively, demand service. Let $\theta(t)$ is the total length of those time intervals between zero and the moment t, during which there will be at least one requirement in the system.

Monitor various real experiments show that with increasing system load typically increases during T_{per} the transition process for its entry into the quasi-stationary mode and time computer modeling to calculate its probability and the numerical characteristics with specified degree of accuracy and reliability. Because of this, when the choice of algorithm parameters to determine when T_{per} the end of the transition process, and the job accuracy and reliability of calculations of probability and its numerical characteristics substantially overlook the importance of load estimation system. For the stationary mode of the system at $l_j \neq 1$, it is analytically impossible to obtain observable formulas for the laws of distribution of queue lengths, service waiting time, and, finally, for the laws of distribution of output streams. To obtain estimates of these distributions, some numerical characteristics for the solution of the optimization problem to the minimum weighted average waiting time and service requirements in the arbitrary flow developed a computer simulation videomodel the cyclic control m flows.

Key words: conflict flow, homogeneous Markov sequence, conditional distribution, Markov process.

References

1. Fedotkin M. A., Fedotkin M. A. Analysis and optimization of output processes under cyclic control of conflicting traffic streams Gnedenko-Kovalenko // Automatics and telemechanics. Russian Academy of Sciences. 2009. N 12. P. 92–108.

2. Fedotkin M. A., Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V. Construction and Analysis of a Mathematical Model of the Spatial and Temporal Characteristics of Traffic Flows // Automatic Control and Computer Sciences. Allerton Press, Inc. 2014. Vol. 48. N 6. P. 358–367.

3. Fedotkin A. M. Determination of the stationary regime of recurrent Markov chains by the iterative-majorant method // Bulletin of the Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. 2009. N 4. P. 130–140.

4. Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V. Dynamic models of non-uniform traffic flow on highways // Avtomatika i telemekhanika. Russian Academy of Sciences. 2020. N. 8. P. 149–164.

5. Fedotkin A. M., Fedotkin M. A. Model for refusals of elements of a controlling system // Transactions of the first French-Russian Conference on „Longevity, Aging and Degradation Models in Reliability, Public Health, Medicine and Biology, LAD' 2004". V. 2. Supported by UNESCO. Saint Petersburg: St. Petersburgs SPU. 2004. P. 136–151.

6. Fedotkin A. M. Matematicheskie modeli transportnyh potokov na avtomagistrali i na upravlyaemom po ciklicheskomu algoritmu perekrestke // Nizhegorodskij gosudarstvennyj universitet im N. I. Lobachevskogo. 2009. Dep. v VINITI 11.01.09, № 5-B2009.

7. Fedotkin M. A. Fedotkin A. A. Vyhodnye processy pri ciklicheskom upravlenii neordinarnymi potokami // Sbornik nauchnyh statej Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii „Teoriya veroyatnostej, sluchajnye processy, matematicheskaya statistika i prilozheniya". Minsk: BGU. 2008. P. 362–369.

8. Fedotkin A. M. Arifmeticheskie svojstva raspredelenij vyhodnogo processa pri ciklicheskom upravlenii potokami Gnedenko-Kovalenko // Nizhegorodskij gosudarstvennyj universitet im N. I. Lobachevskogo. 2009. Dep. v VINITI 14.04.09, N 213-B2009.

9. Fedotkin A. M. Svojstva upravlyaemoj vektornoj markovskoj cepi so schetnym chislom sostoyanij, udovletvoryayushchej rekurrentnym sootnosheniyam // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. 2009. N 3. P. 122–141.

10. Fedotkin A. A. , Fedotkin A. M. Izuchenie svojstv potoka Gnedenko-Kovalenko // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. 2008. N 6. P. 156–160.

11. Fedotkin A. A. , Fedotkin A. M. Issledovanie realizacii transportnogo potoka Bartletta // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. 2013. N 3. P. 195–199.

12. Fedotkin A. M. , Golisheva N. M. Ciklicheskoe upravlenie konfliktnymi potokami Gnedenko–Kovalenko // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. 2014. N 4. P. 382–388.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ

А. М. Федоткин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия

УДК 519.21
DOI: 10.24412/2073-0667-2021-2-69-80

В данной статье рассматривается неклассическая система массового обслуживания с ожиданием, в которой осуществляется управление m конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов. Конфликтность потоков означает, что их нельзя суммировать, и это не позволяет свести задачу к более простому случаю с одним потоком. Обслуживание требований из различных конфликтных потоков происходит в непересекающиеся промежутки времени. Кроме того, есть еще дополнительные промежутки времени — переналадки, за счет которых разрешается проблема конфликтности потоков. Такого рода системы являются адекватными моделями реально действующих систем по переработке и передаче информации, технологических систем, транспортных систем и т. д.

В отличие от большинства известных трудов, для построения математической модели выходных потоков в работе используется так называемое нелокальное описание потока требований. В описание выходных потоков включены состояние обслуживающего устройства и величины очередей по конфликтным потокам. Заметим, что функционирование рассматриваемой системы обслуживания неоднородных требований и управления конфликтными потоками в непрерывном времени является сложным немарковским процессом. Поэтому изучение характеристик системы и свойств выходных потоков в непрерывном времени является трудноразрешимой задачей. В этой статье обосновывается методика численного исследования системы методами имитационного моделирования с использованием компьютерных и информационных технологий. Результаты исследований динамики выходных процессов обслуживания требований на имитационной модели проинтерпретированы на задаче управления конфликтными неоднородными транспортными потоками на изолированных перекрестках.

Ключевые слова: конфликтный поток, однородная марковская последовательность, условное распределение, марковский процесс.

Введение. В отличие от большинства известных трудов, для построения математической модели выходных потоков в работе используется так называемое нелокальное описание потока требований, предложенное в [1–6].

В описание выходных потоков включены состояние обслуживающего устройства и величины очередей по конфликтным потокам. Заметим, что функционирование рассматриваемой системы обслуживания неоднородных требований и управления конфликтными потоками в непрерывном времени является сложным немарковским процессом. Поэтому изучение характеристик системы и свойств выходных потоков в непрерывном времени

© А. М. Федоткин, 2021

является трудноразрешимой задачей. Используя теоретические результаты работ [7–12], в этой статье обосновывается методика численного исследования системы методами имитационного моделирования с использованием компьютерных и информационных технологий. Результаты исследований динамики выходных процессов обслуживания требований на имитационной модели проинтерпретированы на задаче управления конфликтными неоднородными транспортными потоками на изолированных перекрестках.

1. Постановка задачи на содержательном уровне. Рассматривается задача циклического управления m конфликтными потоками $\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$, …, $\overline{\Pi}_m$ неоднородных требований при их обслуживании системой. Входные потоки $\overline{\Pi}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ считаются конфликтными и независимыми. Конфликтность входных потоков означает, что обслуживание потоков должно происходить в непересекающиеся промежутки времени. Более того, указанные промежутки должны быть разделены промежутками времени, в которые запрещается обслуживание каких-либо требований. Требования потока $\overline{\Pi}_j$ поступают только в накопитель O_j с неограниченным числом мест для ожидания. В системе без потерь заявок имеется возможность фиксировать выходящий поток Π_j при неограниченном запасе ожидающих требований в накопителе O_j и при максимальном использовании ресурсов обслуживающего устройства при каждом $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Потоки Π_1, Π_2, …, Π_m называются потоками насыщения. Необходимость введения потоков насыщения возникает в первую очередь в тех реальных системах массового обслуживания, в которых заранее понятно, что длительности обслуживаний различных требований могут определяться состоянием системы обслуживания и, как следствие, быть зависимыми и иметь разные отличающиеся законы распределения. В качестве примера можно привести процесс пересечения транспортными средствами стоп-линии при разрешающем зеленом сигнале светофора. При наличии очереди первые машины только трогаются с места и совершают переезд медленнее, чем те, кто приезжает к перекрестку на промежутке зеленого света и продолжает движение на максимальной скорости. Обслуживающее устройство имеет $2m$ состояний $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, …, $\Gamma^{(2m)}$. При фиксированном $n \in \{1, 2, \ldots, 2m\}$ длительность пребывания в состоянии $\Gamma^{(n)}$ равна T_n. Для всех $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживаются только требования потока $\Gamma^{(2j-1)}$. Максимально возможное число обслуженных требований потока $\overline{\Pi}_j$ в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ определяется потоком насыщения Π_j и равно l_j. Для всех $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ в состоянии $\Gamma^{(2j)}$ требования каждого из потоков не обслуживаются. Обслуживающее устройство изменяет состояния циклически в следующей последовательности: $\Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \ldots \to \Gamma^{(2m)} \to \Gamma^{(1)} \to \ldots$ Итак, обслуживание конфликтных потоков происходит в непересекающиеся промежутки времени, которые разделены интервалами переналадок. Адекватной математической моделью такого рода реальных задач являются управляющие системы обслуживания с переменной структурой [1].

2. Численное исследование выходных процессов. Входные потоки $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \ldots, \overline{\Pi}_m$ считаем неординарными пуассоновскими случайными процессами Гнеденко-Коваленко [1]. Тогда последовательность вызывающих моментов, в которые требования поступают в систему по каждому потоку $\overline{\Pi}_j$, представляет собой пуассоновский процесс с параметром λ_j. Более того, допустим, что в каждый из этих моментов появляются одна или две заявки соответственно с вероятностями p_j или $q_j = 1^{\smile} p_j$. Пусть случайная величина $\eta_j(t)$ при каждом $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ определяет число поступивших требований в накопитель O_j по потоку $\overline{\Pi}_j$ за промежуток времени $[0, t)$. Важной характеристикой процесса циклического управления конфликтными потоками требований является загрузка системы обслуживания по каждому потоку и ее общая загрузка по всем или только по некоторым заранее

фиксированным потокам. К сожалению, определение загрузки управляемых нетрадиционных систем массового обслуживания всегда представляет собой трудную задачу. В классических одноканальных системах с неограниченной очередью, пуассоновским входным потоком и обслуживанием требований по показательному закону вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет не менее одного требования, равна $\lambda\mu^{-1} < 1$. Здесь параметры λ и μ являются интенсивностями поступления и, соответственно, обслуживания требований. Пусть $\theta(t)$ есть суммарная длина тех промежутков времени между нулем и моментом t, в течение которых в системе будет не менее одного требования. Хорошо известно, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(|t^{-1}\theta(t) - \lambda\mu^{-1}| < \varepsilon) = 1.$$

Случайная величина вида $t^{-1}\theta(t)$ определяет среднее относительное время занятости системы на промежутке $[0, t)$ и приближенно при достаточно больших значениях t совпадает с величиной $\lambda\mu^{-1}$ в смысле сходимости по вероятности. Поэтому постоянную $\lambda\mu^{-1}$ естественно называют загрузкой или мерой занятости системы.

Будем теперь для задачи об управлении конфликтными потоками требований в классе циклических алгоритмов рассуждать аналогичным способом. Тогда вероятность ρ_j того, что в стационарном режиме в системе обслуживания по потоку $\overline{\Pi}_j$ будет не менее одной заявки, можно назвать загрузкой системы по этому потоку. Пусть мы хотим определить общую загрузку $\rho_{1,2}$ системы, например, по двум потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$. Тогда, в силу независимости входных потоков, потоков насыщения и циклического переключения состояний обслуживающего устройства, удается получить [3], что вероятность наличия не менее одной машины хотя бы в одном из потоков $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ равна $\rho_1 + \rho_2 - \rho_1\rho_2$. Поэтому можно считать, что по потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ общая загрузка $\rho_{1,2} = \rho_1 + \rho_2 - \rho_1\rho_2$. К сожалению, для процесса управления конфликтными транспортными потоками при $l_j \neq 1$ не удается определить простую формулу для вероятности ρ_j. Только при $l_j = 1$ в работе [3] было получено, что для стационарного режима вероятность наличия на перекрестке по потоку $\overline{\Pi}_j$ не менее одного требования равна

$$\rho_j = 1 - \frac{e^{\lambda_j T}}{2m}(1 + e^{-\lambda_j T_{2j}} + e^{-\lambda_j (T_{2j}+T_{2j}+1)} + \ldots + e^{-\lambda_j (T-T_{2j}-1)})(1 - \lambda_j(1 + q_j)),$$

где $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{2m}$. Даже эта формула является сложной для вычислений без компьютера. Поэтому возникает непростая задача определения оценки $\widetilde{\rho}_j$ для загрузки ρ_j по потоку $\overline{\Pi}_j$ при $l_j \neq 1$.

Если необходимые и достаточные условия существования стационарного режима в управляемой системе массового обслуживания совпадают и простым образом зависят от интенсивностей поступления и обслуживания требований, то эти условия, как правило, являются основой определения загрузки или, в крайнем случае, оценки для загрузки. Так необходимые и достаточные условия существования стационарного режима в системе по потоку j, согласно результатам работы [3], можно записать в виде $\lambda_j T(1 + q_j)/l_j < 1$ или в эквивалентном форме $\lambda_j T(1 + q_j)/[\mu_j T_{2j-1}] < 1$. Здесь параметр μ_j^{-1} определяет среднее время обслуживания требования потока $\overline{\Pi}_j$ и $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$. Отсюда следует, что в качестве оценки $\widetilde{\rho}_j$ можно предложить формулу вида: $\widetilde{\rho}_j = \widetilde{\rho}_j(\lambda_j,q_j,\mu_j,T,T_{2j-1}) = \lambda_j T(1 + q_j)/[\mu_j T_{2j-1}]$. Будем считать выбранную оценку $\widetilde{\rho}_j$ приемлемой или подходящей, если она удовлетворяет следующим естественным требованиям: 1) для оценки $\widetilde{\rho}_j$ выполняется неравенство $0 < \widetilde{\rho}_j < 1$; 2) при заданных параметрах T и T_{2j-1} значение оценки

$\widetilde{\rho}_j(\lambda_j, q_j, \mu_j, T, T_{2j-1})$ не убывает с ростом каждого из параметров λ_j, q_j и не возрастает с ростом каждого из параметров μ_j, T_{2j-1}; 3) если при некоторых изменениях набора параметров λ_j, q_j, μ_j, T и T_{2j-1} значение $\lambda_j T(1+q_j) - [\mu_j T_{2j-1}]$ приближается к нулю, то значение оценки $\widetilde{\rho}_j$ должно стремиться к единице. Легко проверить, что предлагаемая оценка $\widetilde{\rho}_j$ при $\lambda_j T(1+q_j) < [\mu_j T_{2j-1}]$ является подходящей. В дальнейшем, ради простоты, оценку $\widetilde{\rho}_j$ будем называть квазизагрузкой по потоку $\overline{\Pi}_j$. Теперь можно привести следующую подходящую оценку

$$\widetilde{\rho}_{1,2}(\lambda_1, q_1, \mu_1, \lambda_2, q_2, \mu_2, T, T_1, T_3) = \widetilde{\rho}_1 + \widetilde{\rho}_2 - \widetilde{\rho}_1\widetilde{\rho}_2$$

для загрузки $\rho_{1,2} = \rho_1 + \rho_2 - \rho_1\rho_2$ системы по двум потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$.

Наблюдения за различными реальными экспериментами показывают, что с увеличением загрузки системы, как правило, увеличивается время T_{trans} переходного процесса системы для ее вхождения в квазистационарный режим и время компьютерного моделирования для вычисления ее вероятностных и числовых характеристик с заданной степенью точности и надежности. В силу этого при выборе как параметров алгоритма определения момента T_{trans} окончания переходного процесса системы, так и при задании точности и надежности для вычислений ее вероятностных и числовых характеристик существенно учитывается значение оценки загрузки системы. Для стационарного режима системы при $l_j \neq 1$ аналитически не удается получить обозримые формулы для законов распределения длин очередей, времени ожидания обслуживания и, наконец, для законов распределения выходных потоков. Для получения оценок указанных законов распределения, некоторых их числовых характеристик и для решения задачи оптимизации по условию минимума среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания требования в системе произвольного потока была разработана компьютерная имитационная видеомодель процесса циклического управления m потоками.

Пусть символ $v = 1, 2, \ldots$ задает порядковый номер требования при его поступлении в накопитель O_j системы обслуживания. Обозначим через $\gamma^0_{j,v}$ время (в секундах) ожидания начала обслуживания v-ой заявки потока $\overline{\Pi}_j$ в системе с нулевыми начальными очередями и через $\gamma^+_{j,v}$ время (в секундах) ожидания начала обслуживания v-ой заявки потока $\overline{\Pi}_j$ в системе с заданными ненулевыми начальными очередями. На первом этапе имитационного моделирования происходит вычисление времени T_{trans} (в секундах) переходного процесса или момента достижения системой квазистационарного режима. Для этого по каждому потоку $\overline{\Pi}_j$ последовательно по $v = 1, 2, \ldots$ происходило вычисление средних арифметических

$$\widetilde{M}(\gamma^0_{j,v}) = v^{-1}(\gamma^0_{j,1} + \gamma^0_{j,2} + \ldots + \gamma^0_{j,v}), \quad v = 1, 2, \ldots,$$

наблюдаемых времен ожидания в системе с нулевыми начальными очередями и вычисление средних арифметических

$$\widetilde{M}(\gamma^+_{j,v}) = v^{-1}(\gamma^+_{j,1} + \gamma^+_{j,2} + \ldots + \gamma^+_{j,v}), \quad v = 1, 2, \ldots,$$

наблюдаемых времен ожидания в системе с заданной величиной $x_{j,0} > 0$ начальной очереди. Наступление момента T_{trans} квазистационарного режима или окончания времени квазипереходного процесса в системе считалось тогда, когда первый раз происходило k кратное по v выполнение условия вида

$$|(\widetilde{M}(\gamma_{j,v}^{0}) - \widetilde{M}(\gamma_{j,v}^{+}))/\widetilde{M}(\gamma_{j,v}^{0})| < \delta$$

сразу для всех $j = 1, 2, \ldots, m$. Здесь натуральное число k и $0 < \delta < 1$ являются заданными параметрами алгоритма определения оценки времени $\widetilde{T}_{trans}$ переходного процесса. На втором этапе продолжалось имитационное моделирование только системы с нулевыми начальными очередями с целью вычисления по каждому из m потоков оценок с заданной точностью ε для основных характеристик системы в квазистационарном режиме. При этом значение точности ε конкретной оценки было равно произведению некоторой константы Δ на значение этой оценки. На имитационной модели для потока $\overline{\Pi}_j$ в квазистационарном режиме с заданной надежностью β и заданной точностью ε вычислялись следующие оценки: 1) оценки $\widetilde{M}(\gamma_j)$ и $\widetilde{D}(\gamma_j)$ для математического ожидания и, соответственно, для дисперсии времени γ_j ожидания начала обслуживания произвольной заявки $\overline{\Pi}_j$; 2) оценка вида $\widetilde{M}(\gamma) = (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(1+q_j))^{-1} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(1+q_j)\widetilde{M}(\gamma_j)$ для математического ожидания среднего взвешенного времени γ ожидания начала обслуживания заявки произвольного потока; 3) оценки $\widetilde{M}(æ_j)$ и $\widetilde{D}(æ_j)$ для математического ожидания и, соответственно, дисперсии случайной длины $æ_j$ очереди машин потока $\overline{\Pi}_j$ в произвольный момент включения обслуживающим устройством состояния $\Gamma^{(2j\breve{}1)}$; 4) оценки $\widetilde{M}(\xi_j')$ и $\widetilde{D}(\xi_j')$ для математического ожидания и, соответственно, дисперсии случайного числа ξ_j' требований потока $\overline{\Pi}_j$, покидающих накопитель O_j за промежуток T_{2j-1}; 5) значение $\widetilde{\rho}_j$ оценки квазизагрузки системы по каждому потоку $\overline{\Pi}_j$ и значение $\widetilde{\rho}_{1,2}$ оценки для общей загрузки системы, например, по потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$; 6) оценка закона распределения и вид гистограммы относительных частот для величины ξ_j'. В качестве иллюстрации эффективности совместного применения аналитических методов и метода имитационного моделирования приведем решение следующих конкретных задач. Первая задача заключается в качественно-численном исследовании процесса циклического управления только двумя наиболее интенсивными транспортными потоками $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ на перекрестке. Поэтому светофор (обслуживающее устройство) имеет четыре фазы или состояния $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(3)}$ and $\Gamma^{(4)}$. Вторая задача — это определение квазиоптимальной длительности T_1^* зеленой фазы (состояния) $\Gamma^{(1)}$ для потока $\overline{\Pi}_1$ и квазиоптимальной длительности T_3^* зеленой фазы (состояния) $\Gamma^{(3)}$ для потока $\overline{\Pi}_2$ по условию минимума для оценки $\widetilde{M}(\gamma)$ математического ожидания среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания машины произвольного транспортного потока.

Программная реализация имитационной модели на компьютере выполнена средствами разработок Embarcadero Delphi 10.4.1 на языке Object Pascal. Имитационная модель может работать как в режиме, когда требования покидают систему группами, так и в режиме, когда заявки обслуживаются последовательно по одной по мере их поступления. Компьютерная имитационная модель позволяет не только в режиме счета вычислить основные характеристики работы перекрестка с заданной степенью точности и надежности и на этой основе найти квазиоптимальное управление потоками, но также позволяет наблюдать в видеорежиме весь процесс обслуживания требований и управление конфликтными потоками на примере движения автомобилей на перекрестке.

Рассмотрим пример реального перекрестка, для которого $\lambda_1 = 0{,}16$ машин/с, $q_1 = 0{,}3$, $\mu_1 = 1$ машин/с, $\lambda_2 = 0{,}22$ машин/с, $q_2 = 0{,}4$, $\mu_2 = 1$ машин/с, $T_2 = T_4 = 4$ с. Используя имитационную модель при $k = 2$, $\delta = 0{,}1$, $\beta = 0{,}9$, $\Delta = 0{,}02$ и модифицированный метод покоординатного спуска, были определены квазиоптимальные значения $T_1^* = 10$ с и $T_3^* = 15$ с. длительностей зеленых фаз светофора для потока $\overline{\Pi}_1$ и соответственно для потока $\overline{\Pi}_2$. Значения T_1^* и T_3^* обеспечивают квазизагрузку $\rho_{1,2} = 0{,}8989$ и значение величины

Таблица 1

Значения оценок характеристик на кривой равных квазизагрузок

T	T_1	T_3	$\widetilde{M}(\gamma_1)$	$\widetilde{M}(\gamma_2)$	$\widetilde{M}(\gamma)$	$\widetilde{M}(æ_1)$	$\widetilde{M}(æ_2)$	$\widetilde{\rho}_1$	$\widetilde{\rho}_2$	$\widetilde{\rho}_{1,2}$	$\widetilde{D}(æ_1)$	$\widetilde{D}(æ_2)$	$\widetilde{D}(\xi'_1)$
30	9	13	12,883	10,0960	11,220	5,1486	6,1482	0,6933	0,711	0,9113	8,7867	11,635	5,598
31	9	14	14,322	9,2331	11,280	5,4963	5,9406	0,7164	0,682	0,9098	10,5700	10,270	5,534
32	10	14	12,201	10,5290	11,183	5,0690	6,6167	0,6656	0,704	0,9010	8,1432	12,443	6,499
33	10	15	13,148	9,3841	10,903	5,3938	6,1513	0,6864	0,678	0,8989	8,5311	11,086	6,616
34	10	16	14,324	9,1314	11,226	5,8074	6,1556	0,7072	0,655	0,8989	9,3487	11,067	6,409

Таблица 2

Значения оценок основных характеристик на прямой $T_1 + T_2 = 25$

T	T_1	T_3	$\widetilde{M}(\gamma_1)$	$\widetilde{M}(\gamma_2)$	$\widetilde{M}(\gamma)$	$\widetilde{M}(æ_1)$	$\widetilde{M}(æ_2)$	$\widetilde{\rho}_1$	$\widetilde{\rho}_2$	$\widetilde{\rho}_{1,2}$	$\widetilde{D}(æ_1)$	$\widetilde{D}(æ_2)$	$\widetilde{D}(\xi'_1)$
33	8	17	25,5660	7,3854	14,739	8,0262	5,4289	0,858	0,5979	0,9429	25,5150	9,0236	3,167
33	9	16	17,4340	8,2612	11,957	6,4330	5,6971	0,763	0,6353	0,9134	13,9250	9,8279	4,901
33	10	15	13,1480	9,3841	10,903	5,3938	6,1513	0,686	0,6776	0,8989	8,5311	11,0860	6,616
33	11	14	11,5710	10,9960	11,239	5,0696	6,7562	0,624	0,7260	0,8970	8,2046	12,0920	7,463
33	12	13	10,1040	13,0420	11,923	4,6664	7,3472	0,572	0,7819	0,9066	7,2232	16,1610	8,385
33	13	12	8,8784	18,3700	14,090	4,2971	9,2859	0,528	0,8470	0,9278	6,3238	23,6060	8,732
33	14	11	7,9915	33,4080	23,223	4,1897	14,0670	0,490	0,9240	0,9613	5,5462	66,6070	8,696

$\widetilde{M}(\gamma)$, равное 10,93 с. Для сравнения укажем, что используемые на практике длительности $T_1 = 41$ с и $T_3 = 51$ с дают значение $\widetilde{M}(\gamma) = 20{,}265$ с и значение $\widetilde{\rho}_{1,2} = 0{,}8049$.

В табл. 1 приведена часть результатов счета в точках на кривой равных квазизагрузок, а в табл. 2 приведены результаты счета на прямой $T_1 + T_2 = 25$. Отметим, что полный перебор включает 431 точку. Квазиоптимальные длительности $T_1^* = 10$ и $T_3^* = 15$ фаз светофора обеспечивают общую квазизагрузку $\rho_{1,2} = 0{,}8989$ и минимальное значение величины $\widetilde{M}(\gamma)$, равное 10,903, и тем самым решают задачу оптимизации по критерию $\widetilde{M}(\gamma)$.

Для сравнения укажем, что используемые на практике более продолжительные длительности $T_1 = 41$ и $T_3 = 51$ обеспечивают общую квазизагрузку $\rho_{1,2}^* = 0{,}80486$ и дают значение оценки $\widetilde{M}(\gamma)$ среднего взвешенного времени γ ожидания начала обслуживания машины произвольного потока на таком перекрестке, равное величине 20,265. Оценки для среднего времени ожидания машины произвольного потока, как правило, уменьшаются при сокращении значения периода T циклического управления. Например, для этого перекрестка при фиксированном $T = 60$ квазиоптимальное значение для T_1 равно 20, которое обеспечивает общую квазизагрузку $\rho_{1,2}^* = 0{,}84114$ и оценку $\widetilde{M}(\gamma) = 13{,}808$. Эта оценка меньше величины 20,265, которая соответствует значению $T_1 = 41$ и $T_3 = 51$. Заметим, что для этого перекрестка в области существования стационарного режима минимальное значение общей квазизагрузки равно 0,7661, которое достигается при $T = 10000$, $T_1 = 4028$.

Для квазиоптимального управления $T_1^* = 10$ и $T_3^* = 15$ найдем на имитационной модели более точные оценки основных характеристик этого перекрестка. Пусть теперь параметры δ и Δ расчета оценок соответственно равны: $\delta = 0{,}09$ и $\Delta = 0{,}01$. В этом случае более точный численный расчет оценок характеристик дает следующие результаты:

a) оценка $\widetilde{T}_{trans}$ времени T_{trans} переходного процесса равна 472;

b) оценка $\widetilde{M}(\gamma_1) = 13{,}178$ с точностью $\epsilon_{1,1} = 0{,}1317$ и оценка $\widetilde{M}(\gamma_2) = 9{,}4986$ с точностью $\epsilon_{1,2} = 0{,}0949$ для среднего значения времени ожидания начала обслуживания машины по потоку Π_1 и, соответственно, по потоку Π_2;

c) оценка $\widetilde{M}(\gamma) = 10{,}982$ среднего взвешенного времени γ ожидания начала обслуживания машины произвольного потока;

Таблица 3

Значения оценок характеристик

T	T_1	T_3	$\widetilde{M}(\gamma_1)$	$\widetilde{M}(\gamma_2)$	$\widetilde{M}(\gamma)$	$\widetilde{D}(\xi'_1)$
33	10	15	13,148	9,3841	10,903	9,5337
40	12	20	15,096	8,9403	11,398	12,827
60	20	32	18,223	10,854	13,808	22,235
80	27	45	23,493	12,316	16,812	30,993
100	34	58	28,722	14,096	19,979	41,793

d) оценка $\widetilde{D}(\gamma_1) = 84{,}9$ с точностью $\epsilon_{2,1} = 0{,}849$ и оценка $\widetilde{D}(\gamma_2) = 60{,}2$ с точностью $\epsilon_{2,2} = 0{,}602$ для дисперсии времени ожидания начала обслуживания машины по потоку Π_1 и, соответственно, по потоку Π_2;

e) оценка $\widetilde{M}(æ_1) = 5{,}3459$ с точностью $\epsilon_{3,1} = 0{,}0534$ и оценка $\widetilde{M}(æ_2) = 6{,}2151$ с точностью $\epsilon_{3,2} = 0{,}0621$ для средней длины очереди машин по потоку Π_1 и, соответственно, по потоку Π_2 в момент включения для каждого из них зеленой фазы обслуживания;

f) оценка $\widetilde{D}(æ_1) = 8{,}7962$ с точностью $\epsilon_{4,1} = 0{,}0879$ и $\widetilde{D}(æ_2) = 10{,}866$ с точностью $\epsilon_{4,2} = 0{,}1086$ для дисперсии длины очереди машин по потоку Π_1 и, соответственно, по потоку Π_2 в момент включения для каждого из них зеленой фазы обслуживания;

g) оценка $\widetilde{M}(\xi'_1) = 6{,}795$ с точностью $\epsilon_{5,1} = 0{,}0679$ и оценка $\widetilde{M}(\xi'_2) = 10{,}132$ с точностью $\epsilon_{5,2} = 0{,}1013$ среднего числа машин, которые покидают перекресток за зеленую фазу по потоку Π_1 и, соответственно, по потоку Π_2;

h) оценка $\widetilde{D}(\xi'_1) = 6{,}6377$ с точностью $\epsilon_{6,1} = 0{,}0663$ и оценка $\widetilde{D}(\xi'_2) = 11{,}733$ с точностью $\epsilon_{6,2} = 0{,}1173$ дисперсии числа машин, которые покидают перекресток за зеленую фазу по потоку Π_1 и, соответственно, по потоку Π_2.

Качественно-численные исследования на имитационной модели позволяют сделать очень важный вывод для выходных потоков при квазиоптимальном управлении конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов. При квазиоптимальном управлении конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов оценка $\widetilde{D}(\xi')$ средней взвешенной дисперсии выходного потока принимает относительно небольшие значения. Например, для перекрестка с параметрами $\lambda_1 = 0{,}16$, $q_1 = 0{,}3$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}22$, $q_2 = 0{,}4$, $\mu_2 = 1$ и $T_2 = T_4 = T_0 = 4$ при квазиоптимальном управлении оценка $\widetilde{D}(\xi')$ средней взвешенной дисперсии выходного потока равна 9,5337.

В табл. 3 при заданных длительностях периода $T = 33, 40, 60, 80, 100$ циклического управления приведены соответствующие значения: a) квазиоптимальных параметров длительностей T_1 и T_3 фаз автомата-светофора; b) оценки $\widetilde{M}(\gamma_1)$ для среднего значения времени ожидания начала обслуживания машины по потоку Π_1; c) оценки $\widetilde{M}(\gamma_2)$ для среднего значения времени ожидания начала обслуживания машины по потоку Π_2; d) оценки $\widetilde{M}(\gamma)$ для среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания машины произвольного потока; e) оценки $\widetilde{D}(\xi')$ для средней взвешенной дисперсии выходного потока. Из этой таблицы легко видеть, что происходит резкое увеличение оценки $\widetilde{D}(\xi')$ для средней взвешенной дисперсии выходного потока при отклонении от квазиоптимальных значений параметров управления. Ясно, что выходные потоки машин с некоторого перекрестка поступают на следующий соседний с ним перекресток и являются для следующего перекрестка уже входными потоками. На практике хорошо известно, что

алгоритм управления на перекрестке будет более простым (например, с фиксированным ритмом переключения) и тем успешнее, чем меньше дисперсия входного потока, т. е. чем более стандартизованы выходные и входные потоки. Этот вывод подтверждает часто выдвигаемый тезис для случайных экспериментов с управлением о том, что сравнительно большое значение дисперсии некоторой характеристики случайного эксперимента есть результат неоптимального управления.

Список литературы

1. Федоткин А. М., Федоткин М. А. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко-Коваленко // Автоматика и телемеханика. РАН. 2009. № 12. С. 92–108.

2. Fedotkin A. M., Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V. Construction and Analysis of a Mathematical Model of Spatial and Temporal Characteristics of Traffic Flows // Automatic Control and Computer Sciences. Allerton Press, Inc. 2014. Vol. 48. N 6. P. 358–367.

3. Федоткин А. М. Определение стационарного режима рекуррентных марковских цепей итеративно-мажорантным методом // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 4. С. 130–140.

4. Федоткин М. А., Федоткин А. М., Кудрявцев Е. В. Динамические модели неоднородного потока транспорта на магистралях // Автоматика и телемеханика. РАН. 2020. № 8. С. 149–164.

5. Fedotkin A. M., Fedotkin M. A. Model for refusals of elements of a controlling system // Transactions of the first French-Russian Conference on „Longevity, Aging and Degradation Models in Reliability, Public Health, Medicine and Biology, LAD' 2004“. V. 2. Supported by UNESCO. Saint Petersburg: St. Petersburgs SPU. 2004. P. 136–151.

6. Федоткин А. М. Математические модели транспортных потоков на автомагистрали и на управляемом по циклическому алгоритму перекрестке // Нижегородский государственный университет им Н. И. Лобачевского. 2009. Деп. в ВИНИТИ 11.01.09, № 5-В2009.

7. Федоткин М. А., Федоткин А. А. Выходные процессы при циклическом управлении неординарными потоками // Сборник научных статей Международной научной конференции „Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения“. Минск: БГУ. 2008. С. 362–369.

8. Федоткин А. М. Арифметические свойства распределений выходного процесса при циклическом управлении потоками Гнеденко-Коваленко. // Нижегородский государственный университет им Н. И. Лобачевского. 2009. 24 с. Деп. в ВИНИТИ 14.04.09, № 213-В2009.

9. Федоткин А. М. Свойства управляемой векторной марковской цепи со счетным числом состояний, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям // Нижний Новгород. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 3. С. 122–141.

10. Федоткин А. А., Федоткин А. М. Изучение свойств потока Гнеденко-Коваленко // Нижний Новгород. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2008. № 6. С. 156–160.

11. Федоткин А. А., Федоткин А. М. Исследование реализации транспортного потока Бартлетта. // Нижний Новгород. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2013. № 3. С. 195–199.

12. Федоткин А. М. , Голышева Н. М. Циклическое управление конфликтными потоками Гнеденко-Коваленко // Нижний Новгород. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2014. № 4. С. 382–388.

Федоткин А. М. — e-mail: fandr@vmk.unn.ru; тел. +79519190935. Родился 30 сентября 1961 года в г. Горьком. В 1983 закончил Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.

С 1983 года и по настоящее время работает в Нижегородском государственном университете (ННГУ) им. Н. И. Лобачевского. Осуществляет педагогическую и научную деятельность в Институте информационных технологий математики и механики (ИИТММ) на кафедре „Дифференциальные уравнения, математический и численный анализ“ (ДУМЧА). Читает лекции по дисциплинам: „Математический анализ“, „Численные методы“, „Теория управляющих систем“, „Оптимальное управление конфликтными потоками“.

В 2009 году Федоткину А. М. присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук. Тема диссертации — „Моделирование и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными потоками Гнеденко-Коваленко“.

В 2012 году Федоткину А. М. было присвоено ученое звание доцента.

Область научных интересов Федоткина А. М.: построение математических моделей сложных систем, использование методов математического анализа, теории вероятностей, численных методов и имитационного моделирования для исследования построенных моделей и оптимизации реальных систем, задачи оптимального управления.

Имеет более 50 публикаций, в том числе учебных изданий и научных трудов. Получено 1 авторское свидетельство об изобретении (патент), (авторское свидетельство на изобретение № 1632045 A1 приоритет изобретения 20.06.1989 от 01.11.1990).

В настоящее время Федоткин А. М. занимает должность доцента кафедры Дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий математики и механики ННГУ.

Fedotkin Andrey Mihailovich was born on September 30, 1961 in the city of Gorky. In 1983 he graduated with honors from the Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky.

Since 1983 and currently works in the Nizhny Novgorod State University (UNN) to them. N. I. Lobachevsky. Carries out teaching activities at the Institute of Information Technologies of Mathematics and Mechanics (IITMM). Lectures on disciplines: „ Mathematical analysis“, „Methods of computation“, „Theory of control systems“.

In 2009 he was awarded the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

In 2012, Fedotkin A. M. was awarded the academic title of associate professor.

The area of scientific interests of Fedotkin A. M.: theory of control, construction of mathematical models of complex systems, the use of methods of probability theory, mathematical statistics and simulation to study the constructed models and optimization of real systems.

Has over 50 publications, including educational publications and scientific papers.

Currently Fedotkin A. M. holds the position of Associate Professor at the Department of DUMCHA at IITMM, NNSU.

Дата поступления — 06.03.2021

Правила представления и подготовки рукописей для публикации в журнале „ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ“

Общие требования.

Редакция принимает к рассмотрению статьи в электронном виде (*исходный файл в LaTeX* и файл PDF, либо MS Word с приложением оригиналов рисунков в формате тех программ, в которых они были сделаны, отдельными файлами).

Файлы, содержащие текст статьи, иллюстрации и дополнительные материалы, можно пересылать на электронный адрес редакции: problem-info@sscc.ru.

Принимаются файлы, архивированные архиваторами ZIP/7Z или RAR; применение самораспаковывающихся архивов не допускается.

При повторной отправке материалов, а также при внесении в исходный текст дополнений или исправлений необходимо сообщить об этом в редакцию в тексте электронного письма.

Текст статьи с формулами, рисунками, таблицами должен быть подготовлен на стандартном листе формата A4 через 1,5 интервала, размер шрифта 12 pt, все поля по 2 см.

Статьи, содержащие формулы, следует набирать в редакторе LaTeX. В остальных случаях допускается использование программы MSWord, шрифт — TimesNewRoman; автоматическая расстановка переносов в документе должна быть отключена.

Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия редколлегией Журнала статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки и переработку (и исключительное право на использование переведенного и (или) переработанного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам.

Журнал „Проблемы информатики“является некоммерческим изданием. Плата с авторов за публикацию статей не взимается.

К статье должны быть приложены:

— **разрешение на публикацию** от экспертного совета организации, в которой выполнена работа (для авторов из России);

— **оригинал рецензии;**

портретные фотографии авторов разрешением не менее 300 dpi.

— Блоки информации и на русском, и на английском языках просьба присылать отдельными файлами:

— **Название** статьи;

— **Инициалы и фамилии** авторов;

— **Места работы** авторов: полное наименование организации, почтовый индекс, город, страна;

— **Код(ы) классификации УДК**;

— **Аннотации**, содержащие краткую постановку задачи и описание метода решения: на русском языке объемом не более 1000 знаков, на английском языке расширенную, объемом от 4000 до 8000 знаков, что соответствует требованиям ВАК и Scopus.

— **Ключевые слова**;

— **Списки используемой литературы** в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5—2008 (в английской версии необходимо выполнить **транслитерацию** неанглоязычных элементов списка литературы в соответствии с ГОСТ Р 7.0.34-2014) — составляются по ходу упоминания источников в тексте;

— **Краткие биографии (БИО)** авторов с указанием ключевых научных достижений (включая ученую степень, ученое звание — при наличии; основные области научных интересов и формулировку основных результатов, место работы, занимаемую должность, контактные данные — почтовый адрес с индексом, адрес электронной почты, контактный телефон).

Подготовка статьи.

1. Материал статьи должен быть изложен в следующей последовательности:

1. название статьи на английском языке;
2. инициалы и фамилия автора(ов) на английском языке;
3. место работы автора(ов) (на английском языке): полное наименование организации, индекс, город, страна;
4. англоязычная аннотация;

5. ключевые слова на английском языке;
6. references+транслитерация неанглоязычных элементов списка литературы;
7. название статьи на русском языке;
8. инициалы и фамилии и авторов;
9. место работы авторов: полное наименование организации, почтовый индекс, город, страна;
10. индекс УДК;
11. аннотация на русском языке;
12. ключевые слова (не более 8);
13. текст статьи;
14. список литературы, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ;
15. краткие биографии авторов на английском и русском языках с указанием ключевых научных достижений (ученую степень, ученое звание — при наличии; место работы, занимаемую должность, контактные данные — почтовый адрес с индексом, адрес электронной почты, контактный телефон, основные области научных интересов и формулировка основных результатов).

2. Требования к формулам:

— Нумерация формул сквозная, выносные формулы центрируются, номер выровнен по правому краю.

3. Требования к рисункам:

— Файлы с рисунками присылаются отдельно в формате программ, в которых они были выполнены: в формате MS Excel (для графиков и диаграмм), eps, pdf, png, tiff, bmp или jpeg (с максимальным качеством).

— Рисунки с подрисуночными подписями заверстываются в текст статьи.

— Тексты, являющиеся частью рисунка, выполняются шрифтом TimesNewRoman.

— Фотографии должны иметь разрешение не менее 300 dpi.

4. Дополнительные требования:

— В текст статьи необходимо включать ссылки на рисунки и таблицы, а также подрисуночные подписи и заголовки таблиц. Все буквенные обозначения, приведенные на рисунках, необходимо пояснить в основном тексте или в подрисуночных подписях.

— Сокращения слов не допускаются (кроме общепринятых).

— Векторные переменные обозначаются полужирным шрифтом без курсива.

— Таблицы не должны быть громоздкими. Значения физических величин в таблицах, на графиках и в тексте должны указываться в единицах измерения СИ.

— Графики, если их на рисунке несколько, а также отдельные детали на чертежах, узлы и линии на схемах следует обозначать цифрами, набранными курсивом.

— Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые имеются ссылки в тексте, нумерация сквозная.

— Ссылки на источники в тексте заключаются в квадратные скобки.

— Иностранные источники приводятся на языке оригинала. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Все статьи, опубликованные в журнале „Проблемы информатики“, доступны на сайте `https://elibrary.ru/title_about.asp?id=30275` и на сайте журнала `http://problem-info.sscc.ru` спустя год после опубликования.

Пример оформления статей можно посмотреть на сайте журнала `http://problem-info.sscc.ru`.