ALGORITHMS FOR CALCULATING NETWORK RELIABILITY BASED ON THE DECOMPOSITION APPROACH

A. V. Korobov, D. A. Migov

Novosobirsk State University,
630090, Novosibirsk, Russia
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
630090, Novosibirsk, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2023-4-17-28
EDN: HZLMJO

When designing and developing networks in various spheres of human activity, related, for example, to the telecommunications and banking sectors, order confirmation and creditworthiness systems, and others, an important criterion is their reliability. The task of assessing the reliability of the network arises, as a rule, in two cases: qualitative analysis of existing systems or optimization in the design of new systems. Note also that when formulating this task, it is necessary to determine from which reliability criteria to proceed. In this paper, the classical indicator of its connectivity will be considered as a parameter of network reliability.

A mathematical model describing a network is usually a random graph in which the vertices represent the network nodes in question, such as workstations, routers, servers and other devices or structures, and the edges represent the communication channels of these objects. Each element of a random graph is present in it with a certain probability, expressing its reliability. The reliability of the network in this representation will be understood as the probability of connectivity of the vertices of the graph. Next, the paper will consider the problem of calculating the probability of connectivity of an undirected graph with absolutely reliable vertices, the probability of whose presence is equal to one, and unreliable edges, the probabilities of whose presence will be determined by some real numbers from the segment from zero to one.

The exact calculation of this indicator is NP–hard problem, which makes it difficult for networks of real dimension. Modifications of the factorization method used for accurate calculation are proposed, based on the decomposition of the network by a vertex cut (section, separator) formed by two vertices. For more efficient use of decomposition, the structural similarity of the resulting subgraphs is taken into account. As well as the graphs obtained from them by gluing the cutting vertices. Three algorithms have been developed that, on average, accelerate the process of calculating the probability of connectivity of an arbitrary graph. To compare the proposed algorithms with the factorization method and the factorization method with preliminary decomposition, the results of numerical experiments are presented.

Key words: network reliability, random graph, connectivity probability, factorization method, network decomposition, cut, separator.

The work was completed according to the project N 0251-2021-0005 ICMMG SB RAS.

References

1. Colbourn Ch. J. The combinatorics of network reliability. N. Y: Oxford Univ. press. 1987. P. 160.

2. Hebert Perez-Roses. Sixty Years of Network Reliability // Mathematics in Computer Science. 2018. V. 12. P. 275–293.

3. Yeh W. C. Novel Binary-Addition Tree Algorithm (BAT) for Binary-State Network Reliability Problem // Reliability Engineering and System Safety. 2020. 208: 107448.

4. Valiant L. The complexity of enumeration and reliability problems. // SIAM Journal on Computing. 1979. V. 8. N 3. P. 410–421.

5. Page L. B., Perry J. E. A Practical Implementation of the Factoring Theorem for Network Reliability // IEEE transactions on reliability. 1988. V. 37, N 3. P. 259–267.

6. Rodionova O. K., Rodionov A. S., Choo H. Network Probabilistic Connectivity: Exact Calculation with Use of Chains // ICCSA–2004, Springer Lecture Notes in Computer Sciences. 2004. Vol. 3046. P. 315–324.

7. Migov D. A., Nesterov S. N., Rodionov A. S. Metody uskoreniya rascheta nadezhnosti setej s ogranicheniem na diametr // Vestnik SibGUTI. 2014. N 1. P. 49–56.

8. Wood R. K. Triconnected decomposition for computing K-terminal network reliability // Networks. 1989. V. 19. P. 203–220.

9. Migov D. A., Rodionova O.K., Rodionov A.S., Choo H. Network Probabilistic Connectivity: Using Node Cuts // EUC Workshops, Springer Lecture Notes in Computer Sciences. 2006. V. 4097. P. 702–709.

10. Burgos J. M., Amoza F. R. Factorization of network reliability with perfect nodes I: Introduction and statements // Discrete Applied Mathematics. 2016. V. 198. P. 82–90.

11. Migov D. Dekompoziciya seti po secheniyam pri raschyote eyo nadyozhnosti // Prikladnaya diskretnaya matematika. 2020. N 47. P. 62–86.

12. Mur E., Shennon K. Nadezhnye skhemy iz nenadezhnyh rele // Kiberneticheski sb. M.: Inostr. lit. 1960. N 1. P. 109–148.

13. Migov D. A. Formuly dlya bystrogo rascheta veroyatnosti svyaznosti podmnozhestva vershin v grafah nebol'shoj razmernosti // Problemy informatiki, 2010. N 6. P. 10–17.

14. Rodionov A., Migov D. Obtaining and Using Cumulative Bounds of Network Reliability // Chapter no 5 in: System Reliability. Edt. by Constantin Volosencu. ISBN 978-953-51-3705-4. Publisher: InTech. Rijeka, Croatia. 2017. P. 93–112.

АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СЕТИ НА ОСНОВЕ ДЕКОМПОЗИЦИОННОГО ПОДХОДА

А. В. Коробов, Д. А. Мигов

Новосибирский государственный университет,
630090, Новосибирск, Россия
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 621.311.1+519.17
DOI: 10.24412/2073-0667-2023-4-17-28
EDN: HZLMJO

В статье рассматривается задача точного расчета структурной надежности сети с ненадежными ребрами и абсолютно надежными вершинами. В качестве показателя надежности используется вероятность связности соответствующего случайного графа. Точный расчет данного показателя — NP-трудная задача, что делает его затруднительным для сетей реальной размерности. Предлагаются модификации метода факторизации, использующегося для точного расчета, основанные на декомпозиции сети по вершинному разрезу (сечению, сепаратору), образованному двумя вершинами. Для более эффективного использования декомпозиции учитывается структурная схожесть получающихся при декомпозиции подграфов — собственно подграфов, и графов, получающихся из них склейкой разрезающих вершин. Разработано три алгоритма, в среднем ускоряющих процесс вычисления вероятности связности произвольного графа. Для сравнения предложенных алгоритмов с методом факторизации и методом факторизации с предварительной декомпозицией приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: надежность сети, случайный граф, вероятность связности, метод факторизации, декомпозиция сети, сечение, сепаратор.

Введение. При проектировании и разработке сетей в различных сферах жизнедеятельности человека, связанных, например, с телекоммуникационным и банковским секторами, системами подтверждения заказов и кредитоспособности и прочими, важным критерием является их надежность. Задача оценки надежности сети возникает, как правило, в двух случаях: качественного анализа уже существующих или оптимизации при проектировании новых систем. Отметим также, что при формулировании этой задачи нужно определить, из каких критериев надежности исходить. В данной работе в качестве параметра надежности сети будет рассматриваться такой классический показатель, как ее связность [1].

Математической моделью, описывающей сеть, обычно выступает случайный граф [2, 3], в котором вершины представляют рассматриваемые узлы сети, такие как рабочие станции, маршрутизаторы, серверы и другие устройства или сооружения, а ребра — каналы связи этих объектов. Каждый элемент случайного графа присутствует в нем с

Работа выполнена в рамках проекта № 0251-2021-0005 ПФИ ИВМ и МГ СО РАН

определенной вероятностью, выражающей его надежность. Под надежностью сети в данном представлении будет пониматься вероятность связности вершин графа. Далее в работе будет рассматриваться задача расчета вероятности связности неориентированного графа с абсолютно надежными вершинами, вероятность присутствия которых равна единице, и ненадежными ребрами, вероятности присутствия которых будут определяться некоторыми вещественными числами из отрезка от нуля до единицы. Также в дальнейшем возможно отождествление понятий «сети» и «случайного графа» без потери общности изложения.

Несмотря на то, что поставленная задача является NP–трудной [4], существуют точные методы вычисления для случайных графов небольших размеров за приемлемое время, наиболее известным из которых является метод ветвления Мура–Шеннона [5], иначе называемый методом факторизации, а также такие методы ускорения проводимых расчетов, как методы редукции [6–7] и декомпозиции графа [8-11].

Основной целью данной работы является ускорение существующих способов расчета вероятности связности случайного графа с абсолютно надежными вершинами и ненадежными ребрами, основанных на точном методе факторизации и декомпозиционном подходе, за счет учета структурной схожести получающихся при декомпозиции подграфов. Представлено и исследовано три алгоритма–модификации метода факторизации для двусвязного графа с двухвершинным сечением, которое далее будем обозначать для краткости как 2–сечение. Под 2–сечением (двухвершинным сепаратором) здесь понимается двухвершинный разрез, то есть пара узлов в исходной сети, удаление которых делает ее несвязной. Каждый алгоритм построен на идее сокращения повторяющихся шагов рекурсии в методе факторизации посредством совместного расчета вероятностей связности, получаемых при разбиении подграфов.

1. Основные определения и обозначения. Рассмотрим произвольный неориентированный граф $G = (V{,}E)$, где V — это множество вершин, а E — множество ребер графа G. Пусть для каждого ребра задана вероятность его присутствия в графе, при этом предполагается, что вершины абсолютно надежны. Положим $N = |V|$, $M = |E|$.

Элементарным событием будем называть частную реализацию графа, определяемую исправностью или отказом каждого ребра.

Вероятность элементарного события равна произведению вероятностей присутствия исправных ребер, умноженному на произведение вероятностей отсутствия отказавших ребер.

Произвольное событие (событие есть объединение некоторых элементарных событий) будем называть *успешным*, если в каждом элементарном событии, входящем в это событие, вершины могут быть связаны исправными ребрами.

Вероятность связности графа G, $R_K(G)$ есть вероятность того, что вершины связаны исправными ребрами, то есть вероятность события, состоящего из всех успешных событий и только из них.

2. Метод факторизации. Из способов расчета вероятности связности графа наиболее широко известен метод ветвления (факторизации, Мура-Шеннона [12]). Метод заключается в рекурсивном применении формулы полной вероятности при рассмотрении в качестве альтернативных гипотез наличия либо отсутствия очередного разрешающего ребра. Соответствующая формула имеет вид:

$$R(G) = p_{xy}R(G^*(x,y)) + (1 - p_{xy})R(G\backslash(x,y)), \tag{1}$$

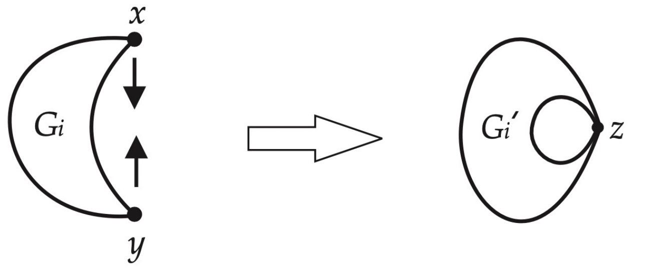

Рис. 1. Стягивание по вершинам x и y

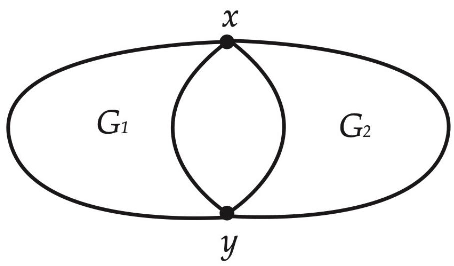

Рис. 2. Декомпозиция по 2-сечению $\{x, y\}$

где (x, y) — очередное разрешающее ребро, $G \backslash (x, y)$ — граф, получающийся из графа G удалением ребра (x, y), $G^*(x, y)$ — граф, получающийся из графа G стягиванием вершин x и y.

В методе ветвления рекурсии продолжаются до получения или графа с несвязными вершинами, или графа малой размерности [13].

3. Метод декомпозиции по 2-сечению. Естественной идеей ускорения вычислений является уменьшение размерности исходной задачи, которое может осуществляться за счет перехода от исходного графа G к группе графов меньшей размерности.

Эффективным методом, позволяющим сократить трудоемкость вычислений, является метод декомпозиции по сечениям. В данной работе будут затрагиваться 2-сечения. Пусть в графе G существует произвольное двухвершинное сечение $\{x, y\}$, которое разделяет граф G на два графа G_1 и G_2, которые будут являться подграфами исходного (рис. 2).

Отметим, что если существует ребро между вершинами сечения x и y, то оно может быть отнесено только к одному из получающихся при разбиении подграфов.

Аналогично предыдущим рассуждениям, через G_i^* обозначим граф, получающийся из графа G_i стягиванием вершин x и y (рис. 1), $i = 1, 2$. Тогда для расчета вероятности связности графа G с применением декомпозиции по двухвершинному сечению справедливо следующее равенство [9]:

$$R(G) = R(G_1)R(G_2^*) + R(G_1^*)R(G_2) - R(G_1)R(G_2). \tag{2}$$

Введем обозначения для множества вершин и множества ребер для G_1 — V_1 и E_1 соответственно; для G_2 — V_2 и E_2. С учетом экспоненциальной трудоемкости точного расчета, использование данного метода с двухвершинными сечениями способно привести к улучшению времени расчета на порядки.

4. Совместный расчет вероятностей связности в декомпозиционном подходе.

4.1. *Описание проблемы.* Для расчета вероятности связности графа G с двухвершинным сечением естественно использовать следующий алгоритм:

Можно заметить, что получающиеся при декомпозиции по 2-сечению графы G_i и G_i^* $(i = 1, 2)$ имеют схожие структуры строения (рис. 1). Отличие заключается лишь в том, что второй граф стянут по узлам сечения, однако полностью совпадает с первым по всем оставшимся вершинам и ребрам. Таким образом, появляется возможность считать вероятность связности этих графов совместно, тем самым сократив количество «одинаковых» вычислений, возникающих при рассмотрении совпадающих объектов, и, гипотетически, уменьшив количество запусков функции факторизации с четырех для четырех разных подграфов до двух для двух подграфов G_1 и G_2 по разные «стороны» от 2-сечения.

4.2. *Метод факторизации без обратного хода рекурсии.* Первой наработкой, связанной с идеей совместного расчета вероятностей надежности графов G_i и G_i^* $(i = 1, 2)$, стал мо-

Алгоритм **dec_factoring(G)**

1: Удаление отростков (прикрепленных деревьев) у исходного графа G;
2: Поиск 2-сечения $\{x, y\}$;
3: Декомпозиция графа G по сечению $\{x, y\}$ на два подграфа: G_1 и G_2;
4: Независимый расчет вероятностей связности четырех графов: $R(G_1)$, $R(G_1^*)$, $R(G_2)$, $R(G_2^*)$ методом факторизации с использованием способов редукций на каждом шаге;
5: Применение формулы (2) для вычисления вероятности связности исходного графа G с применением 2-сечения.

дифицированный алгоритм факторизации. Модификация заключалась, во-первых, в том, чтобы на каждом ходе рекурсии в качестве очередного разрешающего ребра не брать ребра, инцидентные узлам 2-сечения, а во-вторых, использовать каноничный метод ветвления только тогда, когда не остается допустимых для ветвления ребер. При этом предполагается, что для каждого получающегося графа на каждом шаге ветвления будет храниться вероятность его получения — произведение вероятностей предыдущих разрешающих ребер в ветвлении, по которым был достигнут текущий граф. На каждом шаге рекурсии производится последовательно-параллельное преобразование (ППП), чтобы сокращать размерность очередной рассматриваемой задачи. Стоит отметить, что для данного алгоритма необходимо было модифицировать функцию ППП с целью отслеживания узлов 2-сечения и наложения соответствующих ограничений.

Такой подход позволяет рассматривать сначала совпадающие элементы в графах G_i и G_i^* $(i = 1, 2)$ и только после того, как такие элементы заканчиваются, рассчитывать их вероятности связности отдельно.

Конечные формулы для расчета вероятностей связности $R(G_i)$ и $R(G_i^*)$ $(i = 1, 2)$ выглядят при достижении базы рекурсии на шаге k следующим образом (аналогично формулам вычисления кумулятивных оценок из [14]):

$$R(G_i) = R(G_i) + P(G_k)R(G_k),$$
$$R(G_i^*) = R(G_i^*) + P(G_k)R(G_k^*),$$

где $P(G_k)$ — «накопленная» для каждого шага рекурсии k вероятность получить граф G_k, а $R(G_k)$ — получающаяся методом факторизации вероятность связности графа G_k.

По итогам тестирования (см. п. 5) выяснилось, что данный алгоритм под названием `mod_Branch()` не оправдал ожидания и проиграл по эффективности алгоритму `def_factoring()` из предыдущего параграфа в некоторых тестах: это связано, в первую очередь, с тем, что модифицированная функция последовательно-параллельного преобразования показывала худшие результаты по сравнению с немодифицированной версией, что обуславливается ограничением на взятие некоторых элементов графа у новой версии. Однако, на оставшихся тестах алгоритм все же отработал весьма успешно.

4.3. *Улучшенный метод факторизации с декомпозицией.* Параллельно с методом факторизации без обратного хода рекурсии, в котором не рассматривались инцидентные узлам сечения ребра, была развита в какой-то степени обратная идея: в каноническом алгоритме факторизации на первом же шаге в качестве разрешающего ребра брать ребро между узлами двухвершинного сечения, если оно существует. Тогда это позволит сразу по одной ветке ветвления получить вероятность связности «стянутого» графа G_i^* $(i = 1, 2)$. Данная идея выражается в следующем алгоритме `simple_factoring()`:

Алгоритм **simple_factoring(G)**

Удаление отростков у исходного графа G;
Поиск 2-сечения $\{x, y\}$;
Декомпозиция графа G по сечению $\{x, y\}$ на два подграфа: G_1 и G_2;
Совместный расчет $R(G_1)$ и $R(G_1^*)$, $R(G_2)$ и $R(G_2^*)$ методом факторизации `Branching()` с редукцией на каждом шаге:

for $(i = 1; i <= 2; i + +)$ **do**
    procedure SIMPLE_FACTORING(Graph G_i)
        if существует ребро (x, y) **then**
            $R(G_i^*) = Branching(G_i^*);$
            $R(G_i) = p_{xy}R(G_i^*) + (1 - p_{xy})Branching(G_i \backslash (x, y));$
        else
            $R(G_i^*) = Branching(G_i^*);$
            $R(G_i) = Branching(G_i);$
        end if
    end procedure
end for

Применение формулы (2) для вычисления вероятности связности исходного графа G с применением 2-сечения.

Этот алгоритм хорошо показал себя в среднем (см. п. 5), однако у него можно выделить один недостаток. В случае, когда в рассматриваемом графе G или в получаемых подграфах G_i и G_i^* $(i = 1, 2)$ отсутствует ребро между узлами 2-сечения, то алгоритм работает так же, как и алгоритм `dec_factoring()`.

4.4. *Объединенный алгоритм.* Представим гибридный алгоритм (алгоритм `smart_factoring()`), вобравший в себя компоненты сразу двух методов, описанных в предыдущих параграфах. В нем, как и ранее, рассматривается два случая, возникающие при отсутствии или присутствии ребра между узлами 2-сечения.

Если на очередном шаге такое ребро присутствует в графе, то используется метод простой факторизации. В противном случае происходит ветвление из метода факторизации без обратного хода рекурсии до тех пор, пока вследствие последовательно-параллельного преобразования это ребро не появится или пока не достигнется база рекурсии.

Под базой рекурсии здесь, как уже упоминалось выше, может пониматься случай либо несвязного графа, либо графа, для которого вероятность связности считается непосредственным образом — например, подобное происходит для графов малой размерности.

При этом для данного алгоритма есть два важных замечания. Во-первых, для его корректной работы необходимо на каждом шаге рекурсии отслеживать узлы 2-сечения, вследствие чего эти узлы не рассматриваются при последовательно-параллельном преобразовании. В отличие от метода факторизации без обратного хода рекурсии [14], здесь не входят в ограничения для редукции инцидентные вершинам сечения ребра, а ставятся под запрет только непосредственно сами узлы сепаратора, что позволяет в какой-то степени ускорить процесс вычислений. Во-вторых, в случае, когда интересующее нас ребро отсутствует в графе, то на ближайшем шаге ветвления мы в приоритете берем ребра, инцидентные вершинам сечения, чтобы уже на следующем шаге получить это ребро в графе.

Представляемая идея может быть описана следующим алгоритмом:

Алгоритм **smart_factoring(G)**

Удаление отростков у исходного графа G;
Поиск 2-сечения $\{x, y\}$;
Декомпозиция графа G по сечению $\{x, y\}$ на два подграфа: G_1 и G_2;
Совместный расчет $R(G_1)$ и $R(G_1^*)$, $R(G_2)$ и $R(G_2^*)$ методом факторизации `Branching()` с редукцией на каждом шаге:

for $(i = 1; i <= 2; i++)$ **do**
    procedure SMART_FACTORING(Graph G)
        if достигнута база рекурсии **then**
            $R(G_i) = R(G_i) + P(G_k) \cdot R(G_k)$;
            $R(G_i^*) = R(G_i^*) + P(G_k) \cdot R(G_k^*)$;
        end if
        if существует ребро (x, y) **then**
            $R(G_i) = R(G_i) + P(G_k) \cdot simple\_factoring(G_k)$;
            $R(G_i^*) = R(G_i^*) + P(G_k) \cdot simple\_factoring(G_k)$;
        else
            выбор ребра e_k — в приоритете инцидентное узлам сечения
            $smart\_factoring(G_k^*)$; $P(G_{k+1}) = P(G_k) \cdot p_{e_k}$;
            $smart\_factoring(G_k \backslash \{e_k\})$; $P(G_{k+1}) = P(G_k) \cdot (1 - p_{e_k})$;
        end if
    end procedure
end for

Применение формулы (2) для вычисления вероятности связности исходного графа G с применением 2-сечения.

---

5. Тестовые результаты разработанных алгоритмов.

5.1. *Общие сведения.* Представляемые ниже тесты были проведены на персональном компьютере с процессором `Apple M1`, имеющем 8 ядер и 8 потоков с тактовой частотой 3.2 GHz, и оперативной памятью в размере 16 Gb. Все алгоритмы были реализованы на языке программирования `C++`.

В качестве входных данных были выбраны нетривиальные с точки зрения последовательно-параллельного преобразования топологии сетей, в которых присутствует явно выраженное двухвершинное сечение, разделяющее исходный граф, которым моделируется та или иная топология сети, на равные подграфы (за исключением ребра, находящегося между узлами сепаратора)

5.2. *Полные решетки* $2 \times N$.

Часто встречаемой в проектировании топологией с 2-сечением выступают протяженные решетки с двухвершинным «основанием». При отсутствии перекрестных ребер граф становится последовательно-параллельным и не требует декмпозиции при расчете.

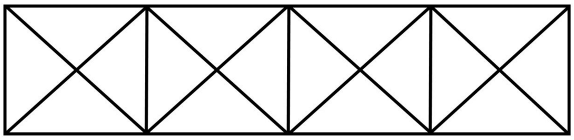

Рис. 3. Полная решетка 2×5

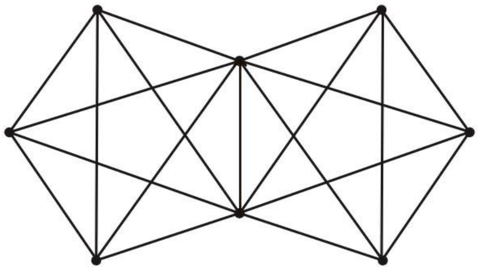

Рис. 4. Граф K_5^2

Таблица 1

Результаты расчета для решеток $2 \times N$

N	factoring	dec_fact	mod_fact	simple	smart	R(G)
20	1.7s	0.009s	0.006s	0.005s	0.005s	0.8207032
31	>3000s	0.2728s	0.2669s	0.2274s	0.2097s	0.7564367
45	>10000s	31.63s	29.06s	26.54s	24.21s	0.6818688

Таблица 2

Результаты расчета для K_N^2

N	factoring	dec_fact	mod_fact	simple	smart	R(G)
9	25s	0.017s	0.015s	0.014s	0.012s	0.9997862
11	>3000s	0.9s	0.98s	0.78s	0.75s	0.9999828
13	>10000s	85s	110.5s	78s	80s	0.9999987

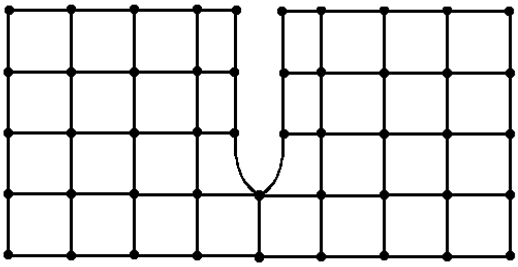

Рис. 5. Решетка $Grid_2 5 \times 9$

Результаты тестов приведены в табл. 1. Вероятность присутствия каждого ребра здесь полагается равной 0.75.

5.3. *Полные слитые графы* K_N^2. Удобным для тестирования представляется случай двух склеенных по узлам сепаратора полных графов на N вершинах [9]. Результаты тестов приведены в табл. 2. Вероятность присутствия каждого ребра здесь полагается равной 0.75.

5.4. *Объединенные решетки.* Некоторым обобщением примера из первого текста являются решетки $K \times N$ [14]. В качестве 2-сечения берется произвольная пара соседних вершин, по которой можно разбить исходный граф на два практически равных подграфа. Результаты тестов приведены в табл. 3. Вероятность присутствия каждого ребра здесь полагается равной 0.75.

Таблица 3

Результаты расчета для $Grid_2 N \times k$

G	factoring	dec_fact	mod_fact	simple	smart	R(G)
5 x 11	>10000s	1.24s	0.86s	0.86s	0.97s	0.2100771
6 x 11	>10000s	58s	41s	40s	49s	0.1883829
7 x 7	>10000s	0.237s	0.158s	0.17s	0.2s	0.2057585

5.5. *Выводы.* В данном пункте были экспериментально проверены и протестированы разработанные алгоритмы. На основании этих результатов можно выделить следующие факты.

Во-первых, важную роль в совместном расчете вероятностей связности, получающихся при декомпозиции графов, играет то, насколько весомые ограничение накладываются на последовательно-параллельные преобразования. Это можно заметить в параграфах 3.2 и 3.3, в которых усовершенствованный алгоритм `smart_factoring()` превосходил по результатам начальный алгоритм `mod_factoring()`. Исключением, как было показано по главе 3.4, являются графы, которые «хорошо сворачиваются» последовательно-параллельными преобразованиями, которые никак не задействуют приведенное сечение.

Во-вторых, при наличии узла между узлами сепаратора, алгоритм `simple_factoring()` стабильно показывал результаты лучше, чем начальный алгоритм с раздельным подсчетом всех вероятностей связности. При этом в случае, когда такое ребро отсутствует, он в точности повторяет начальный алгоритм.

В-третьих, объединенный алгоритм `smart_factoring()` также показывал лучшие результаты, нежели начальный алгоритм `dec_factoring()`, однако в среднем проигрывал по эффективности улучшенному методу факторизации с декомпозицией. Как уже упоминалось выше, это связано с наложением ограничений на последовательно-параллельные преобразования, которые полностью игнорируются в методе `simple_factoring()`.

Заключение. В работе предложены новые способы повышения эффективности разработанных ранее методов расчета вероятности связности множества вершин случайного неориентированного графа с абсолютно надежными вершинами и ненадежными ребрами, основанных на декомпозиционном подходе. В частности, была развита идея совместного расчета методом факторизации вероятностей связности подграфов, получающихся при декомпозиции по 2-сечению исходного случайного графа, которая возникла из наблюдений об их структурной схожести. В итоге было разработано и протестировано три новых алгоритма. Согласно проведенным экспериментам, два из трех алгоритмов совместного расчета показывают на всех тестах лучшие вычислительные и временные результаты, нежели имеющийся на текущий момент метод независимого расчета, что может свидетельствовать о целесообразности их применения и последующего развития.

Дальнейшие исследования по рассматриваемой теме могут быть связаны с проведением более обширных тестирований, дополнительными модификациями и оптимизациями предложенных алгоритмов, основанных на изучении стратегий факторизации, обобщением результатов для варианта 3-сечений и более общих случаев, а также с расчетом иных показателей надежности сетей, в том числе с расчетом вероятности связности некоторого подмножества вершин графа.

Список литературы

1. Colbourn Ch. J. The combinatorics of network reliability. N. Y: Oxford Univ. press. 1987. P. 160.
2. Hebert Perez-Roses. Sixty Years of Network Reliability // Mathematics in Computer Science. 2018. V. 12. P. 275–293.
3. Yeh W. C. Novel Binary-Addition Tree Algorithm (BAT) for Binary-State Network Reliability Problem // Reliability Engineering and System Safety. 2020. 208: 107448.
4. Valiant L. The complexity of enumeration and reliability problems. // SIAM Journal on Computing. 1979. V. 8. N 3. P. 410–421.
5. Page L. B., Perry J. E. A Practical Implementation of the Factoring Theorem for Network Reliability // IEEE transactions on reliability. 1988. V. 37, N 3. P. 259–267.
6. Rodionova O. K., Rodionov A. S., Choo H. Network Probabilistic Connectivity: Exact Calculation with Use of Chains // ICCSA–2004, Springer Lecture Notes in Computer Sciences. 2004. Vol. 3046. P. 315–324.
7. Мигов Д. А., Нестеров С. Н., Родионов А. С. Методы ускорения расчета надежности сетей с ограничением на диаметр // Вестник СибГУТИ. № 1, 2014, С. 49–56.
8. Wood R. K. Triconnected decomposition for computing K-terminal network reliability // Networks. 1989. V. 19. P. 203–220.
9. Migov D. A., Rodionova O.K., Rodionov A.S., Choo H. Network Probabilistic Connectivity: Using Node Cuts // EUC Workshops, Springer Lecture Notes in Computer Sciences. 2006. V. 4097. P. 702–709.
10. Burgos J. M., Amoza F. R. Factorization of network reliability with perfect nodes I: Introduction and statements // Discrete Applied Mathematics. 2016. V. 198. P. 82–90.
11. Д. Мигов. Декомпозиция сети по сечениям при расчете ее надежности // Прикладная дискретная математика. 2020. № .47. С. 62–86.
12. Мур Э., Шеннон К. Надежные схемы из ненадежных реле // Кибернетически сб. М.: Иностр. лит. 1960. Вып. 1. С. 109–148.
13. Мигов Д. А. Формулы для быстрого расчета вероятности связности подмножества вершин в графах небольшой размерности // Проблемы информатики. № 6, 2010, С. 10–17.
14. Rodionov A., Migov D. Obtaining and Using Cumulative Bounds of Network Reliability // Chapter no 5 in: System Reliability. Edt. by Constantin Volosencu. ISBN 978-953-51-3705-4. Publisher: InTech. Rijeka, Croatia. 2017. P. 93–112.

Коробов Александр Викторович — бакалавр ММФ НГУ, магистрант первого курса ММФ НГУ, студент Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; e-mail: `a.korobov1@g.nsu.ru`.

Коробов Александр окончил в 2023-м году механико–математический факультет Новосибирского государственного университета по направлению «Математика и компьютерные науки» (02.03.01, бакалавриат), защитив выпускную квалификационную работу на тему «Разработка методов расчета надежности сети на основе декомпозиционного подхода». В настоящее время является студентом магистратуры механико–математического факультета Новосибирского государственного университета по направлению «Математика и механика» (01.04.00, магистратура). Проходит специализацию в Институте вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук. Является лауреатом третьей степени 61-й Международной научной студенческой конференции (МНСК–23, Новосибирск) с работой на тему «Декомпозиционный подход в расчете надежности сети», 2023 год. Область его научных интересов включает в себя теорию графов, методы анализа надежности сетей.

Korobov Alexander Viktorovich — Bachelor of NSU, master's student of NSU, e-mail: a.korobov1@g.nsu.ru.

Korobov Alexander graduated in 2023 from the Department of Mechanics and Mathematics of Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russia) in the direction of "Mathematics and Computer Science" (02.03.01, bachelor's degree). Currently, he is a master's student of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Novosibirsk State University in the direction of "Mathematics and Mechanics" (01.04.00, Master's degree). He is specializing at the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. He is a laureate of the third degree of the 61st International Scientific Student Conference, 2023. His research interests include graph theory, network reliability analysis methods.

Мигов Денис Александрович — канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; e-mail: mdinka@rav.sscc.ru.

Денис Мигов окончил в 2003 году Механико-математический факультет Новосибирского государственного университета, получив квалификацию «Математик, системный программист» по специальности «Прикладная математика и информатика». В 2008 году защитил диссертацию «Расчет вероятности связности случайного графа с применением сечений» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в диссертационном совете при Институте вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук. В настоящее время является старшим научным сотрудником лаборатории Системного моделирования и оптимизации указанного института. Денис Мигов является дважды лауреатом Именной премии правительства Новосибирской области в 2011 г. и в 2015 г., также неоднократно становился призером различных конференций. Область его научных интересов включает в себя теорию графов, методы анализа надежности сетей, структурную оптимизацию сетей, беспроводные сенсорные сети и параллельные алгоритмы на графах и сетях.

Denis Migov — Senior researcher of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS; 630090, Novosibirsk; mdinka@rav.sscc.ru.

Denis Migov received the diploma of mathematician and programmer in applied mathematics and informatics from the Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia, in 2003. In 2008, he received Ph.D. (Candidate of science) degree in the field of Mathematical modeling, numerical methods, and program complexes from the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. He is a senior research fellow at the Laboratory of System modeling and optimization of the named institute. Denis Migov is twice a laureate of the Name Prize of the Government of the Novosibirsk Region in 2011 and in 2015; he also repeatedly became a prize-winner of various conferences. His scientific interests are in graph theory, network reliability analysis, network topology optimization, spares matrix reordering, wireless sensor networks, and parallel algorithms on graphs and networks.

Дата поступления — 3.11.2023