COMPARISON OF TRACE AND BISIMULATION EQUIVALENCES ON TIME PETRI NETS WITH WEAK TIME POLICY

A. Y. Zubarev

A. P. Ershov Institute of Informatics Systems,
630090, Novosibirsk, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2022-4-5-27
EDN: BQQUXA

The security of many information and computer systems is critically important, since their failure can lead to large losses. Behavioral equivalences play an important role in the specification and verification both to compare distinct systems and to reduce the structure of a system without affecting its behavior. Various behavioral equivalences for concurrent and distributed systems have been promoted in the literature and the relationships between them have been fairly well-studied. Two dichotomies are usually considered when comparing the equivalences. The first dichotomy is the “linear time – branching time” spectrum. Here, various possibilities of taking into account the choice points between the alternative actions of systems are discussed.

Alternative choice points are completely ignored in the linear time semantics. As a result, the system behavior is described by the set of all sequences of system actions. Trace equivalence is a typical example of linear time equivalence. The standard example of branching time equivalence is bisimulation assuming that systems should behave in the same way, mutually simulating each other. Bisimulation carefully takes into account the branching structure of the systems behaviors. The second dichotomy is the so-called “interleaving – partial” order spectrum. Here, it determines how to take into account partial order representing causal dependences between system actions. The essence of the interleaving approach is to represent the concurrency relation as a nondeterministic choice between the executions of linearly ordered actions, rather than directly. The advantage of the interleaving interpretation of concurrency is its simplicity, mathematical elegance, and allowing for the analysis of some safety and liveness properties of systems. However the difference between concurrency and nondeterminism is lost. A way to overcome the limitations of the interleaving approach is to model concurrency as a lack of causality dependence between system actions, which is presented, as a rule, by a partial order.

In the step semantics located between the boundaries of the spectrum, concurrency is presented as a step – a set of concurrent actions.

Petri nets (PN) is one of the generally accepted models for analysis of concurrent and distributed systems. The PN consists of two different sets of elements – places and transitions and a labeling function mapping each transition to an action. A state of the PN is called a marking – a subset of places that receive tokens when the net functions. A transition is enabled at a marking if the input places of the transition contain tokens. The firing of a transition enabled at a marking results in the new marking in which tokens are consumed from the input places and tokens are produced to the output places of the transition.

In verification systems, there is an obvious need for considering time. Different timed extensions of Petri nets have been proposed. Time Petri Nets (TPNs) are now a well-established model to describe and study safety-critical systems that require verification of real time (quantitative) characteristics, in

© A. Y. Zubarev, 2022

addition to functional (qualitative) properties. In the TPN, each transition is associated with a time interval. With that, each transition is assumed to have its own local clock. A state of the TPN contains a current marking and readings of the local clocks of enabled transitions. A transition can fire from a state only if the transition is enabled at the corresponding marking and its clock reaches a moment in time that is within the interval associated. So, the firing of an enabled transition can be suspended for a certain time. Along with that, the firing itself takes no time. State changes are divided in two types: either time elapses, i.e. the clocks of enabled transitions go forward, or a transition fires, i.e. a current marking is changed to a new one and the clocks of the transitions that become enabled at the new marking (newly enabled transitions) are reset to zero.

There are two policies of time elapsing in TPNs, which define strong and weak semantics. In the former semantics, time elapsing cannot exceed the upper bounds of enabled transitions and, therefore, an enabled transition must fire no later than the upper bound of its time interval is reached. On the contrary, any time elapsing is allowed in the latter semantics and, therefore, enabled transitions are not forced to fire. It is known that the two semantics are incomparable w.r.t. timed weak bisimulation.

Memory policies in TPNs determine when the local clocks of enabled transitions are reset. Intermediate and atomic memory policies are put forward in the literature. The former treats intermediary marking, i.e. the marking after consumption of tokens from the input places and before production of tokens to the output places of a transition t that fires. A transition t' is regarded as newly enabled and its clock is reset to zero after the firing of t whenever t' is disabled at the intermediary marking and becomes enabled at the new marking, i.e. after production of tokens to the output places of t. Instead, the latter policy considers a firing as one-step. The clock of t' is reset to zero only if it is disabled at the marking before t fires and becomes enabled at the new marking after t fires. It is known that the marking reachability/coverability and boundedness problems are undecidable for time Petri nets with strong semantics and any memory policy, whereas the problems are decidable in the case of TPNs with weak intermediate semantics but not with weak atomic semantics.

The aim of this paper is to define trace and bisimulation equivalences in the dichotomy of "interleaving — partial order" in terms of time Petri nets with weak time and intermediate memory policies.

Key words: time Petri nets, weak time semantics, intermediate memory policy, behavioral equivalences, interleaving semantics, step semantics, partial order semantics, time processes, trace and bisimulation equivalences.

References

1. Tarasyuk, I. V. Equivalences for behavioral analysis of concurrent and distributed computing systems // Academic Publishing House Geo, 2007.

2. Boyer M., Roux O. H. Comparison of the expressiveness of arc, place and transition time Petri nets // International Conference on Application and Theory of Petri Nets. 2007. P. 63–82.

3. Bérard B., Cassez F., Haddad S., Lime D., Roux O. H. Comparison of different semantics for time Petri nets // International Symposium on Automated Technology for Verification and Analysis. 2005. P. 293–307.

4. Reynier P. A., Sangnier A. Weak time Petri nets strike back! // International Conference on Concurrency Theory. 2009. P. 557–571.

5. Virbitskaite I. B., Zubarev A. Y. "True concurrency" semantics for time Petri nets with weak time and persistent atomic policies // Programming and Computer Software. 2021, 47 (5). P. 389–401.

6. Virbitskaite I., Bushin D., Best E. True concurrent equivalences in time Petri nets // Fundamenta Informaticae. 2016. 149 (4). P. 401–418.

СРАВНЕНИЕ ЯЗЫКОВЫХ И БИСИМУЛЯЦИОННЫХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНО-ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ СО СЛАБОЙ ВРЕМЕННОЙ СТРАТЕГИЕЙ

А. Ю. Зубарев

Институт систем информатики им. А. П. Ершова,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.7
DOI: 10.24412/2073-0667-2022-4-5-27
EDN: BQQUXA

Непрерывно-временные сети Петри (НВСП) — расширение сетей Петри, где каждый переход имеет локальные часы и временной интервал. Данная модель позволяет учитывать как функциональные (качественные), так и реально-временные (количественные) характеристики моделируемой системы. В работе рассматриваются НВСП со слабой временной стратегией (ход модельного времени не форсирует срабатывания сетевых переходов) и с промежуточной пространственной стратегией (при смене состояний сети срабатывание перехода порождает «промежуточную» разметку). В терминах данной модели определяются и исследуются языковые и бисимуляционные эквивалентности. При языковом подходе поведение системы полностью определяется множеством вариантов ее функционирования (процессов). При бисимуляционном подходе учитываются точки выбора альтернативных действий моделируемой системы. Эквивалентности рассматриваются в семантиках интерливинга (процесс — последовательность действий), шага (процесс — последовательность множеств параллельных действий), частичного порядка (процесс — частично-упорядоченное множество действий) и в процессно-сетевой семантике (процесс — ациклическая бесконфликтная сеть). Анализируются взаимосвязи между данными эквивалентностями, приводится их иерархия.

Ключевые слова: непрерывно-временные сети Петри, слабая временная стратегия, промежуточная пространственная стратегия, поведенческие эквивалентности, семантика интерливинга, шага, частичного порядка, процессно-сетевая семантика, языковая и бисимуляционная эквивалентности.

Введение. Безопасность многих информационных систем является критически важной, поскольку их сбои могут привести к большим и порой непоправимым последствиям. Важную роль при верификации и спецификации систем играют поведенческие эквиваленттности, которые позволяют сравнивать поведение систем относительно разных аспектов их функционирования, что, в частности, может служить для последующего упрощения их структуры. В литературе представлено большое число поведенческих эквивалентностей для параллельных и распределенных вычислительных систем, изучены взаимосвязи между ними [1]. При их сравнении принято различать две дихотомии. Первая дихотомия — это *«линейное — ветвящееся время»*. Критерием данной дихотомии является степень, с которой учитываются точки недетерминированного выбора альтернативных действий моделируемой системы. В семантике «линейного времени» точки альтернативного

© А. Ю. Зубарев, 2022

выбора полностью игнорируются. В результате этого поведение моделируемой системы описывается набором «линейных» последовательностей выполнений системы. Типичным примером линейной временной эквивалентности является *языковая эквивалентность*. В семантике «ветвящегося времени» точки выбора (ветвления) тщательно отслеживаются и фиксируются. В этом случае поведение системы, как правило, описывается графовыми моделями. Примером эквивалентности ветвящегося времени является *бисимуляционная эквивалентность*. Критерием второй дихотомии (*«интерливинг — частичный порядок»*) является степень, с которой учитывается частичный порядок между действиями моделируемой системы. При интерливинговом подходе частичным порядком полностью пренебрегают. Параллельное выполнение действий системы сводится к недетерминированному выбору между последовательными выполнениями их атомарных поддействий. Модели, основанные на частичном порядке, позволяют явным образом задавать причинную зависимость и параллелизм между действиями системы. Между границами данного спектра находится шаговая семантика, в которой параллелизм системы моделируется выполнением шага — множества параллельных действий.

Сеть Петри – модель, используемая для описания и анализа параллельных и распределенных систем. Представленная в виде двудольного ориентированного графа данная модель наглядно иллюстрирует действия системы (помеченные *переходы* сети), их условия (*места* сети) и отношения меду ними. Выполнение условия определяется наличием *фишки* в соответствующем месте сети. Размещение фишек по местам называется *разметкой*, которая задает состояние системы. Если в каждом входном месте перехода есть фишка, то переход является *разрешенным*, т. е. все условия для соответствующего действия выполнены. Смена состояния в результате некоторого действия происходит при срабатывании разрешенного перехода, когда удаляются фишки из его входных мест и добавляются новые фишки в его выходные места.

Часто при верификации, кроме качественных параметров, необходимо учитывать и реально-временные, т. е. количественные, параметры системы. В результате этого возникло большое число временных расширений для ранее изученных моделей, одним из которых является *непрерывно-временная сеть Петри* (НВСП). Каждому переходу базовой («безвременной») сети Петри в данной модели ставятся в соответствие локальные часы и временной интервал, в границах времени которого переход может сработать. Состояние НВСП описывается разметкой и вектором показаний локальных часов разрешенных переходов. Разрешенный переход может сработать в некотором состоянии, если значение его локальных часов принадлежит его временному интервалу. Поскольку само срабатывание перехода не занимает времени, то разделяют два способа изменения состояния: *ход времени* и *действие* в результате срабатывания перехода.

В результате хода времени синхронно увеличиваются значения локальных часов разрешенных переходов. В зависимости от срочности срабатываний переходов в НВСП рассматривают *сильную* и *слабую* временные стратегии. Сильная стратегия ограничивает ход времени в состоянии, где оно может спровоцировать выход значения локальных часов разрешенного перехода за пределы верхней границы его временного интервала. Такой переход обязан сработать в срочном порядке либо стать «заблокированным» в результате срабатывания другого перехода. Напротив, в НВСП со слабой временной стратегией ход времени не ограничивается, т. е. время не заставляет срабатывать переходы. Известно, что две семантики являются несравнимыми по выразительности [2].

При срабатывании перехода происходит смена разметки и сброс локальных часов некоторых переходов. Характер данных сбросов определяется пространственными стратегиями НВСП. В литературе представлены три пространственные стратегии: *промежуточная*, *атомарная* и *устойчиво атомарная*. Промежуточная, как следует из названия, рассматривает промежуточную разметку при срабатывании перехода в момент, когда фишки были удалены из входных мест, но еще не были добавлены в выходные места. Часы разрешенного в новой разметке перехода, который не являлся разрешенным в промежуточной разметке, сбрасываются, т. е. принимают нулевое значение. Напротив, при использовании атомарной или устойчиво атомарной пространственных стратегий срабатывание перехода рассматривается как неделимое (атомарное) действие. Таким образом, часы разрешенного перехода в новой разметке будут сброшены, только если он не являлся разрешенным в старой разметке. Часы перехода, который срабатывает и остается разрешенным в новой разметке, всегда сбрасываются в промежуточной и атомарной стратегиях, но это правило не распространяется на устойчиво атомарную стратегию. Для сильных НВСП пространственные стратегии были изучены в работе [3], а для слабых в работе [4]. В данных работах показано, что проблемы достижимости и ограниченности неразрешимы для НВСП с сильной временной и любой пространственной стратегиями, тогда как эти проблемы разрешимы в случае НВСП со слабой временной и промежуточной пространственной стратегиями.

Одной из задач в области временных моделей параллельных и распределенных систем остается определение полного набора поведенческих эквивалентностей в дихотомиях «линейное — ветвящееся время» и «интерливинг — частичный порядок», а также анализ их взаимосвязей. В работе [5] изучена иерархия поведенческих эквивалентностей для НВСП с сильной семантикой и промежуточной пространственной стратегией. Работа [6] определяет для НВСП со слабой временной и устойчиво атомарной пространственной стратегиями различные семантические модели в дихотомии «интерливинг — частичный порядок». В частности, определяется временной процесс как истинно параллельная семантика, основанная на ациклических причинно-следственных сетях. Главной целью данной статьи является определение языковых и бисимуляционных эквивалентностей в дихотомии «интерливинг — частичный порядок» в терминах НВСП со слабой временной и промежуточной пространственной стратегиями.

Статья состоит из следующих разделов. В разделе 1 приведено определение НВСП и описано ее поведение. Определены шаговые и интерливинговые семантики НВСП. Раздел 2 статьи посвящен процессной семантике НВСП, представленной временными процессами. Данная модель описывает причинную зависимость и параллелизм между действиями моделируемой системы и состоит из причинно-следственной сети, временной функции, а также гомоморфизма в НВСП. В разделе 3 определяются языковые и бисимуляционные эквивалентности в дихотомии «интерливинг — частичный порядок», производится анализ их иерархии. Раздел 4 завершает статью, приводя результаты и планы по дальнейшей работе.

1. Непрерывно-временные сети Петри. В данном разделе приводятся определения структуры и поведения сетей Петри и их временного расширения — непрерывно-временных сетей Петри.

Определение 1.

— *(Помеченная над Act) сеть Петри* (СП) — это набор $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$, где P — конечное *множество мест* и T — конечное *множество переходов*, такие, что $P \cap T = \varnothing$ и

$P \cup T \neq \varnothing$; $F \subseteq (P\times T)\cup(T\times P)$ — *отношение инцидентности*; $\varnothing \neq M_0 \subseteq P$ — *начальная разметка*; $L : T \to Act$ — *помечающая функция.* Для элемента $x \in P \cup T$ определим множество ${}^\bullet x = \{y \mid (y,x) \in F\}$ *входных* и множество $x^\bullet = \{y \mid (x,y) \in F\}$ *выходных элементов*, которые для подмножества элементов $X \subseteq P \cup T$ обобщаются соответственно до множеств ${}^\bullet X = \bigcup_{x\in X} {}^\bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x\in X} x^\bullet$.

— *Разметка* M СП $\mathcal{N}$ — это любое подмножество множества P. Переход $t \in T$ *разрешен в разметке* M, если ${}^\bullet t \subseteq M$. Обозначим через $En(M)$ множество всех переходов, разрешенных в разметке M. Непустое подмножество $U \subseteq T$ называется *шагом*, если $({}^\bullet t \cup t^\bullet) \cap ({}^\bullet t' \cup t'^\bullet) = \varnothing$ для всех $t \neq t'$ из U. Обозначим через $L(U) = \sum_{t\in U} L(t)$ мультимножество действий шага U. Шаг U *разрешен в разметке* M, если $U \subseteq En(M)$. *Срабатывание шага*, разрешенного в разметке M, приводит к новой разметке M' (обозначается $M \xrightarrow{U} M'$), где $M' = (M\setminus{}^\bullet U) \cup U^\bullet$. Разметка M является *достижимой* в $\mathcal{N}$, если существует последовательность шагов $U_1 \dots U_n$, такая, что $M_0 \xrightarrow{U_1} M_1 \dots M_{n-1} \xrightarrow{U_n} M_n = M$ $(n \geq 0)$. СП $\mathcal{N}$ называется *бесконтактной*, если для любой достижимой разметки M и любого шага U, разрешенного в M, верно, что $(M\setminus{}^\bullet U) \cap U^\bullet = \varnothing$.

В статье рассматриваются безопасные сети Петри, т. е. при функционировании сети каждое ее место имеет не более одной фишки. Это достигается за счет определенного ранее свойства бесконтактности и позволяет рассматривать в качестве разметок множества вместо мультимножеств.

Пусть $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ — множество неотрицательных рациональных чисел и $Interv = \{[a,b],[a,b) \mid a \in \mathbb{Q}_{\geq 0},\ b \in (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}),\ a \leq b\}$. Непрерывно-временная сеть Петри получается в результате сопоставления каждому переходу базовой (безвременной) сети Петри временного интервала из $Interv$.

Определение 2.

— *(Помеченная над Act) непрерывно-временная сеть Петри* (НВСП) — это пара $\mathcal{TN} = (\mathcal{N},\ D)$, где $\mathcal{N} = (P,\ T,\ F,\ M_0,\ L)$ — *базовая* (помеченная над Act) сеть Петри и $D : T \to Interv$ — *статическая временная функция*, сопоставляющая каждому переходу из T временной интервал из $Interv$.

— *Состояние НВСП* $\mathcal{TN}$ — это пара $S = (M,I)$, где M — разметка и $I : En(M) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ — *динамическая временная функция. Начальное состояние* $\mathcal{TN}$ — это пара $S_0 = (M_0,I_0)$, где M_0 — начальная разметка и $I_0(t) = 0$ для всех $t \in En(M_0)$.

Для НВСП возможны два способа изменения состояния: *ход времени* и *мультимножество действий* в результате *срабатывания шага.*

— *Ход времени* $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *в состоянии* $S = (M,I)$ приводит к новому состоянию $S' = (M', I')$ (обозначается $S \xrightarrow{\tau} S'$), где $M' = M$ и $I'(t) = I(t) + \tau$ для всех $t \in En(M')$.

— Шаг U, разрешенный в разметке M, *может сработать в состоянии* $S = (M,I)$, если $I(t) \in D(t)$ для всех $t \in U$. В этом случае *срабатывание* шага U приводит к новому состоянию $S' = (M', I')$ (обозначается $S \xrightarrow{U} S'$ или $S \xrightarrow{L(U)} S'$), такому, что:

— $M' = (M\setminus{}^\bullet U) \cup U^\bullet$;

— $\forall t \in En(M') : I'(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \uparrow enabled(t, M, U), \\ I(t), & \text{иначе;} \end{cases}$

где предикат $\uparrow enabled(t, M, U) = (t \notin En(M\setminus{}^\bullet U) \vee t \in U) \wedge t \in En((M\setminus{}^\bullet U) \cup U^\bullet)$[1]. указывает на необходимость сброса часов перехода t, который или сработал, или не был

[1]В случае атомарной пространственной стратегии определяется так: $\uparrow enabled(t, M, U) = (t \notin En(M) \vee t \in U) \wedge t \in En(M')$, а в случае устойчиво атомарной — так: $\uparrow enabled(t, M, U) = t \notin En(M) \wedge t \in En(M')$.

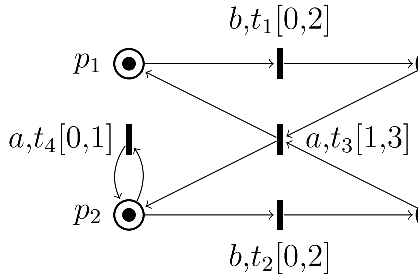

Рис. 1. НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}}$

разрешенным в промежуточной разметке $M \backslash {}^\bullet U$ и стал разрешенным в разметке M' после срабатывания шага U.

Будем писать $S \xrightarrow{\sigma} S'$, если $\sigma = \theta_0\ U_1\ \theta_1\ \ldots\ U_n\ \theta_n$, $S = S^0 \xrightarrow{\theta_0} \widetilde{S}^0 \xrightarrow{U_1} S^1 \xrightarrow{\theta_1} \widetilde{S}^1 \ldots \widetilde{S}^{n-1} \xrightarrow{U_n} S^n \xrightarrow{\theta_n} \widetilde{S}^n = S'$ $(n \geq 0)$, $\theta_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $(0 \leq i \leq n)$ и $U_j \in 2^T$ $(1 \leq j \leq n)$. В этом случае σ — *(шаговый) пробег* $\mathcal{TN}$ *из состояния* S *(в состояние* S'*)*. Будем называть σ *интерливинговым пробегом*, если $\mid U_j \mid = 1$ для всех $1 \leq j \leq n$. Пусть $\mathcal{RUN}_{s(i)}(\mathcal{TN}, S)$ — множество всех шаговых (интерливинговых) пробегов из S в $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{RUN}_{s(i)}(\mathcal{TN}) = \mathcal{RUN}_{s(i)}(\mathcal{TN}, S_0)$. Состояние S является *достижимым* в $\mathcal{TN}$ (обозначается $S \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$), если оно присутствует в некотором пробеге из $\mathcal{RUN}_{s(i)}(\mathcal{TN})$.

НВСП $\mathcal{TN}$ называется *бесконтактной*, если базовая сеть является бесконтактной. Кроме того, НВСП является *T-закрытой*, если ${}^\bullet t \neq \varnothing$ и $t^\bullet \neq \varnothing$ для всех переходов сети. В дальнейшем будем рассматривать только бесконтактные и T-закрытые НВСП.

Пример 1. Рассмотрим НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}}$, представленную на рис. 1. На графике места сети изображены окружностями, переходы изображены барьерами, отношение инцидентности представлено направленными дугами. Рядом с элементами сети указаны их имена. Каждому переходу ставится в соответствие временной интервал из $Interv$ и действие из Act. Начальной разметке соответствует множество мест с фишками (жирными точками). Покажем, что последовательность $\sigma = 2\ \{t_1{,}t_2\}\ 2\ \{t_3\}\ 1\ \{t_4\}\ 5$ является шаговым пробегом НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}}$, т. е. $\sigma \in \mathcal{RUN}_s(\widetilde{\mathcal{TN}})$.

— Изначально сеть находится в состоянии $S_0 = (M_0, I_0)$, где $M_0 = \{p_1, p_2\}$ — начальная разметка, $En(M_0) = \{t_1, t_2, t_4\}$ – множество разрешенных переходов в данной разметке и $I(t) = 0$ для каждого перехода t из $En(M_0)$. Ход времени размером 2 сменит состояние S_0 на $\widetilde{S}_0$ $(S_0 \xrightarrow{2} \widetilde{S}_0)$, в котором сохранится разметка, а часы переходов увеличатся на две единицы, т. е. $\widetilde{S}_0 = (\widetilde{M}_0, \widetilde{I}_0) = (M_0, \widetilde{I}_0)$, где $\widetilde{I}_0(t) = 2$ для каждого $t \in En(\widetilde{M}_0) = \{t_1, t_2, t_4\}$. Заметим, что такой ход времени был бы невозможен в случае сильной семантики, поскольку значение времени на часах перехода t_4 $(\widetilde{I}_0(t_4) = 2)$ превысило верхнюю границу его временного интервала $(D(t_4) = [0{,}1])$.

— Поскольку $\{t_1, t_2\} \subseteq En(\widetilde{M}_0)$ — шаг, разрешенный в разметке $\widetilde{M}_0$, $\widetilde{I}_0(t_1) \in D(t_1)$ и $\widetilde{I}_0(t_2) \in D(t_2)$, то $\{t_1, t_2\}$ может сработать в состоянии $\widetilde{S}_0$. Срабатывание шага $\{t_1, t_2\}$ из $\widetilde{S}_0$ приведет к новому состоянию $S_1 = (M_1, I_1)$ $(\widetilde{S}_0 \xrightarrow{\{t_1,t_2\}} S_1)$, где $M_1 = (\widetilde{M}_0 \backslash {}^\bullet\{t_1, t_2\}) \cup \{t_1, t_2\}^\bullet = \{p_3, p_4\}$, $En(M_1) = \{t_3\}$ и $I_1(t_3) = 0$, поскольку переход t_3 не являлся разрешенным в разметке $\widetilde{M}_0 \backslash {}^\bullet\{t_1, t_2\}$. Ход времени 2 из состояния S_1 приведет к состоянию $\widetilde{S}_1 = (\widetilde{M}_1, \widetilde{I}_1) = (M_1, \widetilde{I}_1)$ с $\widetilde{I}_1(t_3) = I_1(t_3) + 2 = 2$.

— Разрешенный шаг $\{t_3\} \subseteq En(\widetilde{M_1}) = \{t_3\}$ готов сработать из $\widetilde{S}_1$, поскольку $\widetilde{I}_1(t_3) = 2 \in D(t_3) = [1{,}3]$. Следовательно, $\widetilde{S}_1 \xrightarrow{\{t_3\}} S_2 = (M_2, I_2)$, где $M_2 = (\widetilde{M_1} \setminus {}^\bullet\{t_3\}) \cup \{t_3\}^\bullet = \{p_1, p_2\}$, $En(M_2) = \{t_1, t_2, t_4\}$ и $I_2(t) = 0$ для всех $t \in En(M_2)$, т. к. все три перехода из $En(M_2)$ не были разрешенными в промежуточной разметке. Далее, $S_2 \xrightarrow{1} \widetilde{S}_2$ увеличит значения данных переходов на единицу, т. е. $\widetilde{S}_2 = (\widetilde{M_2}, \widetilde{I}_2) = (M_2, \widetilde{I}_2)$, где $\widetilde{I}_2(t) = 1$ для каждого $t \in En(\widetilde{M_2}) = \{t_1, t_2, t_4\}$.

— Шаг $\{t_4\}$ готов сработать из $\widetilde{S}_2$, так как $\{t_4\} \subseteq En(\widetilde{M_2})$ и $\widetilde{I}_2(t_4) \in D(t_4)$. После срабатывания разметка не изменится ($M_3 = \widetilde{M_2}$). Кроме того, часы переходов t_4 и t_2 будут сброшены, поскольку они не были разрешенными в промежуточной разметке $\{p_1\}$. Значит, $I_3(t_1) = 1$ и $I_3(t_2) = I_3(t_4) = 0$. Заметим, что в случае атомарной стратегии были бы сброшены только часы перехода t_4, как перехода, который сработал, а в случае устойчиво атомарной стратегии сбросов бы не было. Наконец, $S_3 = (M_3, I_3) \xrightarrow{5} \widetilde{S}_3$, где $\widetilde{S}_3 = (M_3, \widetilde{I}_3)$, $\widetilde{I}_3(t_1) = 6$ и $\widetilde{I}_3(t_2) = \widetilde{I}_3(t_4) = 5$.

Получили $S_0 \xrightarrow{2} \widetilde{S}_0 \xrightarrow{\{t_1,t_2\}} S_1 \xrightarrow{2} \widetilde{S}_1 \xrightarrow{\{t_3\}} S_2 \xrightarrow{1} \widetilde{S}_2 \xrightarrow{\{t_4\}} S_3 \xrightarrow{5} \widetilde{S}_3$, т. е. $\sigma = 2\ \{t_1{,}t_2\}\ 2\ \{t_3\}\ 1\ \{t_4\}\ 5 \in \mathcal{RUN}_s(\widetilde{\mathcal{TN}})$.

2. Временные процессы. В данном разделе определяются временные процессы как истинно-параллельная семантика НВСП. В основе данной модели лежат ациклические сети, которые позволяют рассматривать причинную зависимость и параллелизм между действиями системы, временная функция и гомоморфизм в НВСП. Сначала рассмотрим соответствующую безвременную семантическую модель сетей Петри.

Определение 3.

(Помеченная над Act) причинно-следственная сеть (ПСС) — это конечная ациклическая сеть $N = (B,\ E,\ G,\ l)$, где B — *множество условий*; E — *множество событий*; $G \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ — *отношение инцидентности*, такое, что $\mid b^\bullet \mid \leq 1$ и $\mid {}^\bullet b \mid \leq 1$ для всех $b \in B$ и $E = {}^\bullet B = B^\bullet$; $l : E \to Act$ — *помечающая функция*.

Для ПСС $N = (B, E, G, l)$ введем дополнительные понятия и обозначения:

— ${}^\bullet N = \{b \in B \mid {}^\bullet b = \varnothing\}$, $N^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \varnothing\}$ (*множество входных и выходных условий сети*);

— $x \preceq x' \iff x\ G^* x'$, где $x, x' \in B \cup E$ (*отношение причины*);

— $x \smile x' \iff \neg(x \preceq x') \wedge \neg(x' \preceq x)$, где $x, x' \in B \cup E$ (*отношение параллелизма*);

— непустое подмножество $E' \subseteq E$ называется *шагом* в ПСС N, если $e \smile e'$ для всех $e \neq e' \in E'$, в этом случае $l(E') = \sum_{e \in E'} l(e)$ — *мультимножество действий* E';

— непустое подмножество $B' \subseteq B$ называется $\smile$*-множеством* в N, если $b \smile b'$ для всех $b \neq b' \in B'$. *Сечение* C в N — это максимальное по включению $\smile$-множество. Обозначим через $\mathcal{CUT}(N)$ множество всех сечений в ПСС N.

Для $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$ определим:

— $C \xrightarrow{e} C'$, если ${}^\bullet e \subseteq C$ и $C' = (C \setminus {}^\bullet e) \cup e^\bullet$;

— $C \preceq C' \iff C \to^* C'$ и $C \prec C' \iff C \to^+ C'$, (*отношение причины на сечениях*);

— $C \smile C' \iff \neg(C \preceq C') \wedge \neg(C' \preceq C)$ (*отношение параллелизма на сечениях*);

— $\downarrow C = \{e \in E \mid e \preceq (e' \in {}^\bullet C)\}$ (*множество событий, предшествующих сечению* C).

Неформально говоря, сечение — это «разметка» ПСС N, которая достигается после того, как предшествующие сечению события произошли. Как следствие, $C \preceq C' \iff \downarrow C \subseteq \downarrow C'$.

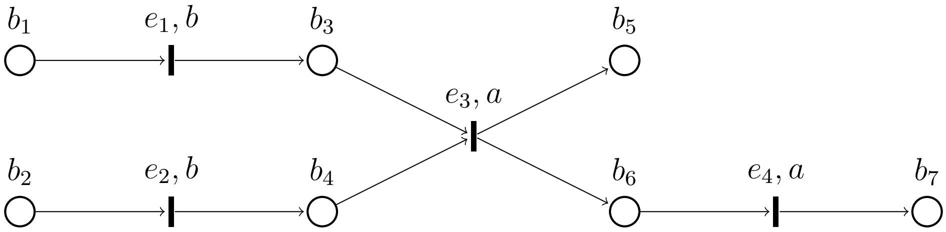

Рис. 2. ПСС $\widetilde{N}$

Пример 2. Рассмотрим сеть $\widetilde{N} = (B,E,G,l)$, где $B = \{b_1 \dots b_7\}$, $E = \{e_1 \dots e_4\}$, $G = \{(b_1, e_1), (b_2, e_2), (e_1, b_3), (e_2, b_4), (b_3, e_3), (b_4, e_3), (e_3, b_5), (e_3, b_6), (b_6, e_4), (e_4, b_7)\}$, $l(e_1) = l(e_2) = b$, $l(e_3) = l(e_4) = a$, изображенную на рис. 2. Видно, что $|{}^\bullet b| \leq 1$ и $|b^\bullet| \leq 1$ для всех $b \in B$; $E = {}^\bullet B = B^\bullet$. Значит, $\widetilde{N}$ — ПСС. Так как $e_1 \smile e_2$, то $\{e_1, e_2\}$ — шаг. Очевидно, что каждое одиночное событие также является шагом. Поскольку $b_1 \smile b_2$, и не существует $b \in B$ такого, что $b \smile b_1$ и $b \smile b_2$ одновременно, то $\{b_1, b_2\}$ — сечение. Аналогично можно показать, что $\{b_1, b_4\}$, $\{b_2, b_3\}$, $\{b_3, b_4\}$, $\{b_5, b_6\}$, $\{b_5, b_7\}$ также являются сечениями. Из ${}^\bullet e_1 \subseteq \{b_1, b_2\}$, $(\{b_1, b_2\} \backslash {}^\bullet e_1) \cup e_1{}^\bullet = \{b_2, b_3\}$ следует, что $\{b_1, b_2\} \xrightarrow{e_1} \{b_2, b_3\}$ и $\{b_1, b_2\} \preceq \{b_2, b_3\}$.

С другой стороны, $\{b_1, b_4\} \smile \{b_2, b_3\}$, так как $(\downarrow \{b_1, b_4\} = \{e_2\}) \nsubseteq (\downarrow \{b_2, b_3\} = \{e_1\})$ и $\downarrow \{b_2, b_3\} \nsubseteq \downarrow \{b_1, b_4\}$, т. е. $\neg(\{b_1, b_4\} \preceq \{b_2, b_3\})$ и $\neg(\{b_2, b_3\} \preceq \{b_1, b_4\})$.

Далее определим «подсеть», заключенную между двумя сечениями ПСС. Пусть $N = (B,\ E,\ G,\ l)$ — ПСС; $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$ и $C \preceq C'$. Определим конструкцию $N_{C,C'} = (B',\ E',\ G',\ l')$, такую, что выполняется:

— $B' = \bigcup_{C \preceq \widehat{C} \preceq C'} \widehat{C}$;

— $E' = \downarrow C' \backslash \downarrow C$;

— $G' = G \cap ((B' \times E') \cup (E' \times B'))$;

— $l' = l|_{E'}$.

Докажем, что полученная конструкция также является причинно-следственной сетью.

Лемма 1. Если N — ПСС и $C \preceq C' \in \mathcal{CUT}(N)$, то $N_{C,C'}$ — ПСС.

Доказательство. Пусть $N = (B,\ E,\ G,\ l)$ — ПСС и $C \preceq C' \in \mathcal{CUT}(N)$. Докажем, что $N_{C,C'} = (B',\ E',\ G',\ l')$ — ПСС. Видно, что $G' = G \cap ((B' \times E') \cup (E' \times B')) \subseteq (B' \times E') \cup (E' \times B')$ и $l' = l|_{E'} : E' \to Act$. Кроме того, поскольку N — ПСС, то $\mid b^\bullet \mid \leq 1$ и $\mid {}^\bullet b \mid \leq 1$ для всех $b \in B' \subseteq B$. Значит, следуя определению 3, остается показать, что $E' = {}^\bullet B' = B'^\bullet$. Если $|E'| = 0$, то доказывать нечего. Допустим $|E'| \neq 0$. Рассмотрим произвольное $e' \in E' = \downarrow C' \backslash \downarrow C$. Тогда, так как $C \preceq C'$, найдутся $C_1, C_2 \in \mathcal{CUT}(N)$, такие, что $C \preceq C_1 \xrightarrow{e'} C_2 \preceq C'$, т. е. $e' \in C_1{}^\bullet \subseteq B'^\bullet$ и $e' \in {}^\bullet C_2 \subseteq {}^\bullet B'$. В силу произвольности выбора $e' \in E'$ получаем $E' = {}^\bullet B' = B'^\bullet$.

Для установки связи между причинно-следственной сетью и сетью Петри используется гомоморфизм, сохраняющий отношение инцидентности.

Определение 4. Пусть $N = (B,\ E,\ G,\ l)$ — ПСС, $\mathcal{N} = (P,\ T,\ F,\ M_0,\ L)$ — СП и M — разметка $\mathcal{N}$. *Гомоморфизмом из* N *в* $\mathcal{N}$ *относительно* M называется отображение $\varphi : (B \cup E) \to (P \cup T)$, такое, что верно:

— $\varphi(B) \subseteq P$ и $\varphi(E) \subseteq T$;

— сужение φ на подмножество ${}^\bullet e$ — биекция между ${}^\bullet e$ и ${}^\bullet \varphi(e)$ для всех $e \in E$;

— сужение φ на подмножество $e^\bullet$ — биекция между $e^\bullet$ и $\varphi(e)^\bullet$ для всех $e \in E$;

— сужение φ на подмножество ${}^\bullet N$ — биекция между ${}^\bullet N$ и M;

— $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$.

Пример 3. Рассмотрим базовую сеть Петри $\widetilde{\mathcal{N}} = (P, T, F, M_0, L)$ НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}}$ из примера 1, причинно-следственную сеть $\widetilde{N} = (B, E, G, l)$ из примера 2 и функцию $\varphi : (B \cup E) \to (P \cup T)$, такую, что $\varphi(b_1) = \varphi(b_5) = p_1$, $\varphi(b_2) = \varphi(b_6) = \varphi(b_7) = p_2$, $\varphi(b_3) = p_3$, $\varphi(b_4) = p_4$ и $\varphi(e_i) = t_i$ для $1 \leq i \leq 4$. Видно, что $\varphi(B) \subseteq P$, $\varphi(E) \subseteq T$ и $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$. Легко проверить, что сужение φ на подмножество ${}^\bullet e$ ($e^\bullet$) является бикцией между данным подмножеством и ${}^\bullet\varphi(e)$ ($\varphi(e)^\bullet$) для всех $e \in E$. Например, для события e_3 множество входных условий $\{b_3, b_4\}$ биективно отображается на множество входных мест $\{p_3, p_4\}$ перехода $\varphi(e_3) = t_3$, а множество выходных условий $\{b_5, b_6\}$ на множество выходных мест $\{p_1, p_2\}$. Кроме того, сужение φ на подмножество ${}^\bullet\widetilde{N} = \{b_1, b_2\}$ является биекцией между данным подмножеством и M_0. Следовательно, φ — гомоморфизм из $\widetilde{N}$ в $\widetilde{\mathcal{N}}$ относительно начальной разметки M_0.

Далее определим временное расширение ПСС, где каждому сечению базовой сети ставится в соответствие значение локального времени системы (длительность состояния) либо $\perp$, указывающий, что состояние недостижимо по времени.

Определение 5. *(Помеченная над Act) временная ПСС* (ВПСС) — это пара $TN = (N,\ \tau)$, где N — (помеченная над Act) ПСС и $\tau : \mathcal{CUT}(N) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ — *временная функция*, такая, что для всех $C \in \mathcal{CUT}(N)$ верно:

$$\tau(C) = \perp \iff \exists C' \in \mathcal{CUT}(N) \colon C \smile C' \wedge \tau(C') > 0.$$

Пусть $\mathcal{RC}(TN) = \{C \in \mathcal{CUT}(N) \mid \tau(C) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ — *множество временных сечений.*

Заметим, что ${}^\bullet N, N^\bullet \in \mathcal{RC}(TN)$, если $B \neq \varnothing$, и $\downarrow N^\bullet = E$. Для сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ введем дополнительные обозначения и понятия:

— событие $e \in E$ *может произойти в* C, если $C \xrightarrow{e} C'$ и $C' \in \mathcal{RC}(TN)$;

— $Fi(C)$ — *множество всех событий, которые могут произойти в* C;

— $C \xRightarrow{V} C' \iff V$ — шаг, $V \subseteq Fi(C)$ и $C' = (C \setminus {}^\bullet V) \cup V^\bullet \in \mathcal{RC}(TN)$[2];

ВПСС $TN = (N = (B,\ E,\ G,\ l),\ \tau)$ и $TN' = (N' = (B',\ E',\ G',\ l'),\ \tau')$, помеченные над Act, являются *изоморфными* (обозначается $TN \simeq TN'$), если существует биективное отображение $\beta : B \cup E \to B' \cup E'$, такое, что:

— $\beta(B) = B'$ и $\beta(E) = E'$;

— $xGy \iff \beta(x)G'\beta(y)$ для всех $x,y \in B \cup E$;

— $\tau(C) = \tau'(\beta(C))$ для всех $C \in \mathcal{CUT}(N)$;

— $l(e) = l'(\beta(e))$.

Пример 4. Рассмотрим ПСС $\widetilde{N}$ из примера 2. Определим временную функцию $\tau : \mathcal{CUT}(\widetilde{N}) = \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_4\}, \{b_2, b_3\}, \{b_3, b_4\}, \{b_5, b_6\}, \{b_5, b_7\}\} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ следующим образом: $\tau(\{b_1, b_2\}) = 2$, $\tau(\{b_1, b_4\}) = \tau(\{b_2, b_3\}) = 0$, $\tau(\{b_3, b_4\}) = 2$, $\tau(\{b_5, b_6\}) = 1$, $\tau(\{b_5, b_7\}) = 5$. Поскольку в данной сети только два параллельных сечения $\{b_1, b_4\} \smile \{b_2, b_3\}$ и оба имеют нулевые временные значения, то функция τ удовлетворяет ограничению из определения 5. Следовательно, $\widetilde{TN} = (\widetilde{N}, \tau)$ — ВПСС, а $\mathcal{RC}(\widetilde{TN})$ совпадает с $\mathcal{CUT}(\widetilde{N})$.

[2]Таким образом, запрещается, чтобы сечение, полученное в результате выполнения шага, имело неопределенную временную характеристику (т. е. $\perp$), так как это означает, что время выполнения шага еще не подошло.

Рассмотрим «подсети» (префикс и суффикс) ВПСС и докажем, что они также являются ВПСС. Пусть $\widetilde{TN} = (\widetilde{N}, \widetilde{\tau})$ — ВПСС. Будем писать $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widetilde{TN}$, если существует $\widetilde{C} \in \mathcal{RC}(\widetilde{TN})$, такое, что:

— $TN = (N, \tau)$, $\widehat{TN} = (\widehat{N}, \widehat{\tau})$;

— $N = \widetilde{N}_{\bullet\widetilde{N},\widetilde{C}}$, $\widehat{N} = \widetilde{N}_{\widetilde{C},\widetilde{N}^\bullet}$;

— $\tau : \mathcal{CUT}(N) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ и $\tau(C) = \widetilde{\tau}(C)$ для всех $C \in \mathcal{CUT}(N) \backslash \widetilde{C}$;

— $\widehat{\tau} : \mathcal{CUT}(\widehat{N}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ и $\widehat{\tau}(\widehat{C}) = \widetilde{\tau}(\widehat{C})$ для всех $\widehat{C} \in \mathcal{CUT}(\widehat{N}) \backslash \widetilde{C}$;

— $\tau(\widetilde{C}) + \widehat{\tau}(\widetilde{C}) = \widetilde{\tau}(\widetilde{C})$.

В этом случае сечение $\widetilde{C}$ будем называть *граничным сечением.*

Лемма 2. Если $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widetilde{TN}$ для ВПСС $\widetilde{TN}$, то TN и $\widehat{TN}$ — ВПСС.

Доказательство. Пусть $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widetilde{TN}$ для ВПСС $\widetilde{TN}$ с граничным сечением $\widetilde{C} \in \mathcal{RC}(\widetilde{TN})$. Согласно лемме 1, $N = \widetilde{N}_{\bullet\widetilde{N},\widetilde{C}}$ и $\widehat{N} = \widetilde{N}_{\widetilde{C},\widetilde{N}^\bullet}$ — ПСС. Следуя определению 5, докажем корректность временных функций $\tau : \mathcal{CUT}(N) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ и $\widehat{\tau} : \mathcal{CUT}(\widehat{N}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$. Рассмотрим функцию τ (доказательство корректности $\widehat{\tau}$ будет иметь аналогичные рассуждения). Необходимо показать, что для любого сечения $C \in \mathcal{CUT}(N)$ выполняется $\tau(C) = \perp \iff \exists C' \in \mathcal{CUT}(N) \colon C \smile C' \wedge \tau(C') > 0$.

Рассмотрим произвольное $C \in \mathcal{CUT}(N) = \{C \in \mathcal{CUT}(\widetilde{N}) \mid {}^\bullet\widetilde{N} \preceq C \preceq \widetilde{C}\} \neq \varnothing$, такое, что $\tau(C) = \perp$. Тогда, поскольку $\tau(\widetilde{C}) = \widetilde{\tau}(\widetilde{C}) - \widehat{\tau}(\widetilde{C}) \neq \perp$, имеем, $C \neq \widetilde{C}$ и $\widetilde{\tau}(C) = \tau(C) = \perp$ по конструкции TN. Применяя определение 5 к ВПСС, $\widetilde{TN}$ получим, что $\exists C' \in \mathcal{CUT}(\widetilde{N}) \colon C \smile C' \wedge \tau(C') > 0$. Покажем, что $C' \in \mathcal{CUT}(N)$. Предположим, это не так, т. е. $\neg({}^\bullet\widetilde{N} \preceq C' \preceq \widetilde{C})$. Поскольку $\tau({}^\bullet\widetilde{N}) \neq \perp$, $\tau(\widetilde{C}) \neq \perp$ и $\tau(C') > 0$, то $\neg({}^\bullet\widetilde{N} \smile C')$ и $\neg(\widetilde{C} \smile C')$. Следовательно, $C' \preceq {}^\bullet\widetilde{N}$ или $\widetilde{C} \preceq C'$. Так как $C \in \mathcal{CUT}(N)$, т. е. ${}^\bullet\widetilde{N} \preceq C \preceq \widetilde{C}$, получаем, что $C' \preceq {}^\bullet\widetilde{N} \preceq C$ или $C \preceq \widetilde{C} \preceq C'$. В силу транзитивности отношения $\preceq$, имеем $C' \preceq C$ или $C \preceq C'$, что противоречит $C \smile C'$. Значит, $C' \in \mathcal{CUT}(N)$.

Пусть $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$, $C \smile C'$ и $\tau(C') > 0$ покажем, что $\tau(C) = \perp$. Поскольку $N^\bullet = \widetilde{C}$, то $\neg(\widetilde{C} \smile C')$ и $\neg(C \smile \widetilde{C})$, т. е. $C \neq \widetilde{C}$ и $C' \neq \widetilde{C}$. Следовательно, $\tau(C) = \widetilde{\tau}(C)$ и $\tau(C') = \widetilde{\tau}(C')$ согласно конструкции TN. По определению 5 получем, что из $\tau(C') = \widetilde{\tau}(C') > 0$ следует $\tau(C) = \widetilde{\tau}(C) = \perp$.

Для описания выполнения ВПСС используются временные графики — последовательности временных сечений и шагов.

Определение 6. Пусть $TN = (N, \tau)$ — ВПСС и $C, C' \in \mathcal{RC}(TN)$. Последовательность сечений из $\mathcal{RC}(TN)$ и шагов вида $\omega = C_0\ V_1\ C_1\ \ldots\ V_n\ C_n$ $(n \geq 0)$ называется *(шаговым) графиком из C в C'* ВПСС TN, если верно:

— $C_0 = C$, $C_n = C'$;

— $C_{i-1} \overset{V_i}{\Rightarrow} C_i$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Если $|V_i| = 1$ для всех $1 \leq i \leq n$, то ω называется *интерливинговым графиком из C в C'*. Пусть $\mathcal{GRF}_{s(i)}(TN, C, C')$ — множество всех шаговых (интерливинговых) графиков ВПСС из C в C', и $\mathcal{GRF}_{s(i)}(TN) = \mathcal{GRF}_{s(i)}(TN, {}^\bullet N, N^\bullet)$.

Пример 5. Пусть $\widetilde{TN} = (\widetilde{N}, \tau)$ — ВПСС из примера 4. Рассмотрим последовательность $\omega = C_0\ V_1\ C_1\ V_2\ C_2\ V_3\ C_3$, где $C_0 = \{b_1, b_2\}$, $C_1 = \{b_3, b_4\}$, $C_2 = \{b_5, b_6\}$, $C_3 = \{b_5, b_7\}$, $V_1 = \{e_1, e_2\}$, $V_2 = \{e_3\}$, $V_3 = \{e_4\}$. Из примера 4 получаем, что $C_0, C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{RC}(\widetilde{TN})$, а из примера 2, V_1, V_2, V_3 — шаги. Кроме того, легко видеть, что $C_1 \xrightarrow{e_3} C_2 \xrightarrow{e_4} C_3$, т. е.

$C_1 \overset{V_2=\{e_3\}}{\Longrightarrow} C_2 \overset{V_3=\{e_4\}}{\Longrightarrow} C_3$. Покажем, что $C_0 \overset{V_1=\{e_1,e_2\}}{\Longrightarrow} C_1$. Действительно, имеем, что $C_0 \xrightarrow{e_1} \{b_2, b_3\}$, $C_0 \xrightarrow{e_2} \{b_1, b_4\}$ и $\{b_2, b_3\}, \{b_1, b_4\} \in \mathcal{RC}(\widetilde{TN})$. Значит, ω — шаговый график из $C_0 = {}^\bullet N$ в $C_3 = N^\bullet$, т. е. $\omega \in \mathcal{GRF}_s(\widetilde{TN})$.

Предложение 1. Для любых $C, C' \in \mathcal{RC}(TN)$, таких, что $C \preceq C'$, существует $\omega \in \mathcal{GRF}_{s(i)}(TN, C, C')$.

Доказательство. Поскольку $C \preceq C'$ и в силу ацикличности TN, $|\downarrow C' \setminus \downarrow C| = n$ для некоторого $n \geq 0$. Покажем индукцией по $0 \leq i \leq n$, что существует последовательность сечений из $\mathcal{RC}(TN)$ и событий из $(\downarrow C' \setminus \downarrow C)$ вида: $\omega = (C = C_0)\ \{e_1\}\ C_1\ \ldots\ C_{n-1}\ \{e_n\}\ (C_n = C')$, такая, что $C_{k-1} \overset{\{e_k\}}{\Rightarrow} C_k$ для всех $1 \leq k \leq n$, т. е. $\omega \in \mathcal{GRF}_i(TN, C, C')$.

$i = 0$. Нечего доказывать.

$i > 0$. По предположению индукции существует последовательность сечений из $\mathcal{RC}(TN)$ и событий из $(\downarrow C' \setminus \downarrow C)$ вида: $C = C_0\ \{e_1\}\ C_1\ \ldots\ C_{i-2}\ \{e_{i-1}\}\ C_{i-1}$, такая, что $C_{k-1} \overset{\{e_k\}}{\Rightarrow} C_k$ для всех $1 \leq k < i$. Покажем, что существует $e_i \in (\downarrow C' \setminus \downarrow C)$, такое, что $C_{i-1} \overset{\{e_i\}}{\Rightarrow} C_i$. Поскольку $\downarrow C_{i-1} \subset \downarrow C'$, то существует последовательность $C_{i-1} \overset{e_1^i}{\to} C^i \to^* C'$. и $e_1^i \in (\downarrow C' \setminus \downarrow C)$. Если $e_1^i \in Fi(C_{i-1})$, то $C_{i-1} \overset{\{e_i\}}{\Rightarrow} C_i$, где $e_i = e_1^i$, что и требовалось доказать. Теперь рассмотрим случай, когда $e_1^i \notin Fi(C_{i-1})$. Пусть $En(C_{i-1}) = \{e_1^i, \ldots, e_m^i\} = \{e \in E \mid {}^\bullet e \subseteq C_{i-1}\}$ $(m > 0)$. Тогда $(C_{i-1} \setminus {}^\bullet e_j^i) \cup e_j^{i\bullet} = C_j^i \in \mathcal{CUT}(N)$, т. е. $C_{i-1} \prec C_j^i$, для всех $1 \leq j \leq m$.

Сначала покажем, что существует $e_j^i \in En(C_{i-1})$, такое, что $e_j^i \in Fi(C_{i-1})$ $(1 < j \leq m)$. Предположим обратное, т. е. $e_j^i \notin Fi(C_{i-1})$ для всех $e_j^i \in En(C_{i-1})$. Рассмотрим произвольное $1 \leq j \leq m$. Тогда верно, что $C_j^i \notin \mathcal{RC}(TN)$, т. е. $\tau(C_j^i) = \perp$. Согласно определению ВПСС, существует $\widehat{C}_j^i \smile C_j^i$, такое, что $\tau(\widehat{C}_j^i) > 0$. Ясно, что $C_{i-1} \neq \widehat{C}_j^i$. Кроме того, $\widehat{C}_j^i \not\smile C_{i-1}$, поскольку $\tau(C_{i-1}) \neq \perp$, т. е. $\widehat{C}_j^i \prec C_{i-1}$ или $C_{i-1} \prec \widehat{C}_j^i$. Так как $C_{i-1} \prec C_j^i$ и $\widehat{C}_j^i \smile C_j^i$, то верно, что $C_{i-1} \prec \widehat{C}_j^i$.

Тогда $C_{i-1} \overset{e_l^i}{\to} C_l^i \prec \widehat{C}_j^i$ для некоторого $1 \leq l \leq m$. Получаем, что для любого $1 \leq j \leq m$ существует $\widehat{C}_j^i \in \mathcal{RC}(TN)$, такое, что $\tau(\widehat{C}_j^i) > 0$, $C_j^i \smile \widehat{C}_j^i$ и $C_l^i \prec \widehat{C}_j^i$ для некоторого $1 \leq l \leq m$.

Возможны три случая.

1. $\widehat{C}_j^i = \widehat{C}_{j'}^i$ для всех $1 \leq j, j' \leq m$. Тогда существует $1 \leq l \leq m$, такое, что $C_l^i \prec \widehat{C}_l^i$, что противоречит тому, что $C_l^i \smile \widehat{C}_l^i$.

2. $\widehat{C}_j^i \smile \widehat{C}_{j'}^i$ для некоторых $1 \leq j, j' \leq m$.

Тогда, по определению ВПСС, $\tau(\widehat{C}_{j'}^i) = \perp$,

что противоречит $\tau(\widehat{C}_{j'}^i) > 0$.

3. $\widehat{C}_j^i \prec \widehat{C}_{j'}^i$ или $\widehat{C}_{j'}^i \prec \widehat{C}_j^i$ для любых $1 \leq j, j' \leq m$. Поскольку N — ацикличная ПСС и множество $En(C_{i-1})$ конечно, то найдется $1 \leq s \leq m$, такое, что $\widehat{C}_s^i \preceq \widehat{C}_j^i$ для любого $1 \leq j \leq m$. Кроме того, существует $1 \leq l \leq m$, такой, что $C_l^i \preceq \widehat{C}_s^i$. Так как $\widehat{C}_s^i \preceq \widehat{C}_l^i$, то $C_l^i \preceq \widehat{C}_l^i$, в силу транзитивности отношения причины. Получили противоречие с тем, что $C_l^i \smile \widehat{C}_l^i$.

Следовательно, $Fi(C_{i-1}) \neq \varnothing$.

Рассмотрим произвольное $e_i \in Fi(C_{i-1})$. Тогда $e_i \in En(C_{i-1})$ и $C_i = ((C_{i-1} \setminus {}^\bullet e_i) \cup e_i{}^\bullet) \in \mathcal{RC}(TN)$, т. е. $e_i \in \downarrow C_i$ и $\tau(C_i) \neq \perp$. Более того, верно, что $C_{i-1} \overset{e_i}{\Rightarrow} C_i$. Известно, что

$C_1^i = ((C_{i-1} \setminus {}^\bullet e_1^i) \cup e_1^{i\bullet})$, т. е. $e_1^i \in \downarrow C_1^i$ и $\tau(C_1^i) = \perp$. Ясно, что $C_i \neq C_1^i$ и $e_i \neq e_1^i$. Тогда получаем, что $e_i \in (\downarrow C_i \setminus \downarrow C_1^i)$ и $e_1^i \in (\downarrow C_1^i \setminus \downarrow C_i)$. Значит, имеем, что $\neg(\downarrow C_i \subset \downarrow C_1^i)$ и $\neg(\downarrow C_1^i \subset \downarrow C_i)$, т. е. $C_1^i \smile C_i$. Из определения ВПСС следует, что $\tau(C_i) > 0$, так как $\tau(C_1^i) = \perp$ и $\tau(C_i) \neq \perp$, а значит, что $C_i \not\smile C'$, поскольку $\tau(C') \neq \perp$. Таким образом, $\downarrow C_i \subseteq \downarrow C'$ или $\downarrow C' \subseteq \downarrow C_i$. Так как $e_1^i \in \downarrow C'$ и $e_1^i \notin \downarrow C_i$, то $\neg(\downarrow C' \subseteq \downarrow C_i)$. Значит, имеем, что $\downarrow C_i \subseteq \downarrow C'$. Тогда верно, что $e_i \in (\downarrow C' \setminus \downarrow C)$.

Докажем еще одно свойство графиков.

Лемма 3. Для графика $\omega = C_0\ V_1\ \ldots\ V_n\ C_n \in Graph(TN, C_0, C_n)$ и сечения $C \in (\mathcal{RC}(TN) \setminus \{C_0, \ldots, C_n\})$ такого, что $C_0 \preceq C \preceq C_n$ верно, что $\tau(C) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $C \in (\mathcal{RC}(TN) \setminus \{C_0, \ldots, C_n\})$, такое, что $C_0 \prec C \prec C_n$. Предположим обратное, т. е. $\tau(C) > 0$. По определению 5, $C \not\smile C_i$, т. е. либо $C \prec C_i$ ($\downarrow C \subset \downarrow C_i$), либо $C_i \prec C$ ($\downarrow C_i \subset \downarrow C$), для любого $0 \leq i \leq n$. Поскольку $\downarrow C \subset \downarrow C_n$, то найдется $1 \leq k \leq n$, такой, что $\downarrow C_{k-1} \subset \downarrow C \subset \downarrow C_k$, так как $C_{k-1} \not\smile C \not\smile C_k$. Исходя из того, что $e \in \downarrow C_k \setminus \downarrow C \subset V_k \subset Fi(C_{k-1})$, то верно, что $e \in Fi(C_{k-1})$. Значит, получаем, что $C_{k-1} \overset{\{e\}}{\Rightarrow} C' \in \mathcal{RC}(TN)$. Следовательно, $\tau(C') \neq \perp$ и $C \smile C'$. Пришли к противоречию с тем, что $\tau(C) > 0$, по определению 5.

Введем временное расширение частично-упорядоченных множеств и рассмотрим их в контексте событий ВПСС.

Определение 7. *(Помеченное над Act) временное частично-упорядоченное множество (ВЧУМ)* — это набор $\eta = (X, \preceq, \tau, l)$, где X — множество элементов; $\preceq$ — рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение на X; $\tau : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ — временная функция и $l : X \to Act$ — помечающая функция.

ВЧУМ $\eta = (X, \preceq, \tau, l)$ и $\eta' = (X', \preceq', \tau', l')$, помеченные над Act, являются *изоморфными* (обозначается $\eta \simeq \eta'$), если существует биективное отображение $\beta : X \to X'$, такое, что:

— $x \preceq \widehat{x} \iff \beta(x) \preceq' \beta(\widehat{x})$ для всех $x, \widehat{x} \in X$;

— $\tau(x) = \tau'(\beta(x))$ и $l(x) = l'(\beta(x))$ для всех $x \in X$.

Для ВПСС $TN = ((N = (B, E, G, l)), \tau)$ и графика $\omega = C_0 V_1 C_1 \ldots V_n C_n \in \mathcal{GRF}_s(TN)$ определим *ВЧУМ событий* $\eta(TN, \omega) = (E^*, \preceq^*, \mathbf{Age}, l^*)$ следующим образом:

— $E^* = E \cup end$;

— $\preceq^* = (\preceq \cap (E \times E)) \cup \{(e, end) \mid e \in E\}$;

$$— \mathbf{Age}(e) = \begin{cases} \sum\limits_{0 \leq i < k} \tau(C_i), \text{ если } e \in V_k (0 \leq k \leq n), \\ \\ \sum\limits_{0 \leq i \leq n} \tau(C_i), \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$— l^*(e) = \begin{cases} l(e), \text{ если } e \in E, \\ \varepsilon, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Дополнительное событие end соответствует завершению работы системы и является наибольшим элементом ВЧУМ. Функция Age определяет глобальное время системы для события. Заметим, что каждое событие ВПСС встречается в графике из $\mathcal{GRF}_s(TN)$ ровно один раз. Следовательно, значение функции Age — сумма временных значений сечений от начала графика вплоть до сечения, в котором соответствующее событие произошло, а для события end — это сумма временных значений всех сечений графика. Благодаря лемме 3 получаем, что данная функция и, как следствие, ВЧУМ событий ВПСС не зависят от выбора временного графика. Данный факт позволяет использовать для определения ВЧУМ событий ВПСС TN запись $\eta(TN)$.

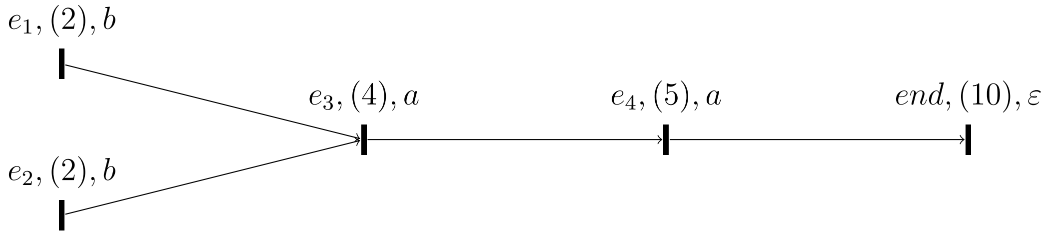

Рис. 3. ВЧУМ $\eta(\widetilde{TN})$

Пример 6. Построим ВЧУМ событий для ВПСС $\widetilde{TN}$ из примера 4. Сначала определим функцию **Age**. Для этого рассмотрим временной график $\omega = C_0\ V_1\ C_1\ V_2\ C_2\ V_3\ C_3$, представленный в примере 5, где $C_0 = \{b_1, b_2\}$, $C_1 = \{b_3, b_4\}$, $C_2 = \{b_5, b_6\}$, $C_3 = \{b_5, b_7\}$, $V_1 = \{e_1, e_2\}$, $V_2 = \{e_3\}$, $V_3 = \{e_4\}$. Тогда $\mathbf{Age}(e_1) = \tau(C_0) = 2$, $\mathbf{Age}(e_2) = \tau(C_0) = 2$, $\mathbf{Age}(e_3) = \tau(C_0) + \tau(C_1) = 2 + 2 = 4$, $\mathbf{Age}(e_4) = \tau(C_0) + \tau(C_1) + \tau(C_2) = 2 + 2 + 1 = 5$, $\mathbf{Age}(end) = \tau(C_0) + \tau(C_1) + \tau(C_2) + \tau(C_3) + \tau(C_4) = 2 + 2 + 1 + 5 = 10$. Представим полученный ВЧУМ $\eta(\widetilde{TN})$ в виде ориентированного графа на рис. 3. Рядом с каждым узлом графа указано событие, значение временной и помечающей функции.

Далее, рассмотрим функцию **Clock**, которая будет связывать временные конструкции в рассмотренных ранее НВСП и ВПСС. Пусть $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ — НВСП, $TN = (N, \tau)$ — ВПСС, $S = (M, I) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$ и φ — гомоморфизм из N в $\mathcal{N}$ относительно M. Для сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$, графика $\omega = C_0V_1C_1 \ldots V_n(C_n = C) \in \mathcal{GRF}_{s(i)}(TN, {}^\bullet N, C)$ и $e \in Fi(C)$ определим функцию

$$\mathbf{Clock}(\omega,e) = \begin{cases} \sum\limits_{max(k)<i\leq n} \tau(C_i), \text{если } \exists k < n\colon e \notin Fi(C_k), \\ \\ \sum\limits_{0\leq i\leq n} \tau(C_i) + I(\varphi(e)), \text{иначе.} \end{cases}$$

Значение данной функции соответствует времени с момента, как переход $\varphi(e)$ стал разрешенным и оставался таким до конца временного графика. Благодаря предложению 1, для любого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ существует график $\omega \in \mathcal{GRF}_{s(i)}(TN, {}^\bullet N, C)$. Кроме того, по лемме 3, функция **Clock** не зависит от выбора графика, приводящего к сечению C. Значит, мы можем рассматривать в качестве параметров функции **Clock** сечение $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и событие $e \in Fi(C)$. Теперь мы готовы определить временной процесс как пару из ВПСС и гомоморфизма с ограничениями на корректность временных конструкций.

Определение 8. Пусть $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ — НВСП, $S = (M, I) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$, $TN = (N, \tau)$ — ВПСС и φ — гомоморфизм из N в $\mathcal{N}$ относительно M. Пара $\pi = (TN, \varphi)$ называется *временным процессом НВСП относительно состояния* S, если для каждого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и события $e \in Fi(C)$ выполняется:

$$\mathbf{Clock}_\pi(C, e) \in D(\varphi(e)).$$

Пусть $\mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$ — множество всех временных процессов НВСП $\mathcal{TN}$ относительно состояния S и $\mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) = \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S_0)$. Временной процесс $\pi_0 = (((B_0, \varnothing, \varnothing, \varnothing), \tau_0 \equiv 0), \varphi_0)$, где φ_0 — гомоморфизм относительно M_0, называется *начальным*.

Пример 7. Рассмотри НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}} = (\widetilde{\mathcal{N}}, D)$ из примера 1, ВПСС $\widetilde{TN} = (\widetilde{N}, \tau)$ из примера 4 и гомоморфизм φ из $\widetilde{N}$ в $\widetilde{\mathcal{N}}$ относительно начальной разметки из примера 3.

Покажем, что пара $\pi = (\widetilde{TN}, \varphi)$ является временным процессом $\widetilde{\mathcal{TN}}$ относительно начального состояния $S_0 = (M_0, (I_0 \equiv 0))$. Для этого вычислим для каждого события e и сечения $C \in \mathcal{RC}(\widetilde{TN})$, в котором оно может произойти, значение функции $\mathbf{Clock}_\pi(C, e)$ и убедимся, что оно принадлежит интервалу $D(\varphi(e))$. Напомним все временные сечения сети: $C_0 = \{b_1, b_2\}$, $C_1 = \{b_2, b_3\}$, $C_1' = \{b_1, b_4\}$, $C_2 = \{b_3, b_4\}$, $C_3 = \{b_5, b_6\}$, $C_4 = \{b_5, b_7\}$. Легко проверить, что $C_0 \xRightarrow{\{e_1\}} C_1 \xRightarrow{\{e_2\}} C_2 \xRightarrow{\{e_3\}} C_3 \xRightarrow{\{e_4\}} C_4$ и $C_0 \xRightarrow{\{e_2\}} C_1' \xRightarrow{\{e_1\}} C_2 \xRightarrow{\{e_3\}} C_3 \xRightarrow{\{e_4\}} C_4$. Тогда:

— $\mathbf{Clock}_\pi(C_0, e_1) = \tau(C_0) = 2 \in D(\varphi(e_1) = t_1) = [0{,}2]$,
— $\mathbf{Clock}_\pi(C_0, e_2) = \tau(C_0) = 2 \in D(\varphi(e_2) = t_2) = [0{,}2]$,
— $\mathbf{Clock}_\pi(C_1, e_2) = \tau(C_0) + \tau(C_1) = 2 + 0 \in D(\varphi(e_2) = t_2) = [0{,}2]$,
— $\mathbf{Clock}_\pi(C_1', e_1) = \tau(C_0) + \tau(C_1') = 2 + 0 \in D(\varphi(e_1) = t_1) = [0{,}2]$,
— $\mathbf{Clock}_\pi(C_2, e_3) = \tau(C_2) = 2 \in D(\varphi(e_3) = t_3) = [1{,}3]$,
— $\mathbf{Clock}_\pi(C_3, e_4) = \tau(C_3) = 1 \in D(\varphi(e_4) = t_4) = [0{,}1]$.

Следовательно, $\pi = (\widetilde{TN}, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\widetilde{\mathcal{TN}})$.

Установим взаимосвязи между временными процессами и пробегами НВСП. Пусть $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$, $\omega = C_0 \dots C_n \in \mathcal{GRF}_{s(i)}(TN)$ для некоторой НВСП $\mathcal{TN}$ и состояния S. Определим отображение Run_φ графика ω ВПСС TN в последовательность временных задержек и шагов в НВСП $\mathcal{TN}$ следующим образом: $Run_\varphi(\omega) = \tau(C_0)\ \varphi(V_1)\ \tau(C_1) \dots \varphi(V_n)\ \tau(C_n)$. Обозначим $\mathcal{RUN}_{s(i)}(\pi) = \{Run_\varphi(\omega) \mid \omega \in \mathcal{GRF}_{s(i)}(TN)\}$. Следующее предложение устанавливает связь между $\mathcal{RUN}_{s(i)}(\mathcal{TN}, S)$ и $\mathcal{RUN}_{s(i)}(\pi)$.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{TN}$ — НВСП и S — некоторое ее достижимое состояние; а) $\mathcal{RUN}_{s(i)}(\pi) \subseteq \mathcal{RUN}_{s(i)}(\mathcal{TN}, S)$ для $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$; б) если $\sigma \in \mathcal{RUN}_{s(i)}(\mathcal{TN}, S)$, то существует единственный с точностью до изоморфизма; $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$, такой, что $\sigma \in \mathcal{RUN}_{s(i)}(\pi)$. в) если $\pi = ((N, \tau), \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$, $\sigma \in \mathcal{RUN}_{s(i)}(\pi)$ и $S \xrightarrow{\sigma} S' = (M', I')$, то сужение φ на $N^\bullet$ — биекция между $N^\bullet$ и M', $I'(\varphi(e)) = \mathbf{Clock}_\pi(N^\bullet, e)$ для $e \in Fi(N^\bullet)$.

Доказательство. Пункты предложения являются обобщением теорем, доказанных в работе [6] и их доказательство имеет те же рассуждения. Отличием является рассмотрение временных процессов не только относительно начального, а относительно произвольного достижимого состояния НВСП.

Предложение 2 позволяет ввести обозначение $S \xrightarrow{\pi} S'$, если $S \xrightarrow{\sigma} S'$ для $\sigma \in \mathcal{RUN}_{s(i)}(\pi)$. Кроме того, пусть $S_\pi = S'$, если $S = S_0$.

Аналогично ВПСС определим префикс и суффикс для временных процессов НВСП, которые, как мы покажем далее, также будут являться временными процессами. Рассмотрим произвольный $\widetilde{\pi} = (\widetilde{TN}, \widetilde{\varphi}) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$. Будем писать $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$, если:

— $\pi = (TN, \varphi)$, $\widehat{\pi} = (\widehat{TN}, \widehat{\varphi})$;
— $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widetilde{TN}$;
— $\varphi = \widetilde{\varphi}|_{B \cup E}$, $\widehat{\varphi} = \widetilde{\varphi}|_{\widehat{B} \cup \widehat{E}}$.

В этом случае:
— $\pi \xrightarrow{a} \widetilde{\pi}$, если $\widehat{E} = \{e\}$, $\widehat{\tau} \equiv 0$, $\widehat{l}(\widehat{e}) = a$;
— $\pi \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}$, если $\widehat{E}$ — шаг, $\widehat{\tau} \equiv 0$, $\widehat{l}(\widehat{E}) = A$;
— $\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{\pi}$, если $\widehat{E} = \varnothing$, $\widehat{\tau} \equiv \theta$;

Теорема 1. Если $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$ для $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, то $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и $\widehat{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S_\pi)$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D))$ и $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$, т. е. $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widetilde{TN}$ с некоторым граничным сечением $\widetilde{C} \in \mathcal{RC}(\widetilde{TN})$, $\varphi = \widetilde{\varphi}|_{B \cup E}$ и $\widehat{\varphi} = \widetilde{\varphi}|_{\widehat{B} \cup \widehat{E}}$. Сначала покажем, что $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$. Поскольку ${}^\bullet e$ и $e^\bullet$ для $e \in E \subseteq \widetilde{E}$ соответственно равны в N и $\widetilde{N}$, то $\varphi|_{{}^\bullet e} = \widetilde{\varphi}|_{{}^\bullet e}$ ($\varphi|_{e^\bullet} = \widetilde{\varphi}|_{e^\bullet}$) — биекция между ${}^\bullet e$ ($e^\bullet$) и ${}^\bullet\varphi(e) = {}^\bullet\widetilde{\varphi}(e)$ ($\varphi(e)^\bullet = \widetilde{\varphi}(e)^\bullet$) для всех $e \in E \subseteq \widetilde{E}$ по определению 4. Кроме того, из равенства ${}^\bullet N = {}^\bullet\widetilde{N}$ следует, что $\varphi|_{{}^\bullet N} = \widetilde{\varphi}|_{{}^\bullet\widetilde{N}}$ — биекция между ${}^\bullet N$ и начальной разметкой $\mathcal{TN}$. Значит, φ — гомоморфизм из N в $\mathcal{N}$ относительно начальной разметки. Согласно конструкциям TN и $\widetilde{TN}$, имеем, что $\mathcal{GRF}(TN) = \mathcal{GRF}(\widetilde{TN}, {}^\bullet\widetilde{N}, \widetilde{C})$. Кроме того, $\tau(C) = \widetilde{\tau}(C)$ для всех $C \in \mathcal{CUT}(N) \backslash N^\bullet$. Так как $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и в $N^\bullet$ нет событий, которые могли бы сработать в TN, то для каждого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и события $e \in Fi(C)$ выполняется $\mathbf{Clock}_\pi(C, e) = \mathbf{Clock}_{\widetilde{\pi}}(C, e) \in D(\varphi(e) = \widetilde{\varphi}(e))$, по определению 8. Следовательно, $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$. Теперь покажем, что $\widehat{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S_\pi = (M_\pi, I_\pi))$. Аналогично, так как ${}^\bullet\widehat{e}$ и $\widehat{e}^\bullet$ для $\widehat{e} \in \widehat{E} \subseteq \widetilde{E}$ соответственно равны в $\widehat{N}$ и $\widetilde{N}$, то $\widehat{\varphi}|_{{}^\bullet\widehat{e}} = \widetilde{\varphi}|_{{}^\bullet\widehat{e}}$ ($\widehat{\varphi}|_{\widehat{e}^\bullet} = \widetilde{\varphi}|_{\widehat{e}^\bullet}$) — биекция между ${}^\bullet\widehat{e}$ ($\widehat{e}^\bullet$) и ${}^\bullet\widehat{\varphi}(\widehat{e}) = {}^\bullet\widetilde{\varphi}(\widehat{e})$ ($\widehat{\varphi}(\widehat{e})^\bullet = \widetilde{\varphi}(\widehat{e})^\bullet$) для всех $\widehat{e} \in \widehat{E} \subseteq \widetilde{E}$. Так как $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, получаем, что сужение $\widehat{\varphi}|_{{}^\bullet\widehat{N}} = \widetilde{\varphi}|_{\widetilde{C}} = \varphi|_{N^\bullet}$ является биекцией между ${}^\bullet\widehat{N}$ и M_π, благодаря предложению 2, в. Следовательно, $\widehat{\varphi}$ — гомоморфизм из $\widehat{N}$ в $\mathcal{N}$ относительно M_π. Рассмотрим произвольное сечение $\widehat{C} \in \mathcal{RC}(\widehat{TN})$ и событие $\widehat{e} \in Fi(\widehat{C})$. Покажем, что $\mathbf{Clock}_{\widehat{\pi}}(\widehat{C}, \widehat{e}) \in D(\widehat{\varphi}(\widehat{e}))$. Пусть $\widetilde{\omega} = C_0 \ldots (C_m = \widetilde{C}) \ldots (C_n = \widehat{C}) \in \mathcal{GRF}_{s(i)}(\widetilde{TN}, {}^\bullet\widetilde{N}, \widehat{C})$, Такой временной график существует, поскольку $\widetilde{C} \preceq \widehat{C} \in \mathcal{RC}(\widetilde{TN})$ и благодаря предложению 1. Тогда $\widehat{\omega} = C_m \ldots C_n \in \mathcal{GRF}_{s(i)}(\widehat{TN}, \widehat{{}^\bullet N}, \widehat{C})$, $\omega = C_0 \ldots C_m \in \mathcal{GRF}_{s(i)}(TN)$. Используя предложение 2, в, получаем, $\mathbf{Clock}_{\widehat{\pi}}(\widehat{C}, \widehat{e}) =$

$$\mathbf{Clock}_{\widehat{\pi}}(\widehat{\omega}, \widehat{e}) = \begin{cases} \sum\limits_{max(k) < i \le n} \widehat{\tau}(C_i), \\ \text{если } \exists m \le k < n \colon \widehat{e} \notin Fi(C_k), \\ \\ \sum\limits_{m \le i \le n} \widehat{\tau}(C_i) + I_\pi(\widehat{\varphi}(\widehat{e})), \\ \text{иначе.} \end{cases} = \begin{cases} \sum\limits_{max(k) < i \le n} \widehat{\tau}(C_i), \\ \text{если } \exists m \le k < n \colon \widehat{e} \notin Fi(C_k), \\ \\ \sum\limits_{m \le i \le n} \widehat{\tau}(C_i) + \mathbf{Clock}_\pi(\omega, \varphi(\widehat{e})), \\ \text{иначе.} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{max(k) < i \le n} \widetilde{\tau}(C_i), \\ \text{если } \exists k < n \colon \widehat{e} \notin Fi(C_k), \\ \\ \sum\limits_{0 \le i \le n} \widetilde{\tau}(C_i), \\ \text{иначе.} \end{cases} = \mathbf{Clock}_{\widetilde{\pi}}(\widetilde{\omega}, \widehat{e}) = \mathbf{Clock}_{\widetilde{\pi}}(\widehat{C}, \widehat{e}).$$

Следовательно, согласно определению 8, $\mathbf{Clock}_{\widehat{\pi}}(\widehat{C}, \widehat{e}) = \mathbf{Clock}_{\widetilde{\pi}}(\widehat{C}, \widehat{e}) \in D(\widehat{\varphi}(\widehat{e}))$, т. е. $\widehat{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S_\pi)$.

Докажем вспомогательное предложение, устанавливающие связь между временными процессами и состояниями НВСП.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{TN}$ — НВСП.

а) Если $\pi \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}$, $A \in \mathbb{N}^{Act}$ ($\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{\pi}$, $\theta \in \mathbb{R}_{\ge 0}$) для некоторого $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, тогда $S_\pi \xrightarrow{U} S_{\widetilde{\pi}}$ и $L(U) = A$ ($S_\pi \xrightarrow{\theta} S_{\widetilde{\pi}}$).

б) Если $S_\pi \xrightarrow{A} S'$, $A \in \mathbb{N}^{Act}$ ($S_\pi \xrightarrow{\theta} S'$, $\theta \in \mathbb{R}_{\ge 0}$) для $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, то существует $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, такой, что $\pi \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}$ ($\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{\pi}$) и $S' = S_{\widetilde{\pi}}$.

Доказательство.

а) Пусть $\pi \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}$ для некоторого $A \in \mathbb{N}^{Act}$. Тогда $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$ для $\widehat{\pi}$ такого, что $\widehat{E}$ — шаг, $\widehat{\tau} \equiv 0$ и $\widehat{l}(\widehat{E}) = A$. По теореме 1 имеем, $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$. Рассмотрим произвольный временной график $\omega \in \mathcal{GRF}_s(TN)$, который существует согласно предложению 1. Поскольку

$N^\bullet \overset{\widehat{E}}{\Longrightarrow} \widetilde{N}^\bullet$, то $\omega\widehat{E}\widetilde{N}^\bullet \in \mathcal{GRF}_s(\widetilde{TN})$. Значит, согласно конструкциям π, $\widehat{\pi}$ и $\widetilde{\pi}$, имеем, что $Run_{\widetilde{\varphi}}(\omega\widehat{E}\widetilde{N}^\bullet) = Run_\varphi(\omega)U0 = \sigma U0$, где $\sigma \in \mathcal{RUN}_s(\pi)$, $\sigma U0 \in \mathcal{RUN}_s(\widetilde{\pi})$ и $L(U) = A$. Другими словами, $S_0 \xrightarrow{\sigma} S_\pi \xrightarrow{U} S_{\widetilde{\pi}}$ с $L(U) = A$. Далее, рассмотрим случай $\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{\pi}$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Тогда $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$ для $\widehat{\pi}$, такого, что $\widehat{E} = \varnothing$ и $\widehat{\tau} \equiv \theta$. Благодаря теореме 1 и предложению 1, рассмотрим произвольное $\omega = C_0V_1C_1 \ldots V_nC_n \in \mathcal{GRF}_s(TN)$. Тогда $\omega \in \mathcal{GRF}_s(\widetilde{TN})$. Кроме того, $Run_\varphi(\omega) = \tau(C_0)\varphi(V_1)\tau(C_1)\ldots\varphi(V_n)\tau(C_n) \in \mathcal{RUN}_s(\pi)$ и $Run_{\widetilde{\varphi}}(\omega) = \widetilde{\tau}(C_0)\widetilde{\varphi}(V_1)\widetilde{\tau}(C_1)\ldots\widetilde{\varphi}(V_n)\widetilde{\tau}(C_n) = \tau(C_0)\varphi(V_1)\tau(C_1)\ldots\varphi(V_n)\tau(C_n) + \theta \in \mathcal{RUN}_s(\widetilde{\pi})$. Значит, $S_\pi \xrightarrow{\theta} S_{\widetilde{\pi}}$.

б) Пусть $S_0 \xrightarrow{\sigma_\pi} S_\pi \xrightarrow{U} S'$, $\sigma = \sigma_\pi U0$ и $L(U) = A$. Поскольку $\sigma \in \mathcal{RUN}_s(\mathcal{TN})$, то существует $\widetilde{\pi}' \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, такой, что $\sigma \in \mathcal{RUN}_s(\widetilde{\pi}')$, по предложению 2. Другими словами, $\widetilde{\pi}'$ имеет шаговый график $\omega = C_0V_1C_1 \ldots V_nC_n$ из $\mathcal{GRF}_s(\widetilde{TN}')$ с $n > 0$, $\widetilde{l}'(V_n) = A$ и $\widetilde{\tau}'(C_n) = 0$, такой, что $Run_{\widetilde{\varphi}'}(\omega) = \sigma$. Тогда $\pi' \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}'$ и $\pi' \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ по теореме 1. Кроме того, $\omega' = C_0V_1C_1 \ldots V_{n-1}C_{n-1} \in \mathcal{GRF}_s(TN')$ и $Run_{\varphi'}(\omega') = \sigma_\pi$. Значит, $\sigma_\pi \in \mathcal{RUN}_s(\pi')$ и $\pi \simeq \pi'$ по предложению 2, б. Это означает, что мы можем переименовать события и условия ПСС временного процесса $\widetilde{\pi}'$ таким образом, что $\pi \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}$, где $\widetilde{\pi} \simeq \widetilde{\pi}'$. Случай $S_\pi \xrightarrow{\theta} S'$ рассматривается аналогично.

3. Иерархия эквивалентностей. На основе предложенных в предыдущих разделах семантик введем языковые и бисимуляционные поведенческие эквивалентности в контексте НВСП. Сначала рассмотрим понятие языков, основанных на пробегах НВСП, где каждый переход отображен в действия из алфавита Act. Пусть $\mathcal{TN}$ — НВСП. Тогда *интерливинговый и шаговый языки НВСП* $\mathcal{TN}$ определяются следующим образом:

— $Lang_i(\mathcal{TN}) = \{\theta_0a_1\theta_1 \ldots a_n\theta_n \mid a_j = L(t_j)\ (0 < j \leq n),\ \theta_0\{t_1\}\theta_1 \ldots \{t_n\}\theta_n \in \mathcal{RUN}_i(\mathcal{TN}),\ n \geq 0\}$;

— $Lang_s(\mathcal{TN}) = \{\theta_0A_1\theta_1 \ldots A_n\theta_n \mid A_j = L(U_j)\ (0 < j \leq n),\ \theta_0U_1\theta_1 \ldots U_n\theta_n \in \mathcal{RUN}_s(\mathcal{TN}),\ n \geq 0\}$.

Определение 9. НВСП $\mathcal{TN} = ((P, T, F, M_0, L), D)$ и $\mathcal{TN}' = ((P', T', F', M_0', L'), D')$, помеченные над Act, являются:

а) *шагово (интерливингово) языково эквивалентными* (обозначается $\mathcal{TN} \cong_{s(i)} \mathcal{TN}'$), если $Lang_{s(i)}(\mathcal{TN}) = Lang_{s(i)}(\mathcal{TN}')$;

б) *шагово (интерливингово) бисимуляционно эквивалентными* (обозначается $\mathcal{TN} \sim_{s(i)} \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq RS(\mathcal{TN}) \times RS(\mathcal{TN}')$, такое, что $(S_0, S_0') \in R$, и для всех $(S, S') \in R$ выполняется:

1) если $S \xrightarrow{A} \widetilde{S}$ для $A \in \mathbb{N}^{Act}$ ($S \xrightarrow{a} \widetilde{S}$ для $a \in Act$), тогда $S' \xrightarrow{A} \widetilde{S}'$ ($S' \xrightarrow{a} \widetilde{S}'$) и $(\widetilde{S}, \widetilde{S}') \in R$;

2) если $S \xrightarrow{\theta} \widetilde{S}$ для $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, то $S' \xrightarrow{\theta} \widetilde{S}'$ и $(\widetilde{S}, \widetilde{S}') \in R$;

3) как пункты (1) и (2), но роли $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ меняются.

Для НВСП $\mathcal{TN}$ введем вспомогательные обозначения, определяющие альтернативные языки, основанные на понятии временных процессов НВСП:

— $Trace_i(\mathcal{TN}) = \{\theta_0a_1\theta_1 \ldots a_n\theta_n \mid a_j \in Act\ (0 < j \leq n),\ \theta_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}\ (0 \leq k \leq n),\ \pi_0 \xrightarrow{\theta_0} \widetilde{\pi}_0 \xrightarrow{a_1} \pi_1 \ldots \widetilde{\pi}_{n-1} \xrightarrow{a_n} \pi_n \xrightarrow{\theta_n} \widetilde{\pi}_n,\ \widetilde{\pi}_n \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}),\ n \geq 0\}$;

— $Trace_s(\mathcal{TN}) = \{\theta_0A_1\theta_1 \ldots A_n\theta_n \mid A_j \in \mathbb{N}^{Act}\ (0 < j \leq n),\ \theta_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}\ (0 \leq k \leq n),\ \pi_0 \xrightarrow{\theta_0} \widetilde{\pi}_0 \xrightarrow{A_1} \pi_1 \ldots \widetilde{\pi}_{n-1} \xrightarrow{A_n} \pi_n \xrightarrow{\theta_n} \widetilde{\pi}_n,\ \widetilde{\pi}_n \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}),\ n \geq 0\}$;

— $Trace_{por}(\mathcal{TN}) = \{[\eta(TN)]_\simeq \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})\}$;

— $Trace_{prc}(\mathcal{TN}) = \{[TN]_{\simeq} \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})\}$.

Определение 10. Пусть $\star \in \{i,s,por,prc\}$. НВСП $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$, помеченные над Act, являются *$\star$-языково эквивалентными* (обозначается $\mathcal{TN} \equiv_\star \mathcal{TN}'$), если $Trace_\star(\mathcal{TN}) = Trace_\star(\mathcal{TN}')$.

Определение 11. Пусть $\star \in \{i,s,por,prc\}$. НВСП $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$, помеченные над Act, являются *$\star$-бисимуляционно эквивалентными* (обозначается $\mathcal{TN} \leftrightarrows_\star \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')$, такое, что $(\pi_0, \pi_0') \in R$ и для всех $(\pi, \pi') \in R$ выполняется:

— [(1)] если $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$ для $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и

— $\pi \xrightarrow{a} \widetilde{\pi}$ ($a \in Act$) или $\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{\pi}$ ($\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$), в случае $\star = i$,

— $\pi \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}$ ($A \in \mathbb{N}^{Act}$) или $\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{\pi}$ ($\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$), в случае $\star = s$,

тогда $\pi' \xrightarrow{\widehat{\pi'}} \widetilde{\pi}'$ для некоторого $\widetilde{\pi}' \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')$, $(\widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}') \in R$ и

— $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$ в случае $\star \in \{i,s,por\}$,

— $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$ в случае $\star = prc$,

— [(2)] как пункт (1), но роли $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ меняются.

Следующая теорема указывает на эквивалентность интерливинговых и шаговых языков, основанных на пробегах и временных процессах НВСП.

Теорема 2. Для НВСП $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ и $\star \in \{i,s\}$ выполняется:

— [(а)] $\mathcal{TN} \cong_\star \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \equiv_\star \mathcal{TN}'$,

— [(б)] $\mathcal{TN} \sim_\star \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \leftrightarrows_\star \mathcal{TN}'$.

Доказательство. Докажем для $\star = s$, случай $\star = i$ доказывается аналогично.

а) Следуя определениям 9, а, и 10, достаточно показать, что для произвольной НВСП $\mathcal{TN}$ выполняется $Lang_s(\mathcal{TN}) = Trace_s(\mathcal{TN})$. Поскольку $\pi_0 \xrightarrow{0} \pi_0$, то $|Trace_s(\mathcal{TN})| > 0$. Рассмотрим произвольное $W = \theta_0 A_1 \theta_1 \ldots A_n \theta_n \in Trace_s(\mathcal{TN})$, т. е. $\pi_0 \xrightarrow{\theta_0} \widetilde{\pi}_0 \xrightarrow{A_1} \pi_1 \ldots \widetilde{\pi}_{n-1} \xrightarrow{A_n} \pi_n \xrightarrow{\theta_n} \widetilde{\pi}_n$ и $\widetilde{\pi}_n \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$. Тогда, используя лемму 4, а, получаем, что $S_0 = S_{\pi_0} \xrightarrow{\theta_0} S_{\widetilde{\pi}_0} \xrightarrow{U_1} S_{\pi_1} \ldots S_{\widetilde{\pi}_{n-1}} \xrightarrow{U_n} S_{\pi_n} \xrightarrow{\theta_n} S_{\widetilde{\pi}_n}$, где $L(U_i) = A_i$ для $0 < i \leq n$. Значит $\sigma = \theta_0 U_1 \theta_1 \ldots U_n \theta_n \in \mathcal{RUN}_s(\mathcal{TN})$, а $W \in Lang_s(\mathcal{TN})$. Следовательно, $Trace_s(\mathcal{TN}) \subseteq Lang_s(\mathcal{TN})$. Аналогично, так как $S_0 \xrightarrow{0} S_0$, то $|Lang_s(\mathcal{TN})| > 0$. Рассмотрим произвольное $\widetilde{W} = \theta_0 A_1 \theta_1 \ldots A_n \theta_n \in Lang_s(\mathcal{TN})$. Тогда существует $\sigma = \theta_0 U_1 \theta_1 \ldots U_n \theta_n \in \mathcal{RUN}_s(\mathcal{TN})$, такой, что $L(U_i) = A_i$ для $0 < i \leq n$. Другими словами, существует последовательность $S_0 \xrightarrow{\theta_0} \widetilde{S}_0 \xrightarrow{A_1} S_1 \ldots \widetilde{S}_{n-1} \xrightarrow{A_n} S_n \xrightarrow{\theta_n} \widetilde{S}_n$ в $\mathcal{TN}$. Так как $S_0 = S_{\pi_0}$, то из леммы 4, б, получаем, что $\pi_0 \xrightarrow{\theta_0} \widetilde{\pi}_0 \xrightarrow{A_1} \pi_1 \ldots \widetilde{\pi}_{n-1} \xrightarrow{A_n} \pi_n \xrightarrow{\theta_n} \widetilde{\pi}_n$ и $\widetilde{\pi}_n \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, т. е. $\widetilde{W} \in Trace_s(\mathcal{TN})$. Значит, $Lang_s(\mathcal{TN}) \subseteq Trace_s(\mathcal{TN})$. Поскольку $Trace_s(\mathcal{TN}) \subseteq Lang_s(\mathcal{TN})$ и $Lang_s(\mathcal{TN}) \subseteq Trace_s(\mathcal{TN})$, то $Lang_s(\mathcal{TN}) = Trace_s(\mathcal{TN})$.

б) $\Rightarrow$ Пусть $\mathcal{TN} \sim_s \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_\sim$. Покажем, что $\mathcal{TN} \leftrightarrows_s \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_{\leftrightarrows}$, такой, что $(\pi, \pi') \in R_{\leftrightarrows} \Rightarrow (S_\pi, S_{\pi'}) \in R_\sim$. По определениям 9, б, и 11 имеем, что $(\pi_0, \pi_0') \in R_{\leftrightarrows}$ и $(S_{\pi_0}, S_{\pi_0'}) = (S_0, S_0') \in R_\sim$. Пусть $(\pi, \pi') \in R_{\leftrightarrows}$, $(S_\pi, S_{\pi'}) \in R_\sim$ и существует $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, такой, что $\pi \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}$ ($A \in \mathbb{N}^{Act}$). Тогда, согласно лемме 4, а, получаем, что $S_\pi \xrightarrow{A} S_{\widetilde{\pi}}$. Поскольку $(S_\pi, S_{\pi'}) \in R_\sim$, то по определению 9, б, $S_{\pi'} \xrightarrow{A} S'$ и $(S_{\widetilde{\pi}}, S') \in R_\sim$. Благодаря лемме 4, б, существует $\widetilde{\pi}' \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, такой, что $\pi' \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}'$ и $S' = S_{\widetilde{\pi}'}$. Следовательно, $(\widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}') \in R_{\leftrightarrows}$ и $(S_{\widetilde{\pi}}, S_{\widetilde{\pi}'}) \in R_\sim$. Аналогично рассматривается случай $\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{\pi}$ ($\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$). В силу симметрии получаем, что $\mathcal{TN} \leftrightarrows_s \mathcal{TN}'$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\leftrightarrow}_i \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_s \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{por} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{prc} \arrow[l] \arrow[d] \\
\equiv_i & \equiv_s \arrow[l] & \equiv_{por} \arrow[l] & \equiv_{prc} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Рис. 4. Иерархия эквивалентностей

б) $\Leftarrow$ Пусть $\mathcal{TN} \underline{\leftrightarrow}_s \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_{\underline{\leftrightarrow}}$. Покажем, что $\mathcal{TN} \sim_s \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_\sim$, такой, что $(S,S') = (S_\pi, S_{\pi'}) \in R_\sim$, где $(\pi,\pi') \in R_{\underline{\leftrightarrow}}$. По определениям 9, б, 11 имеем, что $(S_0, S_0') = (S_{\pi_0}, S_{\pi_0'}) \in R_\sim$ и $(\pi_0,\pi_0') \in R_{\underline{\leftrightarrow}}$. Пусть $(S,S') = (S_\pi, S_{\pi'}) \in R_\sim$ для $(\pi,\pi') \in R_{\underline{\leftrightarrow}}$ и существует состояние $\widetilde{S}$, такое, что $S_\pi \xrightarrow{A} \widetilde{S}$. Тогда, по лемме 4, б, получаем, что существует $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, такой, что $\pi \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}$ и $\widetilde{S} = S_{\widetilde{\pi}}$. Из определения 11, существует $\widetilde{\pi}' \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, такой, что $\pi' \xrightarrow{A} \widetilde{\pi}'$ и $(\widetilde{\pi},\widetilde{\pi}') \in R_{\underline{\leftrightarrow}}$. Значит, $S_{\pi'} \xrightarrow{A} S_{\widetilde{\pi}'}$ по лемме 4, а. Следовательно, $(\widetilde{S} = S_{\widetilde{\pi}}, S_{\widetilde{\pi}'}) \in R_\sim$ и $(\widetilde{\pi},\widetilde{\pi}') \in R_{\underline{\leftrightarrow}}$. Аналогично рассматривается случай $S_\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{S}$ $(\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0})$. В силу симметрии, $\mathcal{TN} \sim_s \mathcal{TN}'$.

Наконец, представим теорему, устанавливающую иерархию на рассмотренных эквивалентностях.

Теорема 3. Пусть $R, \widetilde{R} \in \{\equiv_i, \equiv_s, \equiv_{por}, \equiv_{prc}, \underline{\leftrightarrow}_i, \underline{\leftrightarrow}_s, \underline{\leftrightarrow}_{por}, \underline{\leftrightarrow}_{prc}\}$. Для любых НВСП $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ верно

$$(TN)R(TN') \Rightarrow (TN)\widetilde{R}(TN')$$

тогда и только тогда, когда в графе на рис. 4 существует путь от R к $\widetilde{R}$.

Доказательство. Рассмотрим каждую дугу полного направленного графа, вершинами которого являются отношения эквивалентности. Поскольку таких отношений по условию теоремы 8, то требуется рассмотреть $8 \times (8-1) = 56$ случаев. Далее, будем писать $R \Rightarrow \widetilde{R}$, если $(TN)R(TN') \Rightarrow (TN)\widetilde{R}(TN')$.

$\Rightarrow$ (1) $\equiv_s \Rightarrow \equiv_i$. По теореме 2, а, и определению $Lang_{s(i)}$ получаем, $\mathcal{TN} \equiv_s \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \cong_s \mathcal{TN}' \iff Lang_s(\mathcal{TN}) = Lang_s(TN') \Rightarrow Lang_i(\mathcal{TN}) = Lang_i(\mathcal{TN}') \iff \mathcal{TN} \cong_i \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \equiv_i \mathcal{TN}'$.

(2) $\equiv_{por} \Rightarrow \equiv_s$. Пусть $\mathcal{TN} \equiv_{por} \mathcal{TN}'$. Рассмотрим произвольное слово $W = \theta_0 A_1 \theta_1 \ldots A_n \theta_n \in Lang_s(\mathcal{TN}) \neq \varnothing$. Тогда существует пробег $\sigma = \theta_0 U_1 \theta_1 \ldots U_n \theta_n \in \mathcal{RUN}_s(\mathcal{TN})$, такой, что $L(U_i) = A_i$ для $0 < i \leq n$. Согласно предложению 2, б, существует $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и $\omega = C_0 V_1 C_1 \ldots V_n C_n \in \mathcal{GRF}_s(TN)$, такие, что $Run_\varphi(\omega) = \sigma$. Из этого следует, что $l(V_i) = L(U_i) = A_i$ $(0 < i \leq n)$ и $\tau(C_j) = \theta_j$ $(0 \leq j \leq n)$. Поскольку $\mathcal{TN} \equiv_{por} \mathcal{TN}'$, то существует $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')$, такой, что $\beta : \eta(TN) \simeq \eta(TN')$. Тогда существует $\omega' = C_0' V_1' C_1' \ldots V_n' C_n' \in \mathcal{GRF}_s(TN')$, где $V_i' = \beta(V_i)$ и $l'(V_i') = l(V_i)$ для $0 < i \leq n$. Рассмотрим произвольные $e_i \in (V_i \neq \varnothing)$ и $e_i' = \beta(e_i)$ $(0 < i \leq n)$. Тогда $\tau'(C_j') = \mathbf{Age}'(e_{j+1}') - \mathbf{Age}'(e_j') = \mathbf{Age}(e_{j+1}) - \mathbf{Age}(e_j) = \tau(C_j)$ $(0 \leq j < n)$, $\tau'(C_n') = \mathbf{Age}'(end') - \mathbf{Age}'(e_{n-1}') = \mathbf{Age}(end) - \mathbf{Age}(e_{n-1}) = \tau(C_n)$ в случае $n > 0$ и $\tau'(C_n') = \mathbf{Age}'(end') = \mathbf{Age}(end) = \tau(C_n)$ в случае $n = 0$, т. е. $\tau'(C_i') = \tau(C_i) = \theta_i$ $(0 \leq i \leq n)$. Благодаря предложению 2, а, получаем, что $Run(\omega') = \theta_0 U_1' \theta_1 \ldots U_n' \theta_n \in \mathcal{RUN}_s(\mathcal{TN}')$ и $L(U_i') = A_i$ для $0 < i \leq n$, т. е. $W \in Lang_s(\mathcal{TN}')$. В силу произвольности выбора W и симметрии получаем, что $Lang_s(\mathcal{TN}) = Lang_s(\mathcal{TN}')$, и как следствие, $\mathcal{TN} \cong_s \mathcal{TN}'$. Из теоремы 2 имеем, что $\mathcal{TN} \equiv_s \mathcal{TN}'$.

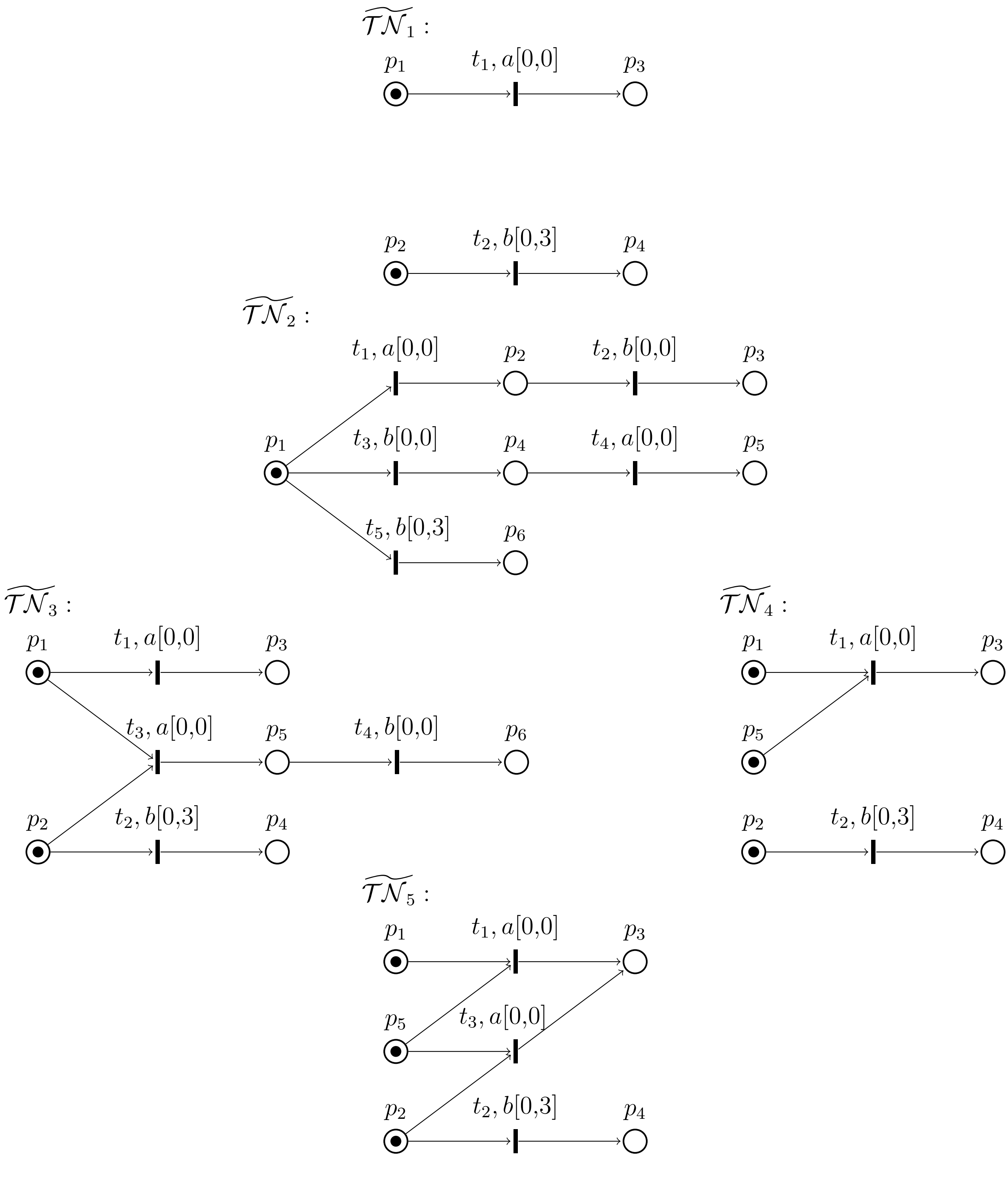

Рис. 5. Примеры НВСП

(3) $\equiv_{prc} \Rightarrow \equiv_{por}$. Пусть $\mathcal{TN} \equiv_{prc} \mathcal{TN}'$. Поскольку для любых ВПСС TN и TN' из $TN \simeq TN'$ следует $\eta(TN) \simeq \eta(TN')$, то $\mathcal{TN} \equiv_{prc} \mathcal{TN}' \iff \{[TN]_{\simeq} \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})\} = \{[TN']_{\simeq} \mid \pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')\} \Rightarrow \{[\eta(TN)]_{\simeq} \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})\} = \{[\eta(TN')]_{\simeq} \mid \pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')\} \iff \mathcal{TN} \equiv_{por} \mathcal{TN}'$.

(4) $\underline{\leftrightarrow}_s \Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_i$. По теореме 2, б, и определению 9 получаем, $\mathcal{TN} \underline{\leftrightarrow}_s \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \sim_s \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \sim_i \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \underline{\leftrightarrow}_i \mathcal{TN}'$.

(5) $\underline{\leftrightarrow}_{pom} \Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_s$ Следует из определения 11.

(6) $\underline{\leftrightarrow}_{prc} \Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_{por}$. Следует из определения 11 и того факта, что для любых ВПСС TN и TN' из $TN \simeq TN'$ следует $\eta(TN) \simeq \eta(TN')$.

(7) $\underline{\leftrightarrow}_i \Rightarrow \equiv_i$; $\underline{\leftrightarrow}_s \Rightarrow \equiv_s$. Пусть $\mathcal{TN} \underline{\leftrightarrow}_i \mathcal{TN}'$ и $W = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n \in Lang_i(\mathcal{TN}) \neq \varnothing$. Тогда существует $\theta_0\{t_1\}\theta_1 \dots \{t_n\}\theta_n \in \mathcal{RUN}_i(\mathcal{TN})$, где $L(t_i) = a_i$ для $0 < i \leq n$, и $S_0 \xrightarrow{\theta_0} \widetilde{S}_0 \xrightarrow{\{t_1\}} S_1 \dots \widetilde{S}_{n-1} \xrightarrow{\{t_n\}} S_n \xrightarrow{\theta_n} \widetilde{S}_n$. Поскольку $\mathcal{TN} \underline{\leftrightarrow}_i \mathcal{TN}'$, то $\mathcal{TN} \sim_i \mathcal{TN}'$ по теореме 2, б. Значит, для $S_i, \widetilde{S}_i$ существуют соответственно $S'_i, \widetilde{S}'_i$ $(0 \leq i \leq n)$ в $\mathcal{TN}'$, такие, что $S'_0 \xrightarrow{\theta_0} \widetilde{S}'_0 \xrightarrow{\{t'_1\}} S'_1 \dots \widetilde{S}'_{n-1} \xrightarrow{\{t'_n\}} S'_n \xrightarrow{\theta_n} \widetilde{S}'_n$, где S'_0 — начальное состояние и $L'(t'_j) = L(t_j) = a_j$ для $0 < j \leq n$. Следовательно, $W \in Lang_i(\mathcal{TN}')$. В силу произвольности выбора $W \in Lang_i(\mathcal{TN})$ имеем, что $Lang_i(\mathcal{TN}) = Lang_i(\mathcal{TN}')$, т. е. $\mathcal{TN} \cong_i \mathcal{TN}'$. Тогда $\mathcal{TN} \equiv_i \mathcal{TN}'$, благодаря теореме 2, а. Случай $\underline{\leftrightarrow}_s \Rightarrow \equiv_s$ доказывается аналогично.

(8) $\underline{\leftrightarrow}_{por} \Rightarrow \equiv_{por}$; $\underline{\leftrightarrow}_{prc} \Rightarrow \equiv_{prc}$. Пусть $\mathcal{TN} \underline{\leftrightarrow}_{por} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_{\underline{\leftrightarrow}}$. Рассмотрим произвольное $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) \neq \varnothing$. По определению 11 $(\pi_0, \pi'_0) \in R_{\underline{\leftrightarrow}}$. Кроме того, поскольку $\pi_0 \xrightarrow{\pi} \pi$, то существует $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')$, такой, что $\pi'_0 \xrightarrow{\pi'} \pi'$ и $\eta(TN) \simeq \eta(TN')$. В силу симметрии и произвольности выбора $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ получаем, что $Trace_{por}(\mathcal{TN}) = \{[\eta(TN)]_{\simeq} \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})\} = \{[\eta(TN')]_{\simeq} \mid \pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')\} = Trace_{por}(\mathcal{TN}')$, т. е. $\mathcal{TN} \equiv_{por} \mathcal{TN}'$. Случай $\underline{\leftrightarrow}_{prc} \Rightarrow \equiv_{prc}$ доказывается аналогично.

(9) $\equiv_{por} \Rightarrow \equiv_i$; $\equiv_{prc} \Rightarrow \equiv_s$; $\equiv_{prc} \Rightarrow \equiv_i$; $\underline{\leftrightarrow}_{por} \Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_i$; $\underline{\leftrightarrow}_{prc} \Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_s$; $\underline{\leftrightarrow}_{prc} \Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_i$; $\underline{\leftrightarrow}_s \Rightarrow \equiv_i$; $\underline{\leftrightarrow}_{por} \Rightarrow \equiv_i$; $\underline{\leftrightarrow}_{por} \Rightarrow \equiv_s$; $\underline{\leftrightarrow}_{prc} \Rightarrow \equiv_i$; $\underline{\leftrightarrow}_{prc} \Rightarrow \equiv_s$; $\underline{\leftrightarrow}_{prc} \Rightarrow \equiv_{por}$. Следует из пунктов (1–8)

$\Leftarrow$ Далее рассмотрим контрпримеры с НВСП, изображенными на рис. 5.

(10) $\underline{\leftrightarrow}_i \not\Rightarrow \equiv_s$. Рассмотрим НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{TN}}_2$. Нетрудно проверить, что $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \sim_i \widetilde{\mathcal{TN}}_2$, поскольку слова, образованные интерливинговыми пробегами, у этих сетей совпадают. Значит, как следствие теоремы 2, б, $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \underline{\leftrightarrow}_i \widetilde{\mathcal{TN}}_2$. С другой стороны, существует слово $0\ [a,b]\ 0 \in Lang_s(\widetilde{\mathcal{TN}}_1)$, образованное шаговым пробегом $0\ \{t_1, t_2\}\ 0$ сети $\widetilde{\mathcal{TN}}_1$, которое не принадлежит $Lang_s(\widetilde{\mathcal{TN}}_2)$, поскольку никакие два перехода $\widetilde{\mathcal{TN}}_2$ не могут одновременно сработать в $\widetilde{\mathcal{TN}}_2$. Тогда $Lang_s(\widetilde{\mathcal{TN}}_1) \neq Lang_s(\widetilde{\mathcal{TN}}_2)$, т. е. $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \ncong_s \widetilde{\mathcal{TN}}_2$. Из теоремы 2, б, получаем, $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \not\equiv_s \widetilde{\mathcal{TN}}_2$. Следовательно, $\underline{\leftrightarrow}_i \not\Rightarrow \equiv_s$.

(11) $\equiv_i \not\Rightarrow \equiv_s$; $\equiv_i \not\Rightarrow \equiv_{por}$; $\equiv_i \not\Rightarrow \equiv_{prc}$; $\equiv_i \not\Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_s$; $\equiv_i \not\Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_{por}$; $\equiv_i \not\Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_{prc}$; $\underline{\leftrightarrow}_i \not\Rightarrow \equiv_{por}$; $\underline{\leftrightarrow}_i \not\Rightarrow \equiv_{prc}$; $\underline{\leftrightarrow}_i \not\Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_s$; $\underline{\leftrightarrow}_i \not\Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_{por}$; $\underline{\leftrightarrow}_i \not\Rightarrow \underline{\leftrightarrow}_{prc}$ следуют из пунктов (1–10).

(12) $\underline{\leftrightarrow}_s \not\Rightarrow \equiv_{por}$. Рассмотрим НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{TN}}_3$. Видно, что если $S_0 \xrightarrow{\sigma} S$ в $\widetilde{\mathcal{TN}}_1$, $S'_0 \xrightarrow{\sigma'} S'$ в $\widetilde{\mathcal{TN}}_3$ и слова, соответствующие σ и σ', совпадают, то из $S \xrightarrow{A} \widetilde{S}$ $(S \xrightarrow{\theta} \widetilde{S})$ в $\widetilde{\mathcal{TN}}_1$ следует, $S' \xrightarrow{A} \widetilde{S}'$ $(S' \xrightarrow{\theta} \widetilde{S}')$ в $\widetilde{\mathcal{TN}}_3$. По определению 9 получаем, что $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \sim_s \widetilde{\mathcal{TN}}_3$. Тогда $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \underline{\leftrightarrow}_s \widetilde{\mathcal{TN}}_3$ согласно теореме 2, б. С другой стороны, для $\widetilde{\mathcal{TN}}_3$ существует временной процесс, в котором действие b является причиной для действия a. Как можно видеть, для $\widetilde{\mathcal{TN}}_1$ нет процесса с подобным порядком событий. Значит, $\{[\eta(TN)]_{\simeq} \mid \pi =$

$(TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\widetilde{\mathcal{TN}}_3)\} \neq \{[\eta(TN')]_{\simeq} \mid \pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\widetilde{\mathcal{TN}}_1)\}$, т. е. $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \not\equiv_{por} \widetilde{\mathcal{TN}}_3$. Следовательно, $\leftrightarroweq_s \not\Rightarrow \equiv_{por}$.

(13) $\equiv_s \not\Rightarrow \equiv_{por}$; $\equiv_s \not\Rightarrow \equiv_{prc}$; $\equiv_s \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{por}$; $\equiv_s \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{prc}$; $\leftrightarroweq_s \not\Rightarrow \equiv_{prc}$; $\leftrightarroweq_s \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{por}$; $\leftrightarroweq_s \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{prc}$ следуют из пунктов (1–8) и (12).

(14) $\leftrightarroweq_{por} \not\Rightarrow \equiv_{prc}$. Рассмотрим НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{TN}}_4$. Из конструкции НВСП и определения 11 видно, что $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \leftrightarroweq_{por} \widetilde{\mathcal{TN}}_4$. Поскольку ПСС временных процессов из $\mathcal{PRC}(\widetilde{\mathcal{TN}}_1)$ имеют два входных условия, а из $\mathcal{PRC}(\widetilde{\mathcal{TN}}_4)$ три, то $Trace_{prc}(\widetilde{\mathcal{TN}}_1) \neq Trace_{prc}(\widetilde{\mathcal{TN}}_4)$. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{TN}}_1 \not\equiv_{prc} \widetilde{\mathcal{TN}}_4$ и $\leftrightarroweq_{por} \not\Rightarrow \equiv_{prc}$.

(15) $\equiv_{por} \not\Rightarrow \equiv_{prc}$; $\equiv_{por} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{prc}$; $\leftrightarroweq_{por} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{prc}$ следуют из пунктов (1–8) и (14).

(16) $\equiv_{prc} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_i$. Рассмотрим НВСП $\widetilde{\mathcal{TN}}_4$ и $\widetilde{\mathcal{TN}}_5$. Нетрудно проверить, что $\{[TN]_{\simeq} \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\widetilde{\mathcal{TN}}_4)\} = \{[TN']_{\simeq} \mid \pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\widetilde{\mathcal{TN}}_5)\}$, т. е. $\widetilde{\mathcal{TN}}_4 \equiv_{prc} \widetilde{\mathcal{TN}}_5$. Покажем, что $\widetilde{\mathcal{TN}}_4 \not\leftrightarroweq_i \widetilde{\mathcal{TN}}_5$. Предположим обратное, т. е. $\widetilde{\mathcal{TN}}_4 \leftrightarroweq_i \widetilde{\mathcal{TN}}_5$. Тогда, по теореме 2, б, $\widetilde{\mathcal{TN}}_4 \sim_i \widetilde{\mathcal{TN}}_5$ с некоторой бисимуляцией $R_{\sim}$. Имеем, что $S_0 \xrightarrow{\{t_1\}} S$ в $\widetilde{\mathcal{TN}}_4$, $S_0' \xrightarrow{\{t_3\}} S'$ в $\widetilde{\mathcal{TN}}_5$ и $L(t_1) = L'(t_3)$, т. е. $(S, S') \in R_{\sim}$ по определению 9. Кроме того, $S \xrightarrow{\{t_2\}} \widetilde{S}$ в $\widetilde{\mathcal{TN}}_4$, но ни один из переходов не может сработать из S' в $\widetilde{\mathcal{TN}}_5$, получили противоречие с определением 9. Следовательно $\widetilde{\mathcal{TN}}_4 \not\leftrightarroweq_i \widetilde{\mathcal{TN}}_5$ и $\equiv_{prc} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_i$.

(17) $\equiv_i \not\Rightarrow \leftrightarroweq_i$; $\equiv_s \not\Rightarrow \leftrightarroweq_i$; $\equiv_s \not\Rightarrow \leftrightarroweq_s$; $\equiv_{por} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_i$; $\equiv_{por} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_s$; $\equiv_{por} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{por}$; $\equiv_{prc} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_s$; $\equiv_{prc} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{por}$; $\equiv_{prc} \not\Rightarrow \leftrightarroweq_{prc}$ следует из пунктов (1–8) и (16).

Заключение. В статье для НВСП со слабой временной и промежуточной пространственной стратегиями были определены и изучены поведенческие эквивалентности в дихотомиях «линейное — ветвящееся время» и «интерливинг — частичный порядок». В качестве представителей первой дихотомии использовались языковой и бисимуляционный подходы. Второй спектр был представлен семантикой интерливинга, шага, частичного порядка и временных процессов. Между представленными эквивалентностями были установлены взаимосвязи и построена их общая иерархия. В качестве дальнейшей работы планируется определить и изучить ST-бисимуляционные, сохраняющие историю и сохраняющие конфликт бисимуляционные эквивалентности. Также планируется расширить полученные результаты на атомарную и устойчиво атомарную пространственные стратегии.

Список литературы

1. Тарасюк И. В. Эквивалентности для поведенческого анализа параллельных и распределенных вычислительных систем. Академическое издательство Гео, 2007.

2. Boyer M., Roux O. H. Comparison of the expressiveness of arc, place and transition time Petri nets // International Conference on Application and Theory of Petri Nets. 2007. P. 63–82.

3. Bérard B., Cassez F., Haddad S., Lime D., Roux O. H. Comparison of different semantics for time Petri nets // International Symposium on Automated Technology for Verification and Analysis. 2005. P. 293–307.

4. Reynier P. A., Sangnier A. Weak time Petri nets strike back! // International Conference on Concurrency Theory. 2009. P. 557–571.

5. Virbitskaite I., Bushin D., Best E. True concurrent equivalences in time Petri nets // Fundamenta Informaticae, 149(4), 2016. P. 401–418.

6. Вирбицкайте И. Б., Зубарев А. Ю. «Истинно параллельная» семантика непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной и устойчиво атомарной пространственной стратегиями // Программирование. 2021. № 5. С. 60–74.

Алексей Юрьевич Зубарев — аспирант института систем информатики им. А. П. Ершова (Новосибирск). E-mail: `auzubarev@gmail.com`. Магистр по направлению «Математика и компьютерные науки». Новосибирского государственного университета. Область научных интересов: теория параллельных процессов; спецификация и верификация параллельных систем реального времени.

Alexey Yurievich Zubarev — PhD student A. P. Ershov Institute of Informatics Systems (Novosibirsk, Russia). E-mail: `auzubarev@gmail.com`. Educational degrees: Master's degree in computer science, Novosibirsk State University. Research interests: theory of parallel processes, specification and verification of parallel real-time systems.

Дата поступления — 23.03.2022