IS IT POSSIBLE TO ACHIEVE FURTHER ACCELERATION OF THE CALCULATION OF THE CONNECTIVITY CHARACTERISTICS OF A RANDOM GRAPH?

A. S. Rodionov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2022-4-39-52
EDN: FMEYBE

The article discusses new methods for accelerating the calculation of some characteristics of the connectivity of a random graph (the probability of a subset of vertices being connected (all-terminal reliability, ATR), the average probability of pairwise connectivity (APC), the mathematical expectation of the size of a connected subgraph containing a selected vertex (MENC), and some others). These problems have a proven non-polynomial complexity and, as a rule, approximate solutions are sought. However, with the development of computer technology and the development of parallel algorithms, finding exact solutions has become possible for graphs of a sufficiently large dimension to solve practical problems (up to hundreds of vertices in the case of a small average degree). In addition, the solutions to these problems found over the years, including various methods of reduction and decomposition by the author of the article [1–10], made it possible to further increase the dimension of the calculated graphs. Exact solutions are also needed to assess the quality of approximate algorithms.

Most explored is the task of finding ATR and two-terminal reliability (pairwise connectivity, $s-t$ connectivity), while various tasks may require and other characteristics of network's reliability [11] and consider different constrains, graph diameter in particular [12].

Various techniques are proposed for developing the well-known factorization method, when instead of considering one resolving edge, a certain small subset of edges chosen in a special way is considered. It is shown how to use cut edges as such a subset, leading to the possibility of effective use of known decomposition formulas for cut of 1, 2 or 3-vertices [13].

Key words: random graph, network reliability, algorithm.

References

1. Moore E., Shannon C. Reliable circuits using less reliable relays // Journal of the Franklin Institute. 1956. V. 262, N 3. P. 191–208. [Electron. Res.]: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003256905592`.

2. Colbourn C. J. The Combinatorics of Network Reliability. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1987. ISBN: 0195049209.

3. Jereb L. Network reliability: models, measure and analysis // Proceedings of the 6th IFIP Workshop on Performance Modeling and Evaluation of ATM Networks. 1998. P. T02/1–T02/10.

4. Lucet C., Manouvrier J.-F. Statistical and Probabilistic Models in Reliability / ed. by lonescu D. C., Limnios N. Boston, MA: Birkhauser Boston, 1999. P. 279–294. ISBN: 978-1-4612-1782-4.

This work was carried out under state contract with ICM&MG SB RAS 0251-2021-0005).

5. Shooman A. M. Algorithms for network reliability and connection availability analysis // Electro/95 International. Professional Program Proceedings. 1995. Jun. P. 309–333.

6. Hofstad R. v. d. Random Graphs and Complex Networks. Cambridge University Press, 2016. V. 1 of Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.

7. Erdos P., Renyi A. On Random Graphs I // Publicationes Mathematicae Debrecen. 1959. V. 6. P. 290–297.

8. Erdos P., Renyi A. On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungary. Acad. Sci. 1960. V. 5. P. 17–61.

9. Chari M., Colbourn C. J. Reliability Polynomials: A Survey // Journal of Combinatorics, Information & System Sciences. 1997. V. 22. P. 177–192.

10. Some open problems on reliability polynomials: Rep.: 93–28 / University of Waterloo; executor: Colbourn C. J. Waterloo, Ontario, Canada: 1999.

11. Ellis-Monaghan J. A., Merino C. Graph Polynomials and Their Applications I: The Tutte Polynomial // Structural Analysis of Complex Networks / Ed. by Dehmer M. Birkhauser Boston, 2011. P. 219255. [Electron. Res.]: http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4789-6_9.

12. Oxley J., Welsh D. Chromatic, Flow and Reliability Polynomials: The Complexity of Their Coefficients // Comb. Probab. Comput. 2002. July. V. 11, N 4. P. 403–426. [Electron. Res.]: http://dx.doi.org/10.1017/S0963548302005175.

13. Valiant L. G. The Complexity of Enumeration and Reliability Problems // SIAM Journal on Computing. 1979. V. 8, N 3. P. 410–421. [Electron. Res.]: http://dx.doi.org/10.1137/0208032.

14. A Note on the Complexity of Network Reliability Problems / Bodlaender H. L., Bodlaender H. L., Wolle T., and Wolle T. // IEEE Trans. Inf. Theory. 2004. V. 47. P. 1971–1988.

15. Shooman A. M., Kershenbaum A. Exact graph-reduction algorithms for network reliability analysis // Global Telecommunications Conference, 1991. GLOBECOM '91. Countdown to the New Millennium. Featuring a Mini-Theme on: Personal Communications Services. 1991. Dec. V. 2. P. 1412–1420.

16. Yubin Chen, Jiandong Li, Jiamo Chen. A new algorithm for network probabilistic connectivity // MILCOM 1999. IEEE Military Communications. Conference Proceedings (Cat. N 99CH36341). 1999. V. 2. P. 920–923.

17. Page L., Perry J. A practical implementation of the factoring theorem for network reliability // Reliability, IEEE Transactions on. 1988. Aug. V. 37, N 3. P. 259–267.

18. Rodionova O. K., Rodionov A. S., Choo H. Network Probabilistic Connectivity: Optimal Structures // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2004 / Ed. by Lagana A., Gavrilova M. L., Kumar V. et al. Springer Berlin Heidelberg, 2004. V. 3046 of Lecture Notes in Computer Science. P. 431–440. [Electron. Res.]: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-24768-5_46.

19. Rodionova O. K., Rodionov A. S., Choo H. Network Probabilistic Connectivity: Exact Calculation with Use of Chains // Computational Science — ICCS 2004, 4th International Conference, Part I / Ed. by Bubak M., van Albada G. D., Sloot P. M. A., Dongarra J. Springer Berlin Heidelberg, 2004. V. 3036 of Lecture Notes in Computer Science. P. 565–568.

20. Gadyatskaya O., Rodionov A., Rodionova O. Using EDP-Polynomials for Network Structure Optimization // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2008 / ed. by Gervasi O., Murgante B., Lagana A. et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 2008. P. 10611076.

21. Cumulative Updating of Network Reliability with Diameter Constraint and Network Topology Optimization / Migov D. A., Nechunaeva K. A., Nesterov S. N., and Rodionov A. S. // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2016 — 16th International Conference, Beijing, China, July 4–7, 2016, Proceedings, Part I / ed. by Gervasi O., Murgante B., Misra S. et al. Springer. 2016. V. 9786 of Lecture Notes in Computer Science. P. 141–152. [Electron. Res.]: https://doi.org/10.1007/978-3-319-42085-1_11.

22. Rodionov A., Rodionova O. Network Probabilistic Connectivity: Expectation of a Number of Disconnected Pairs of Nodes // High Performance Computing and Communications / Ed. by Gerndt M., Kranzlmuller D. Springer Berlin Heidelberg, 2006. V. 4208 of Lecture Notes in Computer Science. P. 101–109. [Electron. Res.]: `http://dx.doi.org/10.1007/11847366_11`.

23. Rodionov A. Speeding up computation of the reliability polynomial coefficients for a random graph // Automation and Remote Control. 2011. V. 72, N 7. P. 1474–1486. [Electron. Res.]: `http://dx.doi.org/10.1134/S0005117911070150`.

24. Rodionov A. S., Migov D. A., Rodionova O. K. Improvements in the Efficiency of Cumulative Updating of All-Terminal Network Reliability // IEEE Trans. Reliab. 2012. V. 61, N 2. P. 460–465. [Electron. Res.]: `https://doi.org/10.1109/TR.2012.2196172`.

25. Rodionov A. S., Rodionova O. K. Exact bounds for average pairwise network reliability // The 7th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication, ICUIMC '13, Kota Kinabalu, Malaysia. January 17–19, 2013. ACM. 2013. P. 45. [Electron. Res.]: `http://doi.acm.org/10.1145/2448556.2448601`.

26. Rodionov A. S., Rodionova O. K. Reliability Polynomials: Obtaining and Usage // Mathematical models and computational methods, 2nd Edition. Proc, of the Int. Conf. Applied Mathematics, Computational Science & Engineering, Crete, Greece, October 17–19, 2015. INASE. 2015. P. 226–229.

27. Rodionov A. S., Migov D. A. New Advantages of Using Chains in Computing Multiple $s-t$ Probabilistic Connectivity // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2016 — 16th International Conference, Beijing, China, July 4–7, 2016, Proceedings, Part II / ed. by Gervasi O., Murgante B., Misra S. et al. Springer. 2016. V. 9787 of Lecture Notes in Computer Science. P. 117–128. [Electron. Res.]: `https://doi.org/10.1007/978-3-319-42108-7\_9`.

28. Satyanarayana A., Chang M. K. Network reliability and the factoring theorem // Networks. 1983. V. 13. N 1. P. 107–120. [Electron. Res.]: `http://dx.doi.org/10.1002/net.3230130107`.

29. Migov D. A., Rodionov A. S. Parallel Implementation of the Factoring Method for Network Reliability Calculation // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2014 — 14th International Conference, Guimaraes, Portugal, June 30 – July 3, 2014, Proceedings, Part VI / ed. by Murgante B., Misra S., Rocha A. M. A. C. et al. Springer. 2014. V. 8584 of Lecture Notes in Computer Science. P. 654–664. [Electron. Res.]: `https://doi.org/10.1007/978-3-319-09153-2_49`.

30. Rodionov A. S. Some New Ideas About Obtaining and Estimating Reliability Polynomial of a Random Graph // 2020 14th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication (IMCOM). 2020. P. 1–5.

31. Network Probabilistic Connectivity: Using Node Cuts / Migov D. A., Rodionova O. K., Rodionov A. S., and Choo H. // Emerging Directions in Embedded and Ubiquitous Computing / ed. by Zhou X., Sokolsky O., Yan L. et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 2006. P. 702–709.

32. Migov D. Dekompozitciia seti po secheniiam pri raschete ee nadezhnosti // Pricladnaia diskretnaia matematika. 2020. N 47. S. 62–86. DOI 10.17223/20710410/47/6

33. Gadyatskaya O., Rodionov A. S., Rodionova O. K. Using EDP-Polynomials for Network Structure Optimization // Computational Science and Its Applications – ICCSA 2008, International Conference, Perugia, Italy, June 30 – July 3, 2008, Proceedings, Part II / ed. by Gervasi O., Murgante B., Lagana A. et al. Springer. 2008. V. 5073 of Lecture Notes in Computer Science. P. 10611076. [Electron. Res.]: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-69848-7\_84`.

МОЖНО ЛИ ДОБИТЬСЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО УСКОРЕНИЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК СВЯЗНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ГРАФА?

А. С. Родионов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.718
DOI: 10.24412/2073-0667-2022-4-39-52
EDN: FMEYBE

В статье рассматриваются новые приемы ускорения расчета некоторых характеристик связности случайного графа (вероятность связности подмножества вершин, средняя вероятность парной связности, математическое ожидание размера связного подграфа, содержащего выделенную вершину и некоторые другие). Эти задачи имеют доказано неполиномиальный характер сложности, и, как правило, ищутся приближенные решения. Однако, с развитием вычислительной техники и разработкой параллельных алгоритмов, нахождение точных решений стало возможным для графов достаточно большой размерности для решения практических задач (до сотен вершин в случае небольшой их средней степени). Кроме того, найденные за годы решения этих задач, в том числе автором доклада, различные приемы редукции и декомпозиции позволили еще больше поднять размерность рассчитываемых графов. Точные решения необходимы также для оценки качества приближенных алгоритмов.

Предлагаются различные приемы развития известного метода факторизации, когда вместо рассмотрения одного разрешающего ребра рассматривается некоторое небольшое подмножество специальным образом выбранных ребер.

Ключевые слова: случайные графы, сетевая надежность, алгоритмы.

Введение. Случайные неориентированные графы (СГ) с надежными вершинами и ненадежными ребрами в качестве модели сетей различного назначения исследуются многими авторами на протяжении нескольких десятилетий [1–6], получено много теоретических результатов, разработаны многочисленные алгоритмы анализа. Наиболее известны так называемые модели Эрдеша-Реньи [7–8], в одной из которых рассматриваются n-вершинные полные графы с равной вероятностью присутствия каждого ребра, во второй — n-вершинные m-реберные графы с заданной (в общем случае различной) вероятностью присутствия каждого ребра. В основном именно вторая модель изучается в приложениях. Пожалуй самой известной задачей исследования СГ является получение вероятности его связности. Часто рассматривают также вероятность связности выделенного подмножества вершин (особо выделяется вероятность связности выделенной пары вершин, так называемая $s-t$ связность), размер максимального связного подграфа, размер подграфа,

Исследования выполнены в рамках государственного задания ИВМ и МГ СО РАН (0251-2021-0005).

Статья по докладу на XVIII Международной Азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем», Киргизия, Иссык-Куль, 20.07.2022–30.07.2022.

содержащего выделенную вершину, вероятность передачи потока заданной величины и др [3]. Для СГ с равно надежными ребрами исследуются вопросы получения, анализа и использования так называемых *полиномов надежности (ПН)* [9–12]. Эти задачи так или иначе сводятся к перебору различных состояний СГ и имеют доказано неполиномиальную сложность [13–14]. Следствием последнего обстоятельства являются многочисленные исследования по оценке значений соответствующих показателей, разработка приближенных алгоритмов расчета. Одновременно проводятся исследования по получению точных значений показателей и коэффициентов соответствующих ПН. Разработаны различные приемы редукции и декомпозиции СГ, сохраняющие точность вычислений, самые очевидные из которых связаны с рассмотрением висячих вершин, цепей, мостов, точек сочленения, разрезов и сечений [4, 15–17]. Ряд результатов принадлежит коллективу, в котором работает автор доклада, и ему лично [18–27].

Появление параллельной вычислительной техники дало новый толчок к повышению эффективности вычисления характеристик СГ, стало возможным получение точных значений различных показателей для СГ довольно большой размерности (десятки вершин, несколько сотен ребер). Отметим, что точные решения необходимы также для оценки качества приближенных алгоритмов, а точные значения коэффициентов ПН позволяют искать новые закономерности при анализе структур СГ.

Одним из наиболее известных методов расчета характеристик случайных графов является *метод факторизации* [5, 17, 28], часто называемый методом Мура-Шеннона применительно к вероятности связности СГ, название связано с широко известной публикацией [1]. Метод является рекурсивным и позволяет осуществлять обход возможных вариантов состояния СГ, при этом ветви дерева разбора возможно заканчивать на вычисляемом каким-либо способом точного значения показателе для соответствующего состояния СГ, а также при возможности применять в каждом узле различные приемы редукции и декомпозиции. Простота идеи метода породила множество экспериментальных и теоретических исследований по повышению эффективности его реализации, в частности на параллельных ЭВМ [29].

Учитывая огромный интерес к рассматриваемым задачам со стороны многих авторов и тщательность проработки темы, трудно ожидать прорывных результатов в плане ускорения получения точных значений рассматриваемых показателей связности СГ, не связанных с непосредственно программными реализациями. Тем не менее, сделаем попытку предложить некоторые приемы пусть небольшого, но ускорения расчетов за счет более быстрого снижения размерности промежуточных графов в ходе процесса факторизации.

В предлагаемой работе существенно используются результаты Дениса Мигова по декомпозиции графов с использованием вершинных разрезов, а также идеи, изложенные в работе автора [30] применительно к использованию метода факторизации при получении коэффициентов полинома надежности для все-терминальной связности СГ (All Terminal Reliability, ATR).

1. **Основные соображения и начальные сведения**.

1.1. *Основные обозначения.* Используем стандартные обозначения графов (G), вершин ($v_i, i = 1, \ldots, n$), ребер ($e_i, i = 1, \ldots, m$, если перечисляются ребра, e_{ij} для ребра, соединяющего вершины v_i и v_j), вероятности присутствия ребра (p_i или p_{ij} в зависимости от обозначения соответствующего ребра). Для краткости иногда вершина просто задается своим номером или именем. Граф, полученный из G стягиванием в нем вершин x и y, обозначается G^{xy}, если стягивается больше вершин — перечисляются все. Остальные обозначения ясны из контекста.

Сначала напомним суть метода факторизации. Очевидно, что математическое ожидание любой метрической функции $\mu(G)$ случайного графа можно получить «в лоб» полным перебором его возможных состояний (для краткости мы опускаем знак математического ожидания, используем имя функции):

$$\mu(G) = \sum_{H \in \Gamma} P(H)\mu(H), \tag{1}$$

где Γ — множество всех возможных реализаций случайного графа G, число этих реализаций 2^m, где m — число ребер. Вероятность реализации H легко вычисляется по формуле

$$P(H) = \prod_{e \in W} p_e \prod_{e \notin W} (1 - p_e), \tag{2}$$

где $W \subseteq E$ — подмножество ребер СГ, присутствующих в реализации.

Метод факторизации позволяет организовать этот перебор поиском в глубину:

$$\mu(G) = p_e R(G/e) + (1 - p_e) R(G \backslash e), \tag{3}$$

где e — произвольное ребро, G/e — граф, в котором это ребро присутствует наверное (с вероятностью 1, *онадежено*), $G \backslash e$ — граф, в котором это ребро удалено. Вероятность каждого листа дерева разбора, т. е. уникального состояния СГ, легко вычисляется произведением вероятностей ребер в пути от корня к этому листу. Особенностью метода факторизации является отсутствие необходимости доходить до листьев при возможности вычисления показателя в узле: например, при вычислении ATR графа получение несвязной реализации означает несвязность всех состояний, соответствующих листьям-потомкам, т. е. можно возвращать 0 по рекурсии. То же относится к графам малой размерности или графам специальной структуры (дерево, цикл), для которых можно вычислять значение показателя по конечным формулам, т. е. при сохранении неполиномиального характера алгоритма, метод факторизации позволяет (иногда существенно) сократить пространство перебора.

Размерность графов, для которых существуют точные формулы, весьма существенна. Так, при вычислении ATR существует формула вычисления показателя для произвольного 5-вершинного графа, что ограничивает пространство перебора 2^{m-5} состояниями СГ, т. е. сокращение в 32 раза по сравнению с полным перебором.

Существуют известные формулы редукции размерности СГ и его декомпозиции. Первые связаны главным образом с наличием в структуре графа висячих вершин и цепей, вторые — с наличием мостов и точек сочленения. В работах [31–32] приведены формулы декомпозиции графа при вычислении ATR по 2-, 3- и 4-вершинным сечениям и общая методика для сечений произвольной мощности. k-вершинное сечение сводит расчет к вычислению ATR 2^{k+1} графов меньшей (в идеале — половинной) размерности. На практике достаточно рассматривать 2- и 3-вершинные сечения.

1.2. *Применение вершинных сечений в расчете вероятности связности СГ.* Процитируем без доказательства следующие формулы вероятности связности СГ с 2- и 3-вершинными сечениями, заимствованные из [32], ряд обозначений изменен для унификации с основным текстом статьи.

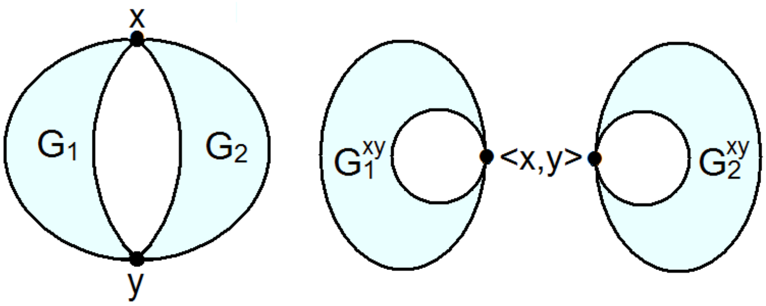

Рис. 1. 2-вершинное сечение и порожденные графы

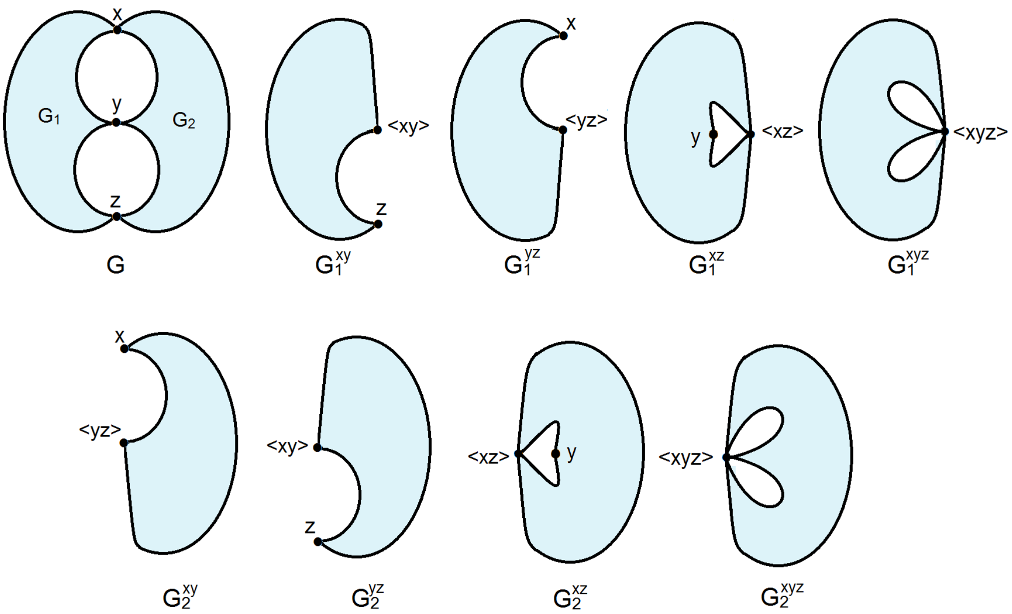

Рис. 2. 3-вершинное сечение и порожденные графы

Декомпозиция по 2-вершинному сечению.

$$R(G) = R(G_1)R(G_2^{xy}) + R(G_1^{xy})R(G_2) - R(G_1)R(G_2). \tag{4}$$

Иллюстрация приведена на рис. 1.

Декомпозиция по 3-вершинному сечению.

$$\begin{aligned} R(G) = \frac{1}{2}\Big\{ & R(G_1^{yz})\big[R(G_2^{xy})+R(G_2^{xz})-R(G_2^{yz})\big]+R(G_1^{xy})\big[R(G_2^{yz})+R(G_2^{xz})-R(G_2^{xy})\big]+ \\ & R(G_1^{xz})\big[R(G_2^{xy})+R(G_2^{yz})-R(G_2^{xz})\big]-R(G_1)\big[R(G_2^{xy})+R(G_2^{xz})+R(G_2^{yz})\big]- \\ & R(G_2)\big[R(G_1^{xy})+R(G_1^{yz})+R(G_1^{xz})\big]+R(G_1)R(C_2)\Big\}+ \\ & R(G_1)R(C_2^{xyz})+R(G_1^{xyz})R(C_2). \end{aligned} \tag{5}$$

Иллюстрация приведена на рис. 2.

2. Декомпозиция по разрезу. Пусть СГ G образован двумя графами G_1 и G_2, соединеными $k \leqslant 4$ ребрами. Концы этих ребер, принадлежащие одному из графов, очевидно представляют собой вершинное сечение (ребра, принадлежащие разрезу, принадлежат

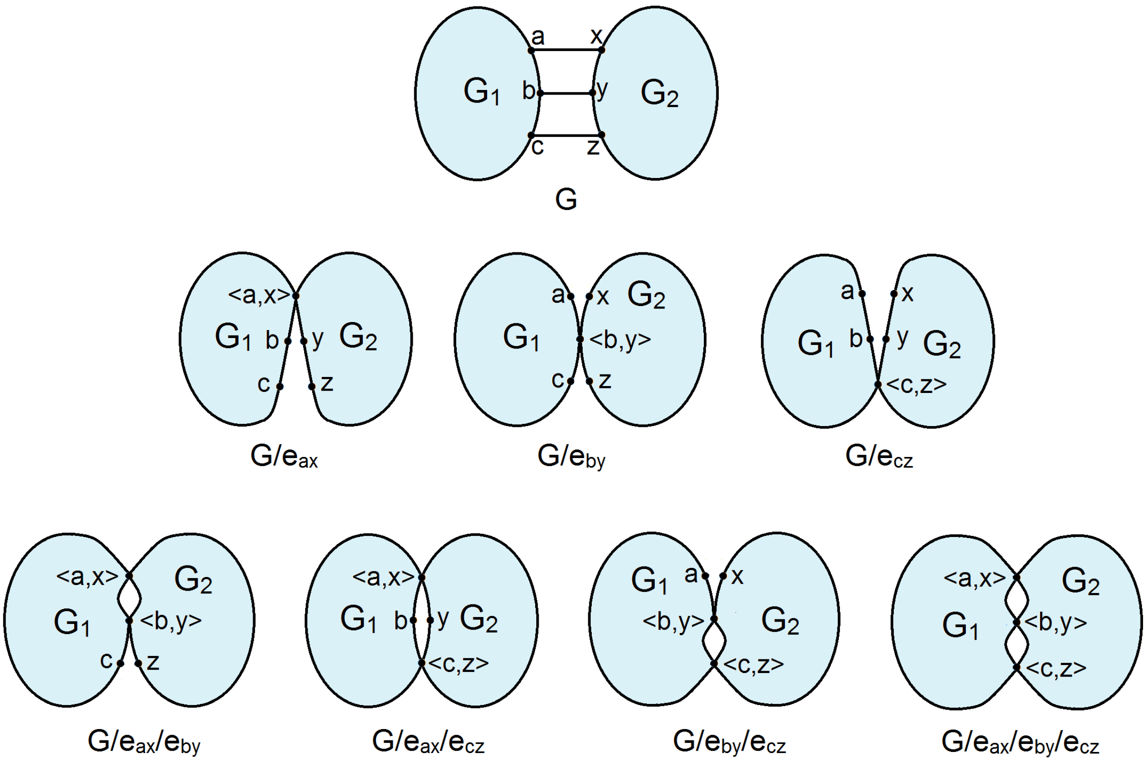

Рис. 3. 3-реберный разрез и порожденные стянутые графы

второму графу), можно применять соответствующую декомпозицию. Если $k = 1$, то имеем мост, и, если надежность этого моста p, получаем известное и очевидное

$$R(G) = pR(G_1)R(G_2). \tag{6}$$

В более общем случае $k > 1$ можно рассмотреть 2^k вариантов состояния ребер разреза. Пусть надежность этих ребер равна $p_1, \ldots, p_k$, $q_i = 1 - p_i$. С вероятностью $\prod_{i=1}^{k} q_i$ граф распадается на 2 компонента и тем самым несвязен. Если осталось одно ребро, то имеем рассмотренный выше случай моста и общий вклад этих случаев в вероятность связности графа

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{k} p_i \prod_{j \neq i} q_j R(G_1)R(G_2). \tag{7}$$

Если осталась пара ребер e_i и e_j (вероятность такого события равна $p_i p_j \prod_{s \neq i,j} q_s$), то при вычислении вероятности связности СГ их концы стягиваются, мы получаем 2-вершинное сечение и можно применять формулу (4). Всего таких вариантов $C_k^2 = k(k-1)/2$. Аналогично рассматриваем случаи 3 и далее неотказавших ребер (пусть их число равно r). Если $k > 4$, то просто получаем графы с уменьшенной размерностью: ребер всегда становится $m - k$, а вершин — $n - r$. Рассмотри пример 3-реберного разреза (рис. 3).

С вероятностью $q_{ax} q_{by} q_{cz}$ граф разваливается на 2 компонента и, соответственно, несвязен. При одном оставшемся ребре имеем по формуле (7) общий вклад этих вариантов:

$$\Delta_1 = \bigl(p_{ax} q_{by} q_{cz} + q_{ax} p_{by} q_{cz} + q_{ax} q_{by} p_{cz}\bigr) R(G_1)R(G_2). \tag{8}$$

При стягивании по двум оставшимся ребрам получаем 2-вершинные сечения и возможность использования формулы (4). При стягивании по всем трем ребрам получаем 3-вершинное сечение и возможность использования формулы (5). Обратим внимание, что, выполняя действия именно в таком порядке, сначала получаем $R(G_1)$ и $R(G_2)$, которые нет нужды заново вычислять для реализации формул (4) и (5), аналогично вычисленные на втором этапе $R(G_1^{ij})$, $i,j \in \{x,y,z\}$ и $R(G_2^{st}\ s,t \in \{a,b,c\})$ используются в (5), для вычисления которой требуется получить дополнительно лишь $R(G_1^{xyz})$ и $R(G_2^{abc})$. Общая же формула получает следующий вид:

$$\begin{aligned}
R(G) = {} & R(G_1)R(G_2)\big(p_{ax}q_{by}q_{cz} + q_{ax}p_{by}q_{cz} + q_{ax}q_{by}p_{cz} - p_{ax}p_{by}q_{cz} + p_{ax}p_{by}p_{cz} - q_{ax}p_{by}p_{cz}\big) + \\
& R(G_1)\Big[\frac{p_1p_2(2q_3-p_3)}{2}R(G_2^{xy}) + \frac{p_1p_3(2q_2-p_2)}{2}R(G_2^{xz}) + \frac{p_2p_3(2q_1-p_1)}{2}R(G_2^{yz}) + \\
& p_1p_2p_3R(G_2^{xyz})\Big] + \\
& R(G_2)\Big[\frac{p_1p_2(2q_3-p_3)}{2}R(G_1^{ab}) + \frac{p_1p_3(2q_2-p_2)}{2}R(G_1^{ac}) + \frac{p_2p_3(2q_1-p_1)}{2}R(G_1^{bc}) + \\
& p_1p_2p_3R(G_1^{abc})\Big] + \\
& \frac{p_1p_2p_3}{2}\big\{R(G_1^{ab})\big[R(G_2^{xz}) + R(G_2^{yz}) - R(G_2^{xy})\big] + R(G_1^{ac})\big[R(G_2^{xy}) + R(G_2^{yz}) - R(G_2^{xz})\big] + \\
& R(G_1^{bc})\big[R(G_2^{xy}) + R(G_2^{xz}) - R(G_2^{yz})\big]\big\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

При прямом применении формулы (5) можно было отнести ребра разреза к одному из графов, например G_1, выполнив сечение по вершинам x,y и z. В этом случае размерности графов, получаемых из G_1 стягиванием вершин сечения, были бы больше. Так, при стягивании всех вершин сечения имели бы ребра $e_{a,<xyz>}$, $e_{b,<xyz>}$ и $e_{c,<xyz>}$. В формуле же (9) все графы свободны от ребер разреза, тем самым общая размерность деревьев разбора для них существенно меньше.

Частным случаем разреза является отсечение вершины степени k (для $k = 3$ и $k = 4$ рассмотрено автором ранее в [30]). В этом случае число ребер в порожденных графах уменьшается не менее чем на k (больше, если есть ребра, соединяющие вершины, инцидентные отсекаемой), что само по себе хорошо. Однако использование разреза, делящего граф на примерно равные по количеству вершин компоненты, дает существенно больший эффект. При этом надо отдавать отчет в том, что поиск разрезов требует гораздо больше затрат, чем нахождение вершины требуемой степени. Использование разрезов из более чем 3 ребер эффективно на начальной стадии: такие разрезы, как правило, существуют и известны в реальных сетях, их можно указать во входных данных.

3. Декомпозиция по разрезу в вычислении EDP. Показатель EDP (Expected number of Disconnected Pairs of nodes) [33] взаимно-однозначно связан с вероятностью установления произвольного парного соединения в сети, которое, в свою очередь, равно арифметическому среднему вероятностей соединения всех возможных пар вершин:

$$\bar{R}(G) = \frac{C_n^2 - N(G)}{C_n^2}, \tag{10}$$

$$N(G) = C_n^2\left(1 - \bar{R}(G)\right). \tag{11}$$

При использовании (10) непосредственно, можно снова свести задачу к рассмотрению вершинных сечений, формулы также получены Д. А. Миговым [32]. Рассмотрим здесь вариант отсечения вершины степи k. Пусть ее номер 0, номера смежных вершин $1 \ldots k$, надежность соответствующих ребер равна $p_1, \ldots, p_k$, $q_i = 1 - p_i$. Пусть вес рассматриваемой вершины равен w_0 (про веса вершин и необходимость их введения также в [33]). Тогда с вероятностью $\rho_0 = \prod_{i=1}^{k} q_i$ вершина отсекается от всех остальных (обозначим $G^o = G \backslash v_0$), общий вклад этого варианта составляет

$$\Delta_1 = \rho_0 \big\{ N(G^o) + w_0 \big[W(G) - w_0 \big] \big\}. \tag{12}$$

Если осталось одно ребро, то вес смежной вершины увеличивается на w_0 и совокупный вклад этих вариантов в EDP равен

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{k} p_i \prod_{j \neq i} q_j N(G_i), \tag{13}$$

где G_i отличается от $G^o = G \backslash v_0$ только весом вершины i, равным $w_i + w_0$. Для краткости введем обозначение $\rho_i = p_i \prod_{j=1, j\neq i}^{k} q_j$. Согласно определению,

$$\begin{aligned} N(G_i) &= \sum_{j=1, j\neq i}^{k-1} \sum_{l=j+1, l\neq i}^{k} [1 - R_{jl}(G^o)] w_j w_l + (w_i + w_0) \sum_{j=1, j\neq i}^{k} [1 - R_{ij}(G^o)] w_j \\ &= N(G^o) + w_0 \sum_{j=1, j\neq i}^{k} [1 - R_{ij}(G^o)] w_j. \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда из этого результата и (13) получаем

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{k} \rho_i N(G_i) \tag{15}$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{k} \rho_i \Big) \Big\{ N(G^o) + 2w_0 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \big[1 - R_{ij}(G^o) \big] \Big\}. \tag{16}$$

В (12) и (16) присутствует $N(G^o)$. Объединяя, получаем

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Big(\sum_{i=0}^{k} \rho_i \Big) N(G^o) + \Big(\sum_{i=1}^{k} \rho_i \Big) \Big\{ 2w_0 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \big[1 - R_{ij}(G^o) \big] \Big\} + \rho_0 w_0 \big[W(G) - w_0 \big]. \tag{17}$$

Таким образом, для этих вариантов необходимо рассчитать C_k^2 значений вероятности парной связности вершин, инцидентных удаляемой, и EDP графа G^o. Отметим, что расчет вероятности связности пары вершин, как правило, требует меньше операций, чем определение вероятности связности графа, а G^o имеет на k ребер и одну вершину меньше, чем G. При полном переборе количество вариантов разрушения графа G^o, рассмотрение которых позволяет вычислить и его EDP, и все необходимые $R_{ij}(G^o)$, составляет 2^{m-k} против 2^m, т. е. сокращение в 2^k раз. Поскольку используются различные приемы редукции и декомпозиции, позволяющие избежать полного перебора, оценить реальное ускорение можно только экспериментально, но наличие ускорения очевидно.

Для остальных вариантов состояния ребер, инцидентных v_0, проводим стягивания их оконечных вершин и запускаем общий алгоритм. Все результирующие графы будут иметь как максимум $m-k$ ребер и $n-2$ вершин, т. е. также ожидается ускорение расчетов.

4. Декомпозиция по разрезу в вычислении MENC. MENC (Mathematical Expectation of the Number of nodes in Connected subgraph) — математическое ожидание размера связного подграфа, содержащего выделенную (центральную) вершину (по умолчанию первую, в нашем случае — нулевую). Минимальный размер такого подграфа равен w_0 (вес самой центральной вершины) По определению

$$\mathbb{C} = w_0 + \sum_{i=1}^{n} R_{0i} w_i. \tag{18}$$

Как и в предыдущем разделе, будем рассматривать варианты разрушения ребер, инцидентных v_0. С вероятностью $\prod_{i=1}^{k} q_i$ вершина отсекается и имеем размер подграфа w_0. С вероятностью ρ_i целевая вершина перемещается в смежную по оставшемуся i-му ребру, обозначим такой граф как $G_i^{(1)}$. Помним, что вес вершины v_0 должен быть учтен. Для этого вес вершины i в $G_i^{(1)}$ увеличивается на w_0. В этом случае общий вклад всех $G_i^{(1)}$ в MENC графа G будет равен

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \big[N(G_i^{(1)}) + w_0 \big]. \tag{19}$$

Аналогично поступаем с парами, тройками и т. д. ребер, инцидентных центральной вершине, получая графы $G_i^{(2)}$, $G_i^{(3)}$ и т. д. с вероятностями $\rho_i^{(2)}$, $\rho_i^{(3)}$ и т. д. В целом

$$\mathbb{C}(G) = \rho_0 w_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{C_k^i} \rho_j^{(i)} N(G_j^{(i)}). \tag{20}$$

Можно заметить, что, поскольку различные состояния рассматриваемых ребер образуют полную группу событий, при приведении подобных получаем w_0 с вероятностью 1. Поэтому можно не включать этот вес в веса объединенных вершин при стягивании. Тогда

$$\mathbb{C}(G) = w_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{C_k^i} \rho_j^{(i)} N(G_j^{(i)}). \tag{21}$$

Заключение. Таким образом, возможно обрезать дерево разбора не только с нижних, но и с верхних уровней. Дальнейшие исследования связаны с выбором стратегии определения разрешающих элементов или их множеств и порядка их рассмотрения, а также избежания повторов в вычислениях.

Список литературы

1. Moore E., Shannon C. Reliable circuits using less reliable relays // Journal of the Franklin Institute. 1956. V. 262, N 3. P. 191–208. [Electron. Res.]: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003256905592`.

2. Colbourn C. J. The Combinatorics of Network Reliability. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1987. ISBN: 0195049209.

3. Jereb L. Network reliability: models, measure and analysis // Proceedings of the 6th IFIP Workshop on Performance Modeling and Evaluation of ATM Networks. 1998. P. T02/1–T02/10.

4. Lucet C., Manouvrier J.-F. Statistical and Probabilistic Models in Reliability / ed. by Ionescu D. C., Limnios N. Boston, MA: Birkhauser Boston, 1999. P. 279–294. ISBN: 978-1-4612-1782-4.

5. Shooman A. M. Algorithms for network reliability and connection availability analysis // Electro/95 International. Professional Program Proceedings. 1995. Jun. P. 309–333.

6. Hofstad R. v. d. Random Graphs and Complex Networks. Cambridge University Press, 2016. V. 1 of Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.

7. Erdos P., Renyi A. On Random Graphs I // Publicationes Mathematicae Debrecen. 1959. V. 6. P. 290–297.

8. Erdos P., Renyi A. On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungary. Acad. Sci. 1960. V. 5. P. 17–61.

9. Chari M., Colbourn C. J. Reliability Polynomials: A Survey // Journal of Combinatorics, Information & System Sciences. 1997. V. 22. P. 177–192.

10. Some open problems on reliability polynomials: Rep.: 93–28 / University of Waterloo; executor: Colbourn C. J. Waterloo, Ontario, Canada: 1999.

11. Ellis-Monaghan J. A., Merino C. Graph Polynomials and Their Applications I: The Tutte Polynomial // Structural Analysis of Complex Networks / Ed. by Dehmer M. Birkhauser Boston, 2011. P. 219255. [Electron. Res.]: `http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4789-6\_9`.

12. Oxley J., Welsh D. Chromatic, Flow and Reliability Polynomials: The Complexity of Their Coefficients // Comb. Probab. Comput. 2002. July. V. 11, N 4. P. 403–426. [Electron. Res.]: `http://dx.doi.org/10.1017/S0963548302005175`.

13. Valiant L. G. The Complexity of Enumeration and Reliability Problems // SIAM Journal on Computing. 1979. V. 8, N 3. P. 410–421. [Electron. Res.]: `http://dx.doi.org/10.1137/0208032`.

14. A Note on the Complexity of Network Reliability Problems / Bodlaender H. L., Bodlaender H. L., Wolle T., and Wolle T. // IEEE Trans. Inf. Theory. 2004. V. 47. P. 1971–1988.

15. Shooman A. M., Kershenbaum A. Exact graph-reduction algorithms for network reliability analysis // Global Telecommunications Conference, 1991. GLOBECOM '91. Countdown to the New Millennium. Featuring a Mini-Theme on: Personal Communications Services. 1991. Dec. V. 2. P. 1412–1420.

16. Yubin Chen, Jiandong Li, Jiamo Chen. A new algorithm for network probabilistic connectivity // MILCOM 1999. IEEE Military Communications. Conference Proceedings (Cat. N 99CH36341). 1999. V. 2. P. 920–923.

17. Page L., Perry J. A practical implementation of the factoring theorem for network reliability // Reliability, IEEE Transactions on. 1988. Aug. V. 37, N 3. P. 259–267.

18. Rodionova O. K., Rodionov A. S., Choo H. Network Probabilistic Connectivity: Optimal Structures // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2004 / Ed. by Lagana A., Gavrilova M. L., Kumar V. et al. Springer Berlin Heidelberg, 2004. V. 3046 of Lecture Notes in Computer Science. P. 431–440. [Electron. Res.]: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-24768-5\_46`.

19. Rodionova O. K., Rodionov A. S., Choo H. Network Probabilistic Connectivity: Exact Calculation with Use of Chains // Computational Science — ICCS 2004, 4th International Conference, Part I / Ed. by Bubak M., van Albada G. D., Sloot P. M. A., Dongarra J. Springer Berlin Heidelberg, 2004. V. 3036 of Lecture Notes in Computer Science. P. 565–568.

20. Gadyatskaya O., Rodionov A., Rodionova O. Using EDP-Polynomials for Network Structure Optimization // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2008 / ed. by Gervasi O., Murgante B., Lagana A. et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 2008. P. 10611076.

21. Cumulative Updating of Network Reliability with Diameter Constraint and Network Topology Optimization / Migov D. A., Nechunaeva K. A., Nesterov S. N., and Rodionov A. S. // Computational

Science and Its Applications — ICCSA 2016 — 16th International Conference, Beijing, China, July 4–7, 2016, Proceedings, Part I / ed. by Gervasi O., Murgante B., Misra S. et al. Springer. 2016. V. 9786 of Lecture Notes in Computer Science. P. 141–152. [Electron. Res.]: https://doi.org/10.1007/978-3-319-42085-1_11.

22. Rodionov A., Rodionova O. Network Probabilistic Connectivity: Expectation of a Number of Disconnected Pairs of Nodes // High Performance Computing and Communications / Ed. by Gerndt M., Kranzlmuller D. Springer Berlin Heidelberg, 2006. V. 4208 of Lecture Notes in Computer Science. P. 101–109. [Electron. Res.]: http://dx.doi.org/10.1007/11847366_11.

23. Rodionov A. Speeding up computation of the reliability polynomial coefficients for a random graph // Automation and Remote Control. 2011. V. 72, N 7. P. 1474–1486. [Electron. Res.]: http://dx.doi.org/10.1134/S0005117911070150.

24. Rodionov A. S., Migov D. A., Rodionova O. K. Improvements in the Efficiency of Cumulative Updating of All-Terminal Network Reliability // IEEE Trans. Reliab. 2012. V. 61, N 2. P. 460–465. [Electron. Res.]: https://doi.org/10.1109/TR.2012.2196172.

25. Rodionov A. S., Rodionova O. K. Exact bounds for average pairwise network reliability // The 7th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication, ICUIMC '13, Kota Kinabalu, Malaysia. January 17–19, 2013. ACM. 2013. P. 45. [Electron. Res.]: http://doi.acm.org/10.1145/2448556.2448601.

26. Rodionov A. S., Rodionova O. K. Reliability Polynomials: Obtaining and Usage // Mathematical models and computational methods, 2nd Edition. Proc, of the Int. Conf. Applied Mathematics, Computational Science & Engineering, Crete, Greece, October 17–19, 2015. INASE. 2015. P. 226–229.

27. Rodionov A. S., Migov D. A. New Advantages of Using Chains in Computing Multiple $s-t$ Probabilistic Connectivity // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2016 — 16th International Conference, Beijing, China, July 4–7, 2016, Proceedings, Part II / ed. by Gervasi O., Murgante B., Misra S. et al. Springer. 2016. V. 9787 of Lecture Notes in Computer Science. P. 117–128. [Electron. Res.]: https://doi.org/10.1007/978-3-319-42108-7_9.

28. Satyanarayana A., Chang M. K. Network reliability and the factoring theorem // Networks. 1983. V. 13. N 1. P. 107–120. [Electron. Res.]: http://dx.doi.org/10.1002/net.3230130107.

29. Migov D. A., Rodionov A. S. Parallel Implementation of the Factoring Method for Network Reliability Calculation // Computational Science and Its Applications — ICCSA 2014 — 14th International Conference, Guimaraes, Portugal, June 30 – July 3, 2014, Proceedings, Part VI / ed. by Murgante B., Misra S., Rocha A. M. A. C. et al. Springer. 2014. V. 8584 of Lecture Notes in Computer Science. P. 654–664. [Electron. Res.]: https://doi.org/10.1007/978-3-319-09153-2_49.

30. Rodionov A. S. Some New Ideas About Obtaining and Estimating Reliability Polynomial of a Random Graph // 2020 14th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication (IMCOM). 2020. P. 1–5.

31. Network Probabilistic Connectivity: Using Node Cuts / Migov D. A., Rodionova O. K., Rodionov A. S., and Choo H. // Emerging Directions in Embedded and Ubiquitous Computing / ed. by Zhou X., Sokolsky O., Yan L. et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 2006. P. 702–709.

32. Мигов Д. Декомпозиция сети по сечениям при расчете ее надежности // Прикладная дискретная математика. 2020. № 47. С. 62–86. DOI 10.17223/20710410/47/6.

33. Gadyatskaya O., Rodionov A. S., Rodionova O. K. Using EDP-Polynomials for Network Structure Optimization // Computational Science and Its Applications – ICCSA 2008, International Conference, Perugia, Italy, June 30 – July 3, 2008, Proceedings, Part II / ed. by Gervasi O., Murgante B., Lagana A. et al. Springer. 2008. V. 5073 of Lecture Notes in Computer Science. P. 10611076. [Electron. Res.]: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-69848-7_84.

Алексей Сергеевич Родионов получил диплом Инженера-математика в Новосибирском электротехническом институте по направлению «Прикладная математика» в 1976 г. Закончил аспирантуру ВЦ СО АН СССР в 1980. Получил степень кандидата технических наук в 1984 году и степень доктора наук в области «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году в Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.

Он является руководителем лаборатории «Системного моделирования и оптимизации» ИВМ и МГ СО РАН. Алексей Сергеевич читает лекции по компьютерному моделированию в качестве профессора Новосибирского государственного университета и Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики.

Его основные научные интересы — компьютерное моделирование и надежность сетей. С 2016 года по настоящее время он является председателем секции R8 IEEE России по Сибири.

Alexey Rodionov received his Eng. Dipl. degree in Applied Mathematics from the Institute of electrical engineering, Novosibirsk, Russia in 1976, and his Ph.D. (Candidate of science) degree in the field of software engineering (in Russian classification, “Software of computing machines, complexes, systems and networks”) in 1984, and Doctor of Science degree in the field of “Mathematical modeling, numerical methods and program complexes” in 2003, both from the Institute of Computational mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences.

He is the head of the Laboratory “System modeling and optimization” of the named institute. Alexey gives lectures on computer simulation as professor of Novosibirsk state university, and Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences.

His main scientific interests are computer simulation, and network reliability. From 2016 till now he is the Chair of the R8 IEEE Russia Siberia Section.

Дата поступления — 25.10.2022