

HIERARCHY OF EQUIVALENCES ON TIME PETRI NETS WITH WEAK TIME POLICY

A. Y. Zubarev

A. P. Ershov Institute of Informatics Systems,
630090, Novosibirsk, Russia

DOI: 10.24412/2073-0667-2024-1-5-40

EDN: UMPUBR

The security of many information systems is critically important, since their failure can lead to large economic losses and human casualties. Equivalences allow comparing systems and specifications in terms of different aspects of their behavior. In this way, they are used to verify and reduce systems. Models of concurrent and distributed systems are compared in the dichotomies of “*linear time – branching time*” and “*interleaving – partial order*” in the literature. The first criterion of comparison is a degree of conflict accounting (a moment of choosing between several “branches” of computing). The semantics of linear time ignores the points of choice, and the behavior is described by the set of all executions (processes). *Trace equivalence* is a typical example of such equivalence. On the contrary, branching time semantics takes into account the branching structure of the system’s behaviors. The second criterion of comparison is the degree of partial order accounting. Interleaving semantics ignores partial order. The concurrency is reduced to a nondeterministic choice between executions of linearly ordered actions. On the other hand, “true concurrency” models preserve causality and concurrency between actions.

Petri nets (PN) are one of the generally accepted tools for modeling and analyzing concurrent and distributed systems. The (PN) consists of two different sets of elements – *transitions* (system events) and *places* (conditions for events). This model is represented as an oriented bipartite graph. A state of the PN is a *marking* (a set of places with *tokens*). All conditions for an event are met if there is a token in each input place of the corresponding transition. This transition is called *enabled* and can fire, i. e. change the marking. The new marking is obtained as a result of removing tokens from the input places and creating new tokens in the output transition places. It is often necessary to take into account time or quantitative characteristics when verifying systems. Various time extensions of Petri nets have been defined for these purposes. *Time Petri Nets (TPNs)* are model where each transition has its own clock and time interval. A *state* of the model is defined by the marking and the clock readings of enabled transitions. A transition *can fire* if it is enabled in the marking and its clock readings are in its interval. Firing the transition changes the marking, disables the clock for not enabled transitions, and initializes (resets) a clock for some enabled transitions.

There is an *intermediate*, *atomic* and *persistent atomic* clock reset policy. Intermediate policy takes into account the marking before the creation of new tokens and after the removal of old tokens (intermediate marking). A transition clock will be disabled if the transition was not enabled in the intermediate marking. If a transition became enabled after the creation of new tokens, then its clock will take a zero value. The atomic policy does not consider intermediate states. Resetting clock will only happen if the transition is disabled in the new marking. The transition clock that is fired is always reset in the case of an intermediate and atomic policy (unlike persistent atomic). It is shown in [1] and [2] that the persistent atomic policy is strictly more expressive than the atomic one. The

atomic policy is not less expressive than the intermediate one. In addition, the authors give examples of models of systems where the atomic policy is more preferable.

Time elapsing increases the readings of the local clock of enabled transitions. *Strong* and *weak time policies* are presented in the literature. The strong policy restricts time elapsing. The value of a transition clock cannot go beyond the upper limit of the time interval. The transition must either fire or become disabled. In the weak policy, there are no restrictions on time elapsing. As it was shown in [3], strong and weak policies of time elapsing are incomparable in expressiveness.

Definition and analysis of equivalence relations in the “linear time — branching time” and “interleaving — partial order” spectra is one of the important tasks for models of concurrency and distributed systems. In [4], a hierarchy of equivalences for time-free Petri nets is presented. In [5], the authors developed and investigated the *simple bisimulation* and *forward-backward equivalences* for the TPNs with the strong time policy and intermediate clock reset strategy. In [6], the semantic models in the “interleaving — partial order” spectrum were defined in terms of weak TPNs. In [7], trace and simple bisimulation equivalences were developed for the TPNs with an intermediate clock reset policy. As far as we know, there are no equivalences in the literature for TPNs with a weak time policy and with a persistent atomic method of resetting the clock. The purpose of this work is to define and study the relationships of trace, simple bisimulation, forward-backward bisimulation and *history-preserving bisimulation* equivalences for weak TPNs with a persistent atomic clock reset policy.

Key words: time Petri nets, weak time policy, persistent atomic clock reset policy, behavioral equivalences, interleaving semantics, partial order semantics, time processes, trace and bisimulation equivalences, forward-backward bisimulation, history-preserving bisimulation.

References

1. Bérard B., Cassez F., Haddad S., Lime D., Roux O.H. Comparison of different semantics for time Petri nets // International Symposium on Automated Technology for Verification and Analysis. 2005. P. 293–307.
2. Reynier P.A., Sangnier A. Weak time Petri nets strike back! // International Conference on Concurrency Theory. 2009. P. 557–571.
3. Boyer M., Roux O.H. Comparison of the expressiveness of arc, place and transition time Petri nets // International Conference on Application and Theory of Petri Nets. 2007. P. 63–82.
4. Tarasyuk, I. V. Equivalences for behavioral analysis of concurrent and distributed computing systems // Academic Publishing House Geo, 2007.
5. Virbitskaite I., Bushin D., Best E. True concurrent equivalences in time Petri nets // Fundamenta Informaticae, 149(4), 2016. P. 401–418
6. Virbitskaite I. B., Zubarev A. Y. “True concurrency” semantics for time Petri nets with weak time and persistent atomic policies // Programming and Computer Software, 2021. N 47(5). P. 389–401
7. Zubarev A. Y. Comparison of trace and bisimulation equivalences on time Petri nets with weak time policy // Problems of Informatics, 2022. N 57(4). P. 5–27.

ИЕРАРХИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНО-ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ СО СЛАБОЙ ВРЕМЕННОЙ СТРАТЕГИЕЙ

А. Ю. Зубарев

Институт систем информатики им. А.П. Ершова,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.7

DOI: 10.24412/2073-0667-2024-1-5-40

EDN: UMPUBR

Непрерывно-временные сети Петри (НВСП) — временное расширение сетей Петри, где каждому переходу ставятся в соответствие временной интервал его срабатывания и локальные часы. Данная модель рассматривается со слабой временной стратегией (ход времени не форсирует срабатывания переходов) и устойчиво атомарной стратегией сброса часов (срабатывание перехода рассматривается как единое событие). Для НВСП разрабатываются и исследуются эквивалентности в спектрах «линейное — ветвящееся время» и «интерливинг — частичный порядок». Первый спектр представлен языковыми эквивалентностями (поведение системы определяется множеством ее процессов), бисимуляционными эквивалентностями (учитываются точки выбора альтернативных действий системы): обычными, прямыми-обратными, с сохранением и слабым сохранением истории. Второй спектр определен семантиками интерливинга (процесс — последовательность действий), частичного порядка (процесс — частично-упорядоченное множество действий) и процессно-сетевой семантикой (процесс — ациклическая бесконфликтная сеть). Анализируются взаимосвязи между данными эквивалентностями, строится их иерархия.

Ключевые слова: непрерывно-временные сети Петри, слабая временная стратегия, устойчиво атомарная стратегия сброса часов, поведенческие эквивалентности, семантика интерливинга, семантика частичного порядка, процессно-сетевая семантика, языковая и бисимуляционная эквивалентности, бисимуляционная эквивалентность с сохранением истории, прямая обратная бисимуляционная эквивалентность.

Введение. Безопасность многих информационных систем является критически важной, так как их отказ может повлечь большие экономические потери и в некоторых случаях привести к угрозе жизни. Эквивалентности позволяют сравнивать системы и их спецификации относительно разных аспектов функционирования, что используется для их верификации и упрощения. В литературе модели параллельных и распределенных систем принято сравнивать в дихотомиях «линейное — ветвящееся время» и «интерливинг — частичный порядок». Первым критерием сравнения является степень учета конфликта — момента, когда возникает выбор между несколькими «ветвями» вычислений. Семантика линейного времени полностью пренебрегает точками такого выбора. Поведение здесь определяется множеством выполнений (процессов). Типичным примером соответствующих эквивалентностей являются *языковые эквивалентности*, которые сводятся к равенству *языков* (множества возможных выполнений) двух моделей. Семантика ветвистого

времени, напротив, фиксирует все точки недетерминированного выбора. Примером эквивалентности в данной семантике является *бисимуляционная эквивалентность*, которая определяется существованием отношения (бисимуляции), связывающего состояния двух моделей.

Вторым критерием сравнения является степень учета частичного порядка. *Интерливинговая семантика* игнорирует частичный порядок. Параллельное выполнение нескольких действий сводится к недетерминированному выбору между их последовательными выполнениями. С другой стороны, модели, основанные на частичном порядке, сохраняют причинно-следственную зависимость и параллелизм между действиями. Между границами спектра эквивалентностей «интерливинг — частичный порядок» находится *шаговая эквивалентность*, где параллельное выполнение действий моделируется выполнением одного шага.

Сети Петри являются одним из общепринятых инструментов для моделирования и анализа параллельных и распределенных систем. Данная модель изображается в виде ориентированного двудольного графа, который иллюстрирует причинно-следственные связи, параллелизм и конфликт между компонентами системы. События системы представлены *переходами* (прямоугольники или барьеры), а для определения входных и выходных условий событий используются *места* (окружности). Состояние сети Петри определяется *разметкой* — множеством мест с *фишками* (жирными точками). Считается, что все условия для события выполнены, если в каждом входном месте соответствующего перехода есть фишка. Данный переход называется *допустимым* и может сработать, т. е. изменить разметку. Новая разметка получается в результате удаления фишек из входных мест и создания новых фишек в выходных местах перехода.

Часто при верификации систем следует учитывать реально-временные или количественные характеристики. Для этих целей были определены разнообразные временные расширения сетей Петри. Одной из таких моделей являются *непрерывно-временные сети Петри* (НВСП), в которых каждый переход имеет собственные часы и временной интервал срабатывания. Состояние данной модели определяется разметкой и показаниями часов допустимых переходов. Переход может сработать в состоянии, если он допустимый в соответствующей разметке и показания его часов лежат в связанном с ним интервале. Само срабатывание перехода не занимает времени, поэтому в качестве изменения состояния рассматривают либо срабатывание перехода, либо ход времени.

Срабатывание перехода меняет разметку, отключает часы у недопустимых переходов и инициализирует, т. е. сбрасывает часы у некоторых допустимых переходов. Существуют *промежуточная, атомарная и устойчиво атомарная стратегии сброса часов*. Промежуточная стратегия учитывает разметку до создания новых и после удаления старых фишек (промежуточную разметку). Часы перехода таким образом будут отключены, если он был недопустимым в промежуточной разметке. Если после создания новых фишек такой переход стал допустимым, то часы примут нулевое значение. Атомарные стратегии не рассматривают промежуточных состояний, и таким образом отключение часов и их сброс произойдет только в том случае, если переход будет недопустимым в новой разметке. В случае промежуточной и атомарной стратегии, в отличие от устойчиво атомарной, часы перехода, который срабатывает, всегда сбрасываются. В работах [1] и [2] показано, что устойчиво атомарная стратегия является строго более выразительной, чем атомарная, которая, в свою очередь, не менее выразительна, чем промежуточная. Кроме того, авторы приводят системы, где использование атомарных стратегий для моделиро-

вания предпочтительнее. Например, стандартная в контексте безвременных сетей Петри модель наблюдателя — проверка с помощью цикла наличия фишки (выполнения условия) у наблюдаемого компонента. При использовании промежуточной стратегии срабатывание перехода-наблюдателя сбросит часы некоторых переходов в наблюдаемом компоненте, тогда как в атомарных стратегиях наблюдатель не будет влиять на поведение наблюдаемого компонента.

Ход времени увеличивает показания локальных часов допустимых переходов на указанное значение. В литературе представлены *сильная* и *слабая временные стратегии*. Сильная стратегия ограничивает ход времени таким образом, что значение часов перехода не может перейти за верхнюю границу временного интервала — переход обязан либо сработать, либо перестать быть допустимым в результате срабатывания другого перехода. В слабой стратегии, напротив, нет ограничений на ход времени. Как было показано в [3], сильная и слабая стратегии хода времени являются несравнимыми по выразительности.

Определение и анализ взаимосвязей эквивалентностей в спектрах «линейное — ветвящееся время» и «интерливинг — частичный порядок» является одной из важных задач для моделей параллельных и распределенных систем. В работе [4] представлена иерархия данных эквивалентностей для безвременных сетей Петри. В [5] авторами были разработаны и исследованы обычные бисимуляционные и прямые-обратные эквивалентности для НВСП с сильной временной стратегией и промежуточной стратегией сброса часов. В работе [6] были определены основные семантические модели в спектре «интерливинг — частичный порядок» в терминах слабых НВСП. Основываясь на данных моделях, в [7] были разработаны языковые и обычные бисимуляционные эквивалентности для НВСП с промежуточной стратегией сброса часов. Насколько нам известно, в литературе не представлены эквивалентности для НВСП со слабой временной стратегией и с устойчиво атомарным способом сброса часов. Целью данной работы является определение и исследование взаимосвязей языковых, обычных бисимуляционных, прямых-обратных бисимуляционных и сохраняющих историю бисимуляционных эквивалентностей для слабых НВСП с устойчиво атомарной стратегией сброса часов.

Статья состоит из следующих разделов. В разделе 1 представлены определения сети Петри и ее временного расширения. Раздел 2 рассматривает временные процессы как истинно параллельную семантику НВСП. На основе данной модели в разделе 3 определяются эквивалентности в двух спектрах «линейное — ветвящееся время» и «интерливинг — частичный порядок», строится их иерархия. Раздел 4 завершает статью, приводя результаты и планы по дальнейшей работе.

1. Непрерывно-временные сети Петри. В данном разделе рассматривается определение модели сети Петри с временными интервалами, представляющими временные задержки срабатываний переходов.

Сначала напомним синтаксис и семантику «безвременных» сетей Петри. Сеть Петри (СП) состоит из двух разных множеств элементов — мест и переходов; отношения инцидентности между данными элементами; начальной разметки — распределения фишек по местам сети; функции, помечающей каждый переход некоторым действием из алфавита Act .

Определение 1. (Помеченная над Act) сеть Петри (СП) — это набор $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$, где P — конечное множество мест и T — конечное множество переходов такие, что $P \cap T = \emptyset$; $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — отношение инцидентности; $\emptyset \neq M_0 \subseteq P$

— начальная разметка; $L : T \rightarrow Act$ — помечающая функция. Для элемента $x \in P \cup T$ определим множество $\bullet x = \{y \mid (y, x) \in F\}$ входных и множество $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$ выходных элементов, которые для подмножества элементов $X \subseteq P \cup T$ обобщаются соответственно до множеств $\bullet X = \bigcup_{x \in X} \bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$.

Разметка M СП \mathcal{N} — это любое подмножество множества P . Переход $t \in T$, допустимый в разметке M , если $\bullet t \subseteq M$. Обозначим через $En(M)$ множество всех переходов, допустимых в разметке M . Срабатывание перехода, допустимого в разметке M , приводит к новой разметке $M' = (M \setminus \bullet t) \cup t^\bullet$. В таком случае будем писать $M \xrightarrow{t} M'$. Разметка M является достижимой в \mathcal{N} , если существует последовательность переходов $t_1 \dots t_n$ такая, что $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \dots M_{n-1} \xrightarrow{t_n} M_n = M$ ($n \geq 0$). СП \mathcal{N} называется бесконтактной, если для любой достижимой разметки M и любого перехода t , допустимого в M , верно, что $(M \setminus \bullet t) \cap t^\bullet = \emptyset$.

В работе рассматриваются безопасные сети Петри, т. е. при функционировании сети каждое ее место имеет не более одной фишки. Это достигается за счет определенного ранее свойства бесконтактности и позволяет рассматривать в качестве разметок множества вместо мультимножеств. Заметим, что безопасные сети Петри используются только с целью упростить изложение материала. Полученные результаты могут быть расширены на ограниченные сети Петри.

Непрерывно-временная сеть Петри (НВСП) состоит из базовой сети Петри и статической временной функции, отображающей каждый переход во временной интервал с неотрицательными рациональными границами. Подразумевается, что у каждого перехода есть собственные часы, которые отсчитывают время, прошедшее с момента, когда переход стал допустимым.

Пусть $Interv = \{[a, b], [a, b) \mid a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, b \in (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}), a \leq b\}$ — множество интервалов с границами из $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Определение 2. (Помеченная над Act) непрерывно-временная сеть Петри (НВСП) — это пара $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$, где $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$ — базовая (помеченная над Act) сеть Петри и $D : T \rightarrow Interv$ — статическая временная функция, сопоставляющая каждому переходу из T временной интервал из $Interv$.

Состояние НВСП \mathcal{TN} — это пара $S = (M, I)$, где M — разметка и $I : En(M) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ — динамическая временная функция. Начальное состояние \mathcal{TN} — это пара $S_0 = (M_0, I_0)$, где M_0 — начальная разметка и $I_0(t) = 0$ для всех $t \in En(M_0)$. Переход $t \in En(M)$ может сработать в состоянии, если $I(t) \in D(t)$. Обозначим через $Fi(S)$ множество всех переходов из $En(M)$, которые могут сработать в состоянии $S = (M, I)$. Для НВСП возможны два способа изменения состояния $S = (M, I)$: ход времени и действие в результате срабатывания перехода.

- Ход времени $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ приводит к новому состоянию $S' = (M', I')$ (обозначается $S \xrightarrow{\tau} S'$), где $M' = M$ и $I'(t) = I(t) + \tau$ для всех $t \in En(M')$.
- Срабатывание перехода $t \in Fi(S)$ (действие $L(t)$) приводит к новому состоянию $S' = (M', I')$ (обозначается $S \xrightarrow{t} S'$ или $S \xrightarrow{L(t)} S'$) такому, что:
 - $M' = (M \setminus \bullet t) \cup t^\bullet$;
 - $\forall t' \in En(M') : I'(t') = \begin{cases} 0, & \text{если } t' \notin En(M) \wedge t' \in En(M'); \\ I(t'), & \text{иначе.} \end{cases}$

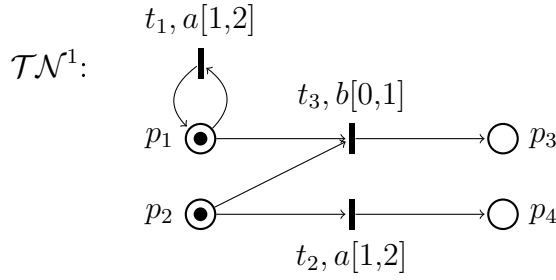


Рис. 1. НВСП \mathcal{TN}^1

Будем писать $S \xrightarrow{\sigma} S'$, если $\sigma = x_1 \dots x_m \in (T \cup \mathbb{R}_{\geq 0})^m$ и $S = S^0 \xrightarrow{x_1} S^1 \dots S^{m-1} \xrightarrow{x_m} S^m = S'$ ($m \geq 0$). В этом случае σ — пробег \mathcal{TN} из состояния S (в состояние S'). Для НВСП \mathcal{TN} обозначим через $\mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$ множество всех пробегов НВСП \mathcal{TN} из состояния S следующего вида: $\sigma = \theta_0 t_1 \theta_1 \dots t_n \theta_n$, где $\theta_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($0 \leq i \leq n$) и $t_j \in T$ ($1 \leq j \leq n$), т. е. ход времени и срабатывания переходов чередуются. Любой пробег НВСП \mathcal{TN} может быть преобразован к пробегу из $\mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$ с сохранением последовательности срабатываний переходов, благодаря следующим свойствам хода времени:

- $S' \xrightarrow{0} S'$;
- если $S' \xrightarrow{\theta} S''$ и $S'' \xrightarrow{\theta'} S'''$ ($\theta, \theta' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$), тогда $S' \xrightarrow{\theta+\theta'} S'''$;

которые выполняются для произвольных состояний S', S'', S''' . Для $\sigma = \theta_0 t_1 \theta_1 \dots t_n \theta_n \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$ ($n \geq 0$) обозначим $L(\sigma) = \theta_0 L(t_1) \theta_1 \dots L(t_n) \theta_n$.

Пусть $\mathcal{RUN}(\mathcal{TN}) = \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S_0)$. Состояние S' будем называть *достижимым* в \mathcal{TN} (обозначается $S' \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$), если оно присутствует в некотором пробеге из $\mathcal{RUN}(\mathcal{TN})$.

НВСП \mathcal{TN} называется *бесконтактной*, если базовая сеть является бесконтактной. Кроме того, НВСП является *T-закрытой*, если $\bullet t \neq \emptyset$ и $t^\bullet \neq \emptyset$ для всех переходов сети. В дальнейшем будем рассматривать только бесконтактные и T-закрытые НВСП.

Пример 1. Рассмотрим НВСП \mathcal{TN}^1 , представленную на рис. 1. На графике места сети изображены окружностями, переходы изображены барьерами, отношение инцидентности представлено направленными дугами. Рядом с элементами сети указаны их имена. Каждому переходу ставятся в соответствие временной интервал из *Interv* и действие из *Act* = $\{a, b\}$. Начальной разметке соответствует множество мест с фишками (жирными точками). Покажем, что последовательность $\sigma = 2 t_1 0 t_2 3$ является пробегом из $\mathcal{RUN}(\mathcal{TN}^1)$.

- Изначально сеть находится в состоянии $S_0 = (M_0, I_0)$, где $M_0 = \{p_1, p_2\}$ — начальная разметка, $En(M_0) = \{t_1, t_2, t_3\}$ — множество допустимых переходов в данной разметке и $I(t) = 0$ для каждого перехода t из $En(M_0)$. Ход времени размером 2 сменит состояние S_0 на \tilde{S}_0 ($S_0 \xrightarrow{2} \tilde{S}_0$), в котором сохранится разметка, а часы допустимых переходов увеличатся на две единицы, т. е. $\tilde{S}_0 = (\tilde{M}_0, \tilde{I}_0) = (M_0, \tilde{I}_0)$, где $\tilde{I}_0(t) = 2$ для каждого $t \in En(\tilde{M}_0) = \{t_1, t_2, t_3\}$. Заметим, что такой ход времени был бы невозможен в случае сильной стратегии, поскольку значение времени на часах перехода t_3 ($\tilde{I}_0(t_3) = 2$) превысило верхнюю границу его временного интервала ($D(t_3) = [0, 1]$).

- Поскольку $t_1 \in \text{En}(\widetilde{M}_0)$ (допустимый в разметке \widetilde{M}_0) и $\widetilde{I}_0(t_1) \in D(t_1)$, то t_1 может сработать в состоянии \widetilde{S}_0 . После срабатывания разметка не изменится ($M_1 = \widetilde{M}_0$). Кроме того, часы переходов не будут сброшены, поскольку они были допустимыми в разметке \widetilde{M}_0 . Значит, $I_1(t) = \widetilde{I}_0(t) = 2$ для $t \in \text{En}(M_1) = \{t_1, t_2, t_3\}$. Заметим, что в случае промежуточной стратегии сброса часов часы переходов t_1 и t_3 были бы сброшены. Нулевой ход времени не изменит состояние, т.е. $S_1 = (M_1, I_1) \xrightarrow{0} \widetilde{S}_1 = (\widetilde{M}_1, \widetilde{I}_1)$, $\widetilde{M}_1 = M_1$ и $\widetilde{I}_1(t) = I_1(t) = 1$ для $t \in \text{En}(\widetilde{M}_1) = \{t_1, t_2, t_3\}$.
- Допустимый переход $t_2 \in \text{En}(\widetilde{M}_1)$ может сработать из \widetilde{S}_1 , поскольку $\widetilde{I}_1(t_2) = 2 \in D(t_2) = [1, 2]$. Следовательно, $\widetilde{S}_1 \xrightarrow{t_2} S_2 = (M_2, I_2)$, где $M_2 = (\widetilde{M}_1 \setminus \bullet t_2) \cup t_2 \bullet = \{p_1, p_4\}$, $\text{En}(M_2) = \{t_1\}$ и $I_2(t_1) = 2$, так как t_1 был допустимым в разметке \widetilde{M}_1 . Наконец, $S_2 = (M_2, I_2) \xrightarrow{3} \widetilde{S}_2$, где $\widetilde{S}_2 = (M_2, \widetilde{I}_2)$, $\widetilde{I}_2(t_1) = I_2(t_1) + 3 = 5$.

Получили, $S_0 \xrightarrow{2} \widetilde{S}_0 \xrightarrow{t_1} S_1 \xrightarrow{0} \widetilde{S}_1 \xrightarrow{t_2} S_2 \xrightarrow{3} \widetilde{S}_2$, т.е. $\sigma = 2 \ t_1 \ 0 \ t_2 \ 3 \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}^1)$.

2. Временные процессы НВСП. Временной процесс, определяемый в данном разделе, является истинно-параллельной семантической моделью НВСП. В основе временных процессов лежат ациклическая сеть, временная функция и гомоморфизм в НВСП. Сначала определим причинно-следственную ациклическую сеть, которая образована из событий и условий, связанных отношениями причинной зависимости и параллелизма.

Определение 3. (Помеченная над Act) причинно-следственная сеть (ПСС) — это набор $N = (B, E, G, l)$, где B — конечное множество условий и E — конечное множество событий такие, что $B \cap E = \emptyset$; $G \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ — отношение инцидентности такое, что $|b \bullet| \leq 1$ и $|\bullet b| \leq 1$ для всех $b \in B$ и $E = \bullet B = B \bullet$; $l : E \rightarrow \text{Act}$ — помечающая функция.

Для ПСС $N = (B, E, G, l)$ введем дополнительные понятия и обозначения.

- $x \prec x' \iff x G^+ x'$ и $x \preceq x' \iff x G^* x'$, где $x, x' \in B \cup E$ (отношение причины).
- $x \smile x' \iff \neg(x \preceq x') \wedge \neg(x' \preceq x)$, где $x, x' \in B \cup E$ (отношение параллелизма).
- Непустое подмножество $B' \subseteq B$ называется \smile -множеством в N , если $b \smile b'$ для всех $b \neq b' \in B'$.
- Максимальное по включению \smile -множество называется сечением в N . Обозначим через $\mathcal{CUT}(N)$ множество всех сечений в ПСС N .
- $\bullet N = \{b \in B \mid \bullet b = \emptyset\}$, $N \bullet = \{b \in B \mid b \bullet = \emptyset\}$ (начальное и конечное сечение соответственно);

Для $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$ определим:

- $C \xrightarrow{e} C'$, если существует $e \in E$ такое, что $\bullet e \subseteq C$ и $C' = (C \setminus \bullet e) \cup e \bullet$;
- $C \prec C' \iff C \xrightarrow{e^+} C'$ и $C \preceq C' \iff C \xrightarrow{e^*} C'$ (отношение причины на сечениях);
- $C \smile C' \iff \neg(C \preceq C') \wedge \neg(C' \preceq C)$ (отношение параллелизма на сечениях);
- $\downarrow C = \{e \in E \mid e \preceq (e' \in \bullet C)\}$ (множество событий, предшествующих сечению C).

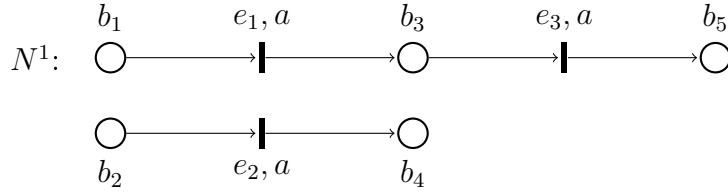


Рис. 2. ПСС N^1

Неформально говоря, сечение — это «разметка» ПСС N , которая достигается после того, как предшествующие сечению события произошли. Как следствие, $C \preceq C' \iff \downarrow C \subseteq \downarrow C'$. Для сечений $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$ таких, что $C \preceq C'$, определим *подсеть* $N_{C \rightsquigarrow C'} = (B', E', G', l')$ ПСС N , заключенную между данными сечениями следующим образом: $B' = \bigcup_{C \preceq \hat{C} \preceq C'} \hat{C}$; $E' = \downarrow C' \setminus \downarrow C$; $G' = G \cap ((B' \times E') \cup (E' \times B'))$; $l' = l|_{E'}$. Легко проверить, что полученная конструкция также является причинно-следственной сетью.

Пример 2. Рассмотрим сеть $N^1 = (B, E, G, l)$, где $B = \{b_1, \dots, b_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $G = \{(b_1, e_1), (b_2, e_2), (e_1, b_3), (e_2, b_4), (b_3, e_3), (e_3, b_5)\}$, $l(e_1) = l(e_2) = l(e_3) = a$, изображенную на рис. 2. Видно, что $|\bullet b| \leq 1$ и $|b \bullet| \leq 1$ для всех $b \in B$; $E = \bullet B = B \bullet$. Значит, N^1 — ПСС. Поскольку $b_1 \smile b_2$, и не существует $b \in B$ такого, что $b \smile b_1$ и $b \smile b_2$ одновременно, то $\{b_1, b_2\}$ — сечение. Аналогично можно показать, что $\{b_1, b_4\}$, $\{b_2, b_3\}$, $\{b_3, b_4\}$, $\{b_2, b_5\}$, $\{b_4, b_5\}$ также являются сечениями. Из $\bullet e_1 \subseteq \{b_1, b_2\}$, $(\{b_1, b_2\} \setminus \bullet e_1) \cup e_1 \bullet = \{b_2, b_3\}$ следует, что $\{b_1, b_2\} \xrightarrow{e_1} \{b_2, b_3\}$ и $\{b_1, b_2\} \preceq \{b_2, b_3\}$. С другой стороны, $\{b_1, b_4\} \smile \{b_2, b_3\}$, так как $\neg(\{b_1, b_4\} \preceq \{b_2, b_3\})$ и $\neg(\{b_2, b_3\} \preceq \{b_1, b_4\})$.

Для определения связи между причинно-следственной сетью и сетью Петри используется гомоморфизм, сохраняющий отношение инцидентности.

Определение 4. Пусть $N = (B, E, G, l)$ — ПСС, $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$ — СП и M — достижимая разметка в \mathcal{N} . Гомоморфизмом из N в \mathcal{N} относительно M называется отображение $\varphi : (B \cup E) \rightarrow (P \cup T)$ такое, что верно:

- $\varphi(B) \subseteq P$ и $\varphi(E) \subseteq T$;
- сужение φ на подмножество $\bullet e$ — биекция между $\bullet e$ и $\bullet \varphi(e)$ для всех $e \in E$;
- сужение φ на подмножество $e \bullet$ — биекция между $e \bullet$ и $\varphi(e) \bullet$ для всех $e \in E$;
- сужение φ на подмножество $\bullet N$ — биекция между $\bullet N$ и M ;
- $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$.

Пример 3. Рассмотрим базовую сеть Петри $\mathcal{N}^1 = (P, T, F, M_0, L)$ НВСП \mathcal{TN}^1 из примера 1, причинно-следственную сеть $N^1 = (B, E, G, l)$ из примера 2 и функцию $\varphi : (B \cup E) \rightarrow (P \cup T)$ такую, что $\varphi(b_1) = \varphi(b_3) = \varphi(b_5) = p_1$, $\varphi(b_2) = p_2$, $\varphi(b_4) = p_4$, $\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = t_1$ и $\varphi(e_2) = t_2$. Видно, что $\varphi(B) \subseteq P$, $\varphi(E) \subseteq T$ и $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$. Легко проверить, что сужение φ на подмножество $\bullet e$ ($e \bullet$) является биекцией между данным подмножеством и $\bullet \varphi(e)$ ($\varphi(e) \bullet$) для всех $e \in E$. Например, для события e_3 множество входных условий $\{b_3\}$ биективно отображается на множество входных мест $\{p_1\}$ перехода $\varphi(e_3) = t_1$, а множество выходных условий $\{b_5\}$ на множество выходных мест

$\{p_1\}$. Кроме того, сужение φ на подмножество $\bullet N^1 = \{b_1, b_2\}$ является биекцией между данным подмножеством и $M_0 = \{p_1, p_2\}$. Следовательно, φ — гомоморфизм из N^1 в \mathcal{N}^1 относительно начальной разметки M_0 .

Определим временное расширение ПСС, где каждому сечению базовой сети ставится в соответствие значение локального времени системы (длительность состояния) либо \perp , указывающий, что состояние недостижимо по времени. Данные временные характеристики, как будет показано далее, соответствуют ходу времени в состояниях НВСП.

Определение 5. (Помеченная над Act) временная ПСС (ВПСС) — это пара $TN = (N, \tau)$, где N — (помеченная над Act) ПСС и $\tau : \mathcal{CUT}(N) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ — временная функция такая, что для всех $C \in \mathcal{CUT}(N)$ верно:

$$\tau(C) = \perp \iff \exists C' \in \mathcal{CUT}(N) : C \smile C' \wedge \tau(C') > 0.$$

Пусть $\mathcal{RC}(TN) = \{C \in \mathcal{CUT}(N) \mid \tau(C) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ — множество временных сечений.

Заметим, что $\bullet N, N^\bullet \in \mathcal{RC}(TN)$ (если $B \neq \emptyset$) и $\downarrow N^\bullet = E$.

ВПСС $TN = (N = (B, E, G, l), \tau)$ и $TN' = (N' = (B', E', G', l'), \tau')$, помеченные над Act , являются *изоморфными* (обозначается $TN \simeq TN'$), если существует биективное отображение $\gamma : B \cup E \rightarrow B' \cup E'$ такое, что:

- $\gamma(B) = B'$ и $\gamma(E) = E'$;
- $xGy \iff \gamma(x)G'\gamma(y)$ для всех $x, y \in B \cup E$;
- $\tau(C) = \tau'(\gamma(C))$ для всех $C \in \mathcal{CUT}(N)$;
- $l(e) = l'(\gamma(e))$.

Для ВПСС $\widehat{TN} = (\widehat{N}, \widehat{\tau})$ будем писать $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widehat{TN}$, если существует $\widetilde{C} \in \mathcal{RC}(\widehat{TN})$ такое, что:

- $TN = (N, \tau)$, $\widehat{TN} = (\widehat{N}, \widehat{\tau})$, $N = \widetilde{N} \bullet_{\widetilde{N} \sim \widetilde{C}}$, $\widehat{N} = \widetilde{N}_{\widetilde{C} \sim \widetilde{N}}$;
- $\tau : \mathcal{CUT}(N) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ и $\tau(C) = \widehat{\tau}(C)$ для всех $C \in \mathcal{CUT}(N) \setminus \widetilde{C}$;
- $\widehat{\tau} : \mathcal{CUT}(\widehat{N}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ и $\widehat{\tau}(\widehat{C}) = \widetilde{\tau}(\widehat{C})$ для всех $\widehat{C} \in \mathcal{CUT}(\widehat{N}) \setminus \widetilde{C}$;
- $\tau(\widetilde{C}) + \widehat{\tau}(\widetilde{C}) = \widetilde{\tau}(\widetilde{C})$.

В этом случае сечение \widetilde{C} будем называть *граничным сечением*, а \widehat{TN} расширением TN на \widehat{TN} . Видно, что TN и \widehat{TN} также являются ВПСС.

Пример 4. Рассмотрим ПСС N^1 из примера 2. Определим временную функцию $\tau : \mathcal{CUT}(N^1) = \{\{b_1, b_2\}, \{b_3, b_2\}, \{b_5, b_2\}, \{b_1, b_4\}, \{b_3, b_4\}, \{b_5, b_4\}\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp\}$ следующим образом: $\tau(\{b_1, b_2\}) = \tau(\{b_3, b_4\}) = 1$, $\tau(\{b_1, b_4\}) = \tau(\{b_3, b_2\}) = 0$, $\tau(\{b_5, b_4\}) = 3$, $\tau(\{b_5, b_2\}) = \perp$. Поскольку $\tau(\{b_5, b_2\}) = \perp$, то существует $\tau(\{b_3, b_4\})$ такой, что $\tau(\{b_3, b_4\}) = 1 > 0$ и $\{b_5, b_2\} \smile \{b_3, b_4\}$. Кроме того, $\{b_1, b_2\}$ и $\{b_5, b_4\}$ не имеют параллельных сечений. Значит, функция τ удовлетворяет ограничению из определения 5 и $TN^1 = (N^1, \tau)$ — ВПСС.

Пусть $TN = (N = (B, E, G, l), \tau)$ — ВПСС. Будем говорить, что событие $e \in E$ может произойти в $C \in \mathcal{RC}(TN)$ (обозначается $e \in Fi(C)$), если $C \xrightarrow{e} C'$ и $C' \in \mathcal{RC}(TN)$. Для изменения сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ в результате события $e \in Fi(C)$ будем использовать обозначение $C \xrightarrow{e} C'$. Таким образом, запрещается, чтобы сечение, полученное в результате выполнения события, имело неопределенную временную характеристику (т. е. \perp), так как это означает, что время выполнения события еще не подошло. Для описания выполнения ВПСС используются графики — последовательности событий.

Определение 6. Пусть $TN = (N, \tau)$ — ВПСС и $C, C' \in \mathcal{RC}(TN)$. Последовательность событий $\omega = e_1 \dots e_n$ ($n \geq 0$) называется графиком из C в C' ВПСС TN , если существует цепочка сечений из $\mathcal{RC}(TN)$ вида:

$$(C = C_0) \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = C').$$

Пусть $\mathcal{GRF}(TN, C, C')$ — множество всех графиков ВПСС TN из C в C' . Кроме того, обозначим $\mathcal{GRF}(TN) = \mathcal{GRF}(TN, \bullet N, N \bullet)$.

Пример 5. Пусть $TN^1 = (N^1, \tau)$ — ВПСС из примера 4. Рассмотрим последовательность $\omega = e_1 e_2 e_3$. Тогда $\{b_1, b_2\} \xrightarrow{e_1} \{b_3, b_2\} \xrightarrow{e_2} \{b_3, b_4\} \xrightarrow{e_3} \{b_5, b_4\}$. Из примера 4 получаем, что $\{b_1, b_2\}, \{b_3, b_2\}, \{b_3, b_4\}, \{b_5, b_4\} \in \mathcal{RC}(TN^1)$. Кроме того, $\{b_1, b_2\} = \bullet N^1$, а $\{b_5, b_4\} = N^1 \bullet$. Значит, ω — график из $\omega \in \mathcal{GRF}(TN^1)$.

Сформулируем и докажем свойства графиков ВПСС TN .

Лемма 1. Пусть $TN = (N, \tau)$ — ВПСС и $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}(TN, C_0, C_n)$ — график с последовательностью сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n$. Если $C \in (\mathcal{RC}(TN) \setminus \{C_0, \dots, C_n\})$ и $C_0 \prec C \prec C_n$, то $\tau(C) = 0$.

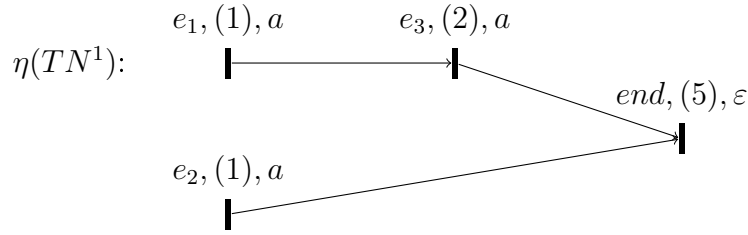
Доказательство. Рассмотрим произвольное $C \in (\mathcal{RC}(TN) \setminus \{C_0, \dots, C_n\})$ такое, что $C_0 \prec C \prec C_n$. Предположим обратное, т. е. $\tau(C) > 0$. По определению 5, $C \not\prec C_i$, т. е. либо $C \prec C_i$ ($\downarrow C \subset \downarrow C_i$), либо $C_i \prec C$ ($\downarrow C_i \subset \downarrow C$), для любого $0 \leq i \leq n$. Поскольку $C_0 \prec C \prec C_n$, т. е. $\downarrow C_0 \subset \downarrow C \subset \downarrow C_n$, то найдется $1 \leq k \leq n$ такой, что $\downarrow C_{k-1} \subset \downarrow C \subset \downarrow C_k$. Пришли к противоречию с тем, что $C_{k-1} \xrightarrow{e_k} C_k$. \square

Предложение 1. Пусть TN — ВПСС. Если $C, C' \in \mathcal{RC}(TN)$ и $C \preceq C'$, то существует график $\omega \in \mathcal{GRF}(TN, C, C')$. В частности, $\mathcal{GRF}(TN) \neq \emptyset$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 1 работы [7]. \square

Введем временное расширение частично-упорядоченных множеств и рассмотрим их в контексте событий ВПСС.

Определение 7. (Помеченное над Act) временное частично-упорядоченное множество (ВЧУМ) — это набор $\eta = (X, \preceq, \tau, l)$, где X — множество элементов; \preceq — рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение на X ; $\tau : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ — временная функция и $l : X \rightarrow Act$ — помечающая функция.

Рис. 3. ВЧУМ $\eta(TN^1)$

ВЧУМ $\eta = (X, \preceq, \tau, l)$ и $\eta' = (X', \preceq', \tau', l')$, помеченные над Act , являются *изоморфными* (обозначается $\eta \simeq \eta'$), если существует биективное отображение $\gamma : X \rightarrow X'$ такое, что:

- $x \preceq \hat{x} \iff \gamma(x) \preceq' \gamma(\hat{x})$ для всех $x, \hat{x} \in X$;
- $\tau(x) = \tau'(\gamma(x))$ и $l(x) = l'(\gamma(x))$ для всех $x \in X$.

Для ВПСС $TN = (N = (B, E, G, l), \tau)$, графика $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}(TN)$ с последовательностью сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n$ определим *ВЧУМ событий* $\eta(TN, \omega) = (E^*, \preceq^*, \mathbf{Age}, l^*)$ следующим образом:

- $E^* = E \cup end$;
- $\preceq^* = (\preceq \cap (E \times E)) \cup \{(e, end), (end, end) \mid e \in E\}$;
- $\mathbf{Age}(e) = \begin{cases} \sum_{0 \leq i < k} \tau(C_i), & \text{если } e = e_k \ (1 \leq k \leq n), \\ \sum_{0 \leq i \leq n} \tau(C_i), & \text{иначе;} \end{cases}$
- $l^*(e) = \begin{cases} l(e), & \text{если } e \in E, \\ \varepsilon, & \text{иначе.} \end{cases}$

Дополнительное событие end соответствует завершению работы системы и является наибольшим элементом ВЧУМ. Функция \mathbf{Age} определяет глобальное время системы для события. Благодаря лемме 1, видим, что функция \mathbf{Age} и, как следствие, ВЧУМ событий ВПСС не зависят от выбора графика, который всегда будет существовать, согласно предложению 1. Данный факт позволяет использовать для определения ВЧУМ событий ВПСС TN запись $\eta(TN)$.

Пример 6. Построим ВЧУМ событий для ВПСС TN^1 из примера 4. Сначала определим функцию \mathbf{Age} . Для этого рассмотрим график $\omega = e_1 e_2 e_3$ с последовательностью сечений $\{b_1, b_2\} \xrightarrow{e_1} \{b_3, b_2\} \xrightarrow{e_2} \{b_3, b_4\} \xrightarrow{e_3} \{b_5, b_4\}$, представленный в примере 5. Тогда $\mathbf{Age}(e_1) = \tau(\{b_1, b_2\}) = 1$, $\mathbf{Age}(e_2) = \tau(\{b_1, b_2\}) + \tau(\{b_3, b_2\}) = 1 + 0 = 1$, $\mathbf{Age}(e_3) = \tau(\{b_1, b_2\}) + \tau(\{b_3, b_2\}) + \tau(\{b_3, b_4\}) = 1 + 0 + 1 = 2$, $\mathbf{Age}(end) = \tau(\{b_1, b_2\}) + \tau(\{b_3, b_2\}) + \tau(\{b_3, b_4\}) + \tau(\{b_5, b_4\}) = 1 + 0 + 1 + 3 = 5$. Представим полученный ВЧУМ $\eta(TN^1)$ в виде ориентированного графа на рис. 3. Рядом с каждым узлом графа указано событие, значение временной и помечающей функции.

Рассмотрим функцию \mathbf{Clock} , которая будет связывать временные конструкции в рассмотренных ранее ВПСС и НВСП. Пусть $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ — НВСП, $TN = (N, \tau)$ — ВПСС,

$S = (M, I) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$ и φ — гомоморфизм из N в \mathcal{N} относительно M . Для сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$, графика $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}(TN, \bullet N, C)$, последовательности сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = C)$ и перехода $t \in \text{En}(\varphi(C))$ определим функцию:

$$\mathbf{Clock}(\omega, t) = \begin{cases} \sum_{\max(k) < i \leq n} \tau(C_i), \text{ если } \exists k < n: t \notin \text{En}(\varphi(C_k)), \\ \sum_{0 \leq i \leq n} \tau(C_i) + I(t), \text{ иначе;} \end{cases}$$

Значение данной функций соответствует времени с момента, как переход t стал допустимым и оставался таким до конца графика. Благодаря предложению 1, для любого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ существует график $\omega \in \mathcal{GRF}(TN, \bullet N, C)$. Кроме того, по лемме 1, функция **Clock** не зависит от выбора графика, приводящего к сечению C . Значит, мы можем рассматривать в качестве параметров функции **Clock** сечение $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и переход $t \in \text{En}(\varphi(C))$. Теперь мы готовы определить временной процесс как пару из ВПСС и гомоморфизма с ограничениями на корректность временных конструкций.

Определение 8. Пусть $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ — НВСП, $S = (M, I) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$, $TN = (N, \tau)$ — ВПСС и φ — гомоморфизм из N в \mathcal{N} относительно M . Пара $\pi = (TN, \varphi)$ называется временным процессом НВСП относительно состояния S , если для каждого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и события $e \in \text{Fi}(C)$ выполняется:

$$\mathbf{Clock}(C, \varphi(e)) \in D(\varphi(e)).$$

Пусть $\mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$ — множество всех временных процессов НВСП \mathcal{TN} относительно состояния S и $\mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) = \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S_0)$. Временной процесс $\pi_0 = (((B_0, \emptyset, \emptyset, \emptyset), \tau_0 \equiv 0), \varphi_0)$, где φ_0 — гомоморфизм относительно M_0 , называется начальным.

Два временных процесса $\pi = (TN = ((B, E, G, l), \tau), \varphi)$ и $\pi' = (TN', \varphi')$ из $\mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$ являются изоморфными (обозначается $\pi \simeq \pi'$), если существует изоморфизм $\gamma: TN \simeq TN'$ такой, что $\varphi(x) = \varphi'(\gamma(x))$ для любого $x \in B \cup E$.

Пример 7. Рассмотрим НВСП $\mathcal{TN}^1 = (\mathcal{N}^1, D)$ из примера 1, ВПСС $TN^1 = (N^1, \tau)$ из примера 4 и гомоморфизм φ из N^1 в \mathcal{N}^1 относительно начальной разметки из примера 3. Покажем, что пара $\pi^1 = (TN^1, \varphi)$ является временным процессом \mathcal{TN}^1 относительно начального состояния $S_0 = (M_0, (I_0 \equiv 0))$. Для этого вычислим для каждого события e и сечения $C \in \mathcal{RC}(TN^1)$, в котором оно может произойти, значение функции **Clock**($C, \varphi(e)$) и убедимся, что оно принадлежит интервалу $D(\varphi(e))$. Напомним все временные сечения сети: $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, b_4\}$, $\{b_3, b_2\}$, $\{b_3, b_4\}$, $\{b_5, b_4\}$. Легко проверить, что $\{b_1, b_2\} \xrightarrow{e_1} \{b_3, b_2\} \xrightarrow{e_2} \{b_3, b_4\} \xrightarrow{e_3} \{b_5, b_4\}$ и $\{b_1, b_2\} \xrightarrow{e_2} \{b_1, b_4\} \xrightarrow{e_1} \{b_3, b_4\} \xrightarrow{e_3} \{b_5, b_4\}$. Тогда:

- $\mathbf{Clock}(\{b_1, b_2\}, \varphi(e_1)) = \tau(\{b_1, b_2\}) = 1 \in D(\varphi(e_1) = t_1) = [1, 2]$,
- $\mathbf{Clock}(\{b_1, b_2\}, \varphi(e_2)) = \tau(\{b_1, b_2\}) = 1 \in D(\varphi(e_2) = t_2) = [1, 2]$,
- $\mathbf{Clock}(\{b_3, b_2\}, \varphi(e_2)) = \tau(\{b_1, b_2\}) + \tau(\{b_3, b_2\}) = 1 + 0 \in D(\varphi(e_2) = t_2) = [1, 2]$,
- $\mathbf{Clock}(\{b_1, b_4\}, \varphi(e_1)) = \tau(\{b_1, b_2\}) + \tau(\{b_1, b_4\}) = 1 + 0 \in D(\varphi(e_1) = t_1) = [1, 2]$,

- **Clock**($\{b_3, b_4\}, \varphi(e_3)) = \tau(\{b_1, b_2\}) + \tau(\{b_3, b_2\}) + \tau(\{b_3, b_4\}) = 1 + 0 + 1 \in D(\varphi(e_3) = t_1) = [1, 2]$.

Следовательно, $\pi^1 = (TN^1, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}^1)$.

Установим взаимосвязь между временными процессами и пробегами НВСП. Пусть $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$, $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}(TN)$ с последовательностью сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n$ для некоторой НВСП \mathcal{TN} и состояния $S \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$. Определим отображение Run временного процесса и его графика в последовательность временных задержек и переходов НВСП следующим образом: $Run(\pi, \omega) = \tau(C_0) \varphi(e_1) \tau(C_1) \dots \varphi(e_n) \tau(C_n)$. Кроме того, пусть $l(\pi, \omega) = \tau(C_0) l(e_1) \tau(C_1) \dots l(e_n) \tau(C_n)$. Обозначим $\mathcal{RUN}(\pi) = \{Run(\pi, \omega) \mid \pi = (TN, \varphi), \omega \in \mathcal{GRF}(TN)\}$.

Предложение 2. Пусть \mathcal{TN} – НВСП.

(1) Для $\pi = (TN = (N, \tau), \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S = (M, I))$ выполняется:

- $\mathcal{RUN}(\pi) \subseteq \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$;
- сужение функции φ на N^\bullet – биекция между N^\bullet и M ;
- **Clock**(N^\bullet, t) = $I(t)$ для всех $t \in En(\varphi(N^\bullet))$.

(2) Если $\sigma \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$ то, существует единственный с точностью до изоморфизма $\pi^* \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$ такой, что $\sigma \in \mathcal{RUN}(\pi^*)$.

Доказательство. Пункты предложения являются обобщением теорем, доказанных в работе [6], и их доказательство имеет те же рассуждения. Отличием является рассмотрение временных процессов не только относительно начального, а относительно произвольного достижимого состояния НВСП. \square

Определим расширения для временных процессов НВСП. Рассмотрим произвольный $\tilde{\pi} = (\widetilde{TN}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ для НВСП \mathcal{TN} . Будем писать $\pi \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{\pi}$, если $\pi = (TN, \varphi)$, $\hat{\pi} = (\widehat{TN}, \hat{\varphi})$, $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widehat{TN}$, $\varphi = \tilde{\varphi}|_{B \cup E}$, $\hat{\varphi} = \tilde{\varphi}|_{\widehat{B} \cup \widehat{E}}$. В этом случае $\tilde{\pi}$ – расширение π на $\hat{\pi}$, π – префикс, а $\hat{\pi}$ – постфикс $\tilde{\pi}$. Если $\hat{\pi}$ не существенен для описания, то будем опускать его и писать $\pi \rightarrow \tilde{\pi}$.

Пусть $\pi = (TN = (N, \tau), \varphi)$ – временной процесс НВСП \mathcal{TN} и $\omega \in \mathcal{GRF}(TN)$ – график данного процесса, который существует согласно предложению 1. Согласно предложению 2(1), $Run(\pi, \omega)$ – пробег \mathcal{TN} , т.е. $S_0 \xrightarrow{Run(\pi, \omega)} S$ и $S \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$. Кроме того, $S = (\varphi(N^\bullet), \mathbf{Clock}(N^\bullet))$, т.е. S не зависит от выбора графика временного процесса π . Это позволяет нам определить функцию $St : \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) \rightarrow \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$ такую, что $S_0 \xrightarrow{\sigma} St(\pi)$, где $\sigma \in \mathcal{RUN}(\pi)$.

Покажем, что префикс и постфикс расширения НВСП также являются временными процессами.

Предложение 3. Если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, то $\pi \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и $\hat{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, St(\pi))$.

Доказательство. Предложение является обобщением теорем и предложений, доказанных в работе [7]. \square

Пусть $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ для НВСП \mathcal{TN} . Рассмотрим частные случаи расширений временных процессов:

- $\tilde{\pi}$ — расширение π на время θ (обозначается $\pi \xrightarrow{\theta} \tilde{\pi}$), если $\hat{E} = \emptyset$ и $\hat{\tau}(\hat{B}) = \theta$;
- $\tilde{\pi}$ — расширение π на событие e (обозначается $\pi \xrightarrow{e} \tilde{\pi}$ или $\pi \xrightarrow{\hat{l}(e)} \tilde{\pi}$), если $\hat{E} = \{e\}$ и $\hat{\tau} \equiv 0$.

Сформулируем лемму, которая связывает ход времени и действия НВСП с соответствующими расширениями временных процессов.

Лемма 2. Пусть \mathcal{TN} — НВСП, $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup Act$.

(1) Если $\pi \xrightarrow{x} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$, то $St(\pi) \xrightarrow{x} St(\tilde{\pi})$.

(2) Если $St(\pi) \xrightarrow{x} \tilde{S}$, то существует $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ такой, что $\pi \xrightarrow{x} \tilde{\pi}$ и $\tilde{S} = St(\tilde{\pi})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный график $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}(TN)$ с последовательностью сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n$, который существует, согласно предложению 1. Тогда $S_0 \xrightarrow{Run(\pi, \omega)} St(\pi)$, поскольку $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$.

(1) Рассмотрим случай $x \in Act$. Тогда $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, где $\hat{E} = \{e\}$, $\hat{l}(e) = x$ и $\hat{\tau} \equiv 0$. Поскольку $N^\bullet \xrightarrow{e} \tilde{N}^\bullet$, то $\omega e \in \mathcal{GRF}(\tilde{TN})$, по определению 6. Значит, $Run(\tilde{\pi}, \omega e) = Run(\pi, \omega) \tilde{\varphi}(e) \tilde{\tau}(\tilde{N}^\bullet) = Run(\pi, \omega) \tilde{\varphi}(e) 0 \in \mathcal{RUN}(\tilde{\pi})$, где $Run(\pi, \omega) \in \mathcal{RUN}(\pi)$ и $L(\tilde{\varphi}(e)) = x$. Следовательно, $S_0 \xrightarrow{Run(\pi, \omega)} St(\pi) \xrightarrow{x} St(\tilde{\pi})$.

Далее, рассмотрим случай $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Тогда $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, где $\hat{E} = \emptyset$ и $\hat{\tau}(\hat{B}) = x$ и $\omega \in \mathcal{GRF}(\tilde{TN})$. Кроме того, $Run(\tilde{\pi}, \omega) = \tau(C_0) \varphi(e_1) \tau(C_1) \dots \varphi(e_n) (\tau(C_n) + x) \in \mathcal{RUN}(\tilde{\pi})$, где $\tau(C_0) \varphi(e_1) \tau(C_1) \dots \varphi(e_n) \tau(C_n) = Run(\pi, \omega) \in \mathcal{RUN}(\pi)$. Значит, $S_0 \xrightarrow{Run(\pi, \omega)} St(\pi) \xrightarrow{x} St(\tilde{\pi})$.

(2) Пусть $St(\pi) \xrightarrow{x} \tilde{S}$, где $x \in Act$, случай $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ рассматривается аналогично. Так как $S_0 \xrightarrow{Run(\pi, \omega)} St(\pi) \xrightarrow{x} \tilde{S}$, то существует переход t такой, что $L(t) = x$ и $S_0 \xrightarrow{Run(\pi, \omega)t0} \tilde{S}$. Поскольку $Run(\pi, \omega)t0 \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN})$, то найдется единственный с точностью до изоморфизма $\tilde{\pi}' \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ такой, что $Run(\pi, \omega)t0 \in \mathcal{RUN}(\tilde{\pi}')$, по предложению 2(2), т.е. $St(\tilde{\pi}') = \tilde{S}$. Кроме того, согласно конструкции расширения и предложения 3, найдется $\pi' \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ такой, что $\pi' \xrightarrow{x} \tilde{\pi}'$ и $Run(\pi, \omega) \in \mathcal{RUN}(\pi')$. По предложению 2(2), $\pi' \simeq \pi$, так как $Run(\pi, \omega) \in \mathcal{RUN}(\pi') \cap \mathcal{RUN}(\pi)$. Как следствие, существует временной процесс $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ такой, что $\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi}'$, $\pi \xrightarrow{x} \tilde{\pi}$ и $St(\tilde{\pi}) = St(\tilde{\pi}') = \tilde{S}$. \square

3. Эквивалентности НВСП. В данном разделе определяются языковые и бисимуляционные эквивалентности НВСП со слабой временной стратегией.

3.1. *Языковые эквивалентности.* Языковые эквивалентности, также известные как следовые эквивалентности, используются для сравнения поведения систем в терминах их языков, то есть наборов всех возможных выполнений систем. Данный «линейно-временной» подход не учитывает момент недетерминированного выбора между несколькими расширениями процесса. Обобщим классическое определение языковой эквивалентности, основанное на пробегах сетей Петри.

Определение 9. Пусть \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' – НВСП, помеченные над Act .

- $Lang(\mathcal{TN}) = \{L(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN})\}$.
- \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' языково эквивалентны (обозначается $\mathcal{TN} \cong \mathcal{TN}'$), если $Lang(\mathcal{TN}) = Lang(\mathcal{TN}')$.

Основываясь на классах изоморфизма ВПСС и ВЧУМ временных процессов НВСП, сформулируем понятия языковых эквивалентностей для семантик частично порядка.

Определение 10. Пусть \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' – НВСП, помеченные над Act , и $\star \in \{int, por, prc\}$.

- $Trace_{int}(\mathcal{TN}) = \{l(\pi, \omega) \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}), \omega \in \mathcal{GRF}(TN)\}$;
- $Trace_{por}(\mathcal{TN}) = \{[\eta(TN)]_{\simeq} \mid (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})\}$;
- $Trace_{prc}(\mathcal{TN}) = \{[TN]_{\simeq} \mid (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})\}$.
- \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' \star -языково эквивалентны (обозначается $\mathcal{TN} \equiv_{\star} \mathcal{TN}'$), если $Trace_{\star}(\mathcal{TN}) = Trace_{\star}(\mathcal{TN}')$.

Проверим корректность предложенного определения. Докажем, что язык, основанный на пробегах НВСП, совпадает с интерливинговым (*int*) языком, основанным на временных процессах.

Теорема 1. Для НВСП \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' выполняется:

$$\mathcal{TN} \cong \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \equiv_{int} \mathcal{TN}'.$$

Доказательство. Следуя определениям 9 и 10, достаточно показать, что для произвольной НВСП \mathcal{TN} выполняется $Lang(\mathcal{TN}) = Trace_{int}(\mathcal{TN})$.

- Поскольку $\pi_0 = (TN_0, \varphi_0) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и $0 \in \mathcal{GRF}(TN_0)$, то $Trace_{int}(\mathcal{TN}) \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольное слово $l(\pi, \omega) \in Trace_{int}(\mathcal{TN})$, что означает $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и $\omega \in \mathcal{GRF}(TN)$. Тогда $Run(\pi, \omega) \in \mathcal{RUN}(\pi) \subseteq \mathcal{RUN}(\mathcal{TN})$, по предложению 2(1). Следовательно, так как $l(\pi, \omega) = L(Run(\pi, \omega))$, по определению 4, то $Trace_{int}(\mathcal{TN}) \subseteq Lang(\mathcal{TN})$.
- Так как $r \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN})$ для любого $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $r \in Lang(\mathcal{TN})$, то $Lang(\mathcal{TN}) \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольное $L(\sigma) \in Lang(\mathcal{TN})$, где $\sigma \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN})$. Тогда существует единственный с точностью до изоморфизма $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ такой, что $\sigma \in \mathcal{RUN}(\pi)$, по предложению 2(2). Это означает, что $Run(\pi, \omega) = \sigma$ для некоторого $\omega \in \mathcal{GRF}(TN)$. Следовательно, по определению 4, $L(\sigma) = L(Run(\pi, \omega)) = l(\omega)$ и $Lang(\mathcal{TN}) \subseteq Trace_{int}(\mathcal{TN})$.

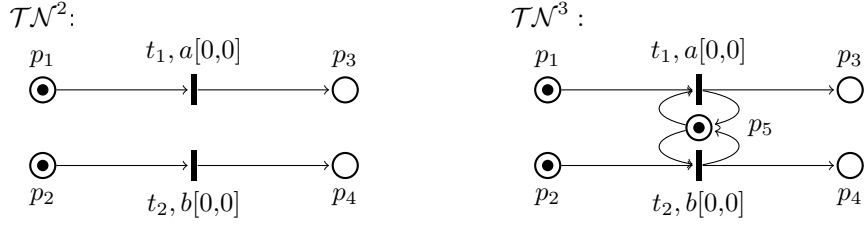


Рис. 4. $\sim \not\equiv_{por} \equiv_{por}$

Поскольку $Trace_{int}(\mathcal{TN}) \subseteq Lang(\mathcal{TN})$ и $Lang(\mathcal{TN}) \subseteq Trace_{int}(\mathcal{TN})$, то $Lang(\mathcal{TN}) = Trace_{int}(\mathcal{TN})$. \square

3.2. *Обычные бисимуляционные эквивалентности.* Бисимуляционные эквивалентности, в отличие от языковых, учитывают момент недетерминированного выбора между несколькими расширениями процесса (ветвления). В связи с этим такие эквивалентности также называют эквивалентностями ветвящегося времени. Бисимуляционно эквивалентные системы требуют существования отношения (бисимуляции). Данное отношение связывает начальные состояния двух систем. Кроме того, для любых связанных состояний при возможном переходе одной из систем в новое состояние, другая система должна иметь возможность «скопировать» поведение так, что полученные состояния снова будут связаны отношением бисимуляции. Рассмотрим обычные бисимуляционные эквивалентности, которые являются самыми «слабыми» эквивалентностями, учитывающими ветвящуюся структуру поведения в НВСП. Начнем с расширения классических определений, основанных на состояниях сетей Петри.

Определение 11. НВСП \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются бисимуляционно эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{RS}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{RS}(\mathcal{TN}')$ такое, что $(S_0, S'_0) \in R$ и для всех $(S, S') \in R$ выполняется:

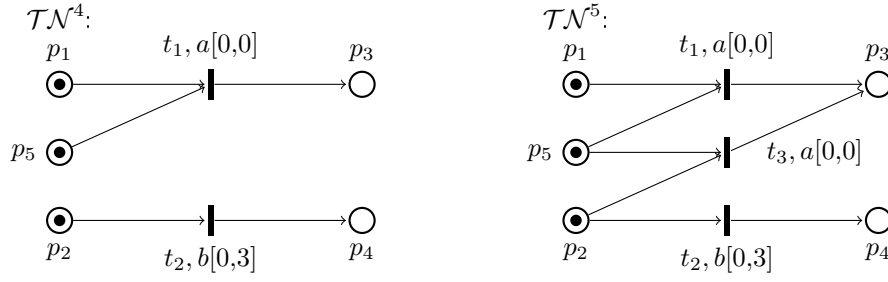
- (1) если $S \xrightarrow{x} \tilde{S}$, где $x \in Act \cup \mathbb{R}_{\geq 0}$, тогда существует пара $(\tilde{S}, \tilde{S}') \in R$ такая, что $S' \xrightarrow{x} \tilde{S}'$;
- (2) как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Пример 8. Рассмотрим НВСП \mathcal{TN}^2 и \mathcal{TN}^3 на рис. 4. Согласно определению 11, $\mathcal{TN}^2 \sim \mathcal{TN}^3$, поскольку существует возможность построения соответствующей бисимуляции, которая связывает состояния двух НВСП.

Покажем, что $\mathcal{TN}^2 \not\equiv_{por} \mathcal{TN}^3$. Действительно, у \mathcal{TN}^2 найдется временной процесс, где события действий a и b будут параллельными, тогда как у \mathcal{TN}^3 подобного процесса не существует. Значит, $Trace_{por}(\mathcal{TN}^2) \neq Trace_{por}(\mathcal{TN}^3)$ и, как следствие, $\mathcal{TN}^2 \not\equiv_{por} \mathcal{TN}^3$, согласно определению 10.

Теперь определим бисимуляционные эквивалентности в терминах временных процессов НВСП.

Определение 12. Пусть $\star \in \{int, por, prc\}$. НВСП \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются \star -бисимуляционно эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \stackrel{\star}{\equiv} \mathcal{TN}'$), если существу-

Рис. 5. $\equiv_{prc} \not\equiv_{int}$

ет отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')$ такое, что $(\pi_0, \pi'_0) \in R$, и для всех $(\pi, \pi') \in R$ выполняется:

(1) если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и

– $\tilde{\pi}$ – расширение π на время или событие, в случае $\star = int$,

тогда существует пара $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R$ такая, что $\pi' \xrightarrow{\hat{\pi}'} \tilde{\pi}'$ и

– $\eta(\widehat{\mathcal{TN}}) \simeq \eta(\widehat{\mathcal{TN}'})$, в случае $\star \in \{int, por\}$;

– $\widehat{\mathcal{TN}} \simeq \widehat{\mathcal{TN}'}$, в случае $\star = prc$;

(2) как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Пример 9. Рассмотрим НВСП \mathcal{TN}^4 и \mathcal{TN}^5 на рис. 5. Как можно видеть, $\mathcal{TN}^4 \equiv_{prc} \mathcal{TN}^5$, согласно определению 10.

Покажем, что $\mathcal{TN}^4 \not\equiv_{int} \mathcal{TN}^5$. Предположим, это не так, т.е. существует некоторая бисимуляция R , соответствующая определению 12. Тогда $(\pi_0, \pi'_0) \in R$, согласно данному определению.

Рассмотрим временной процесс π'_1 НВСП \mathcal{TN}^5 , который соответствует срабатыванию перехода t_3 и является расширением π'_0 на событие a , т.е. $\pi'_0 \xrightarrow{a} \pi'_1$. Согласно определению 12, для π_0 должен существовать аналогичный временной процесс π_1 – расширение π_0 на событие a и $(\pi_1, \pi'_1) \in R$. Это означает, что π_1 соответствует срабатыванию перехода t_1 НВСП \mathcal{TN}^4 .

Процесс π_1 может быть расширен до процесса π_2 в результате действия b (срабатывание перехода t_2 НВСП \mathcal{TN}^4), т.е. $\pi_1 \xrightarrow{b} \pi_2$. Значит, по определению 12, должна существовать пара $(\pi_2, \pi'_2) \in R$ такая, что $\pi'_1 \xrightarrow{b} \pi'_2$. Однако, процесс π'_1 не может иметь расширений в результате действия b . Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{TN}^4 \not\equiv_{int} \mathcal{TN}^5$.

Покажем, что предложенное определение интерливинговой (*int*) бисимуляции корректно относительно классического определения.

Теорема 2. Для НВСП \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' выполняется:

$$\mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \equiv_{int} \mathcal{TN}'.$$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть $\mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией R_1 . Покажем, что $\mathcal{TN} \stackrel{\text{int}}{\simeq} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{(\pi, \pi') \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}') \mid (St(\pi), St(\pi')) \in R_1\}$.

По определению 11, $(St(\pi_0), St(\pi'_0)) = (S_0, S'_0) \in R_1$. Значит $(\pi_0, \pi'_0) \in R_2$.

Рассмотрим произвольную пару $(\pi, \pi') \in R_2$. Тогда $(St(\pi), St(\pi')) \in R_1$.

(1) Пусть $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ и $\tilde{\pi}$ — расширение π на событие, случай расширения на время рассматривается аналогично. Значит, $\pi \xrightarrow{a} \tilde{\pi}$ для $a \in Act$. Согласно лемме 2(1), получаем, что $St(\pi) \xrightarrow{a} St(\tilde{\pi})$. Поскольку $(St(\pi), St(\pi')) \in R_1$, то $St(\pi') \xrightarrow{a} S'$ и $(St(\tilde{\pi}), S') \in R_1$, по определению 11. Благодаря лемме 2(2), существует $\tilde{\pi}' \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')$ такой, что $\pi' \xrightarrow{a} \tilde{\pi}'$ и $S' = St(\tilde{\pi}')$. Значит, $(St(\tilde{\pi}), St(\tilde{\pi}')) \in R_1$, а $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R_2$. Следовательно, существует $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R_2$ такая, что $\pi' \xrightarrow{\hat{\pi}'} \tilde{\pi}'$ и $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, так как $\tilde{\pi}'$ как и $\tilde{\pi}$ является расширением на событие действия a .

(2) Как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

По определению 12 и пунктам (1–2), $R_2 : \mathcal{TN} \stackrel{\text{int}}{\simeq} \mathcal{TN}'$.

\Leftarrow Пусть $\mathcal{TN} \stackrel{\text{int}}{\simeq} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией R_1 . Покажем, что $\mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{(St(\pi), St(\pi')) \mid (\pi, \pi') \in R_1\}$.

По определению 12, $(\pi_0, \pi'_0) \in R_1$. Значит, $(St(\pi_0), St(\pi'_0)) = (S_0, S'_0) \in R_2$.

Рассмотрим произвольную пару $(St(\pi), St(\pi')) \in R_2$. Тогда $(\pi, \pi') \in R_1$.

(1) Пусть $St(\pi) \xrightarrow{x} \tilde{S}$ для $x \in Act$, случай $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ рассматривается аналогично. По лемме 2(2), существует $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$ такой, что $\pi \xrightarrow{x} \tilde{\pi}$ и $\tilde{S} = St(\tilde{\pi})$. Значит, согласно определению 12, существует пара $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R$ такая, что $\pi' \xrightarrow{\hat{\pi}'} \tilde{\pi}'$ и $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, т. е. $\pi' \xrightarrow{x} \tilde{\pi}'$. Следовательно, существует пара $(St(\tilde{\pi}) = \tilde{S}, St(\tilde{\pi}')) \in R_2$ такая, что $St(\pi') \xrightarrow{x} St(\tilde{\pi}')$, по лемме 2(1).

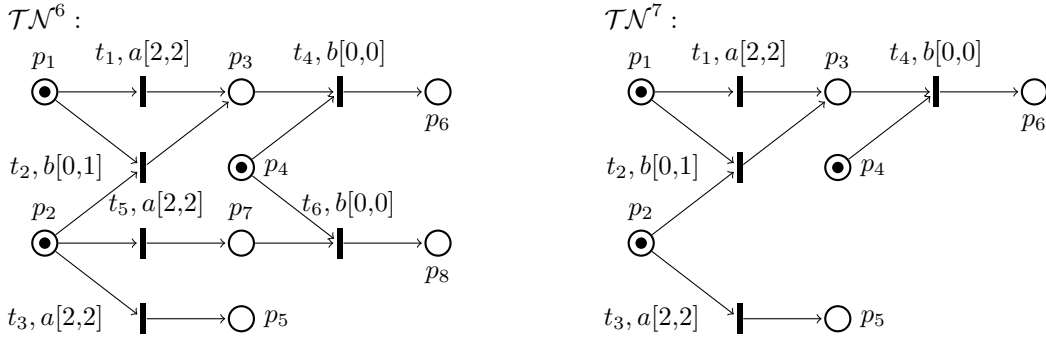
(2) Как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

По определению 11 и пунктам (1–2), $R_2 : \mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}'$. □

3.3. *Сохраняющие историю эквивалентности.* Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности учитывают предыдущее функционирование системы, ту часть процесса, которая привела из начального состояния в текущее. Соответствующие бисимуляции сохраняют изоморфизм между ВПСС (ВЧУМ) связанных временных процессов целиком, а не только добавленной части, как в случае обычных бисимуляций. Сначала рассмотрим слабый вариант данных эквивалентностей.

Определение 13. Пусть $\star \in \{por, prc\}$. НВСП \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются \star -бисимуляционно эквивалентными со слабым сохранением истории (обозначается $\mathcal{TN} \stackrel{wh}{\simeq}_{\star} \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')$ такое, что $(\pi_0, \pi'_0) \in R$ и для всех $(\pi, \pi') \in R$ выполняется:

(1) — $\eta(TN) \simeq \eta(TN')$, в случае $\star = por$;

Рис. 6. $\Leftrightarrow_{prc}^{wh} \not\Leftrightarrow_{por}$

– $TN \simeq TN'$, в случае $\star = prc$;

(2) если $\pi \rightarrow \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(TN)$, тогда существует пара $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R$ такая, что $\pi' \rightarrow \tilde{\pi}'$;

(3) как пункт (2), но роли TN и TN' меняются.

Пример 10. Рассмотрим НВСП \mathcal{TN}^6 и \mathcal{TN}^7 на рис. 6. Покажем, что $\mathcal{TN}^6 \not\Leftrightarrow_{por} \mathcal{TN}^7$. Предположим, это не так, т.е. существует некоторая бисимуляция R , удовлетворяющая определению 12. Тогда $(\pi_0, \pi'_0) \in R$. Временной процесс π_0 может быть расширен до процесса π_1 в результате хода двух тактов времени и события, соответствующего срабатыванию перехода t_5 . Значит, по определению 12, существует $(\pi_1, \pi'_1) \in R$, $\pi'_0 \rightarrow \pi'_1$ и $\eta(TN_1) \simeq \eta(TN'_1)$. Другими словами, временному процессу π'_1 соответствует ход двух тактов времени и последующее действие a . Поскольку π_1 может быть расширен действием b , то π'_1 должен иметь схожее поведение. Значит, процессу π'_1 будет соответствовать срабатывание перехода t_1 . С другой стороны, процесс π_1 может быть расширен следующими по причине действиями a и b , что невозможно для процесса π'_1 . Следовательно, $\mathcal{TN}^6 \not\Leftrightarrow_{por} \mathcal{TN}^7$.

Видно, что $\mathcal{TN}^6 \Leftrightarrow_{prc}^{wh} \mathcal{TN}^7$, где для существования бисимуляции требуется изоморфизм ВЧУМ не расширяющих частей, а ВЧУМ целых расширений.

Заметим, что в случае сильной стратегии хода времени НВСП будут вести себя одинаково, поскольку переход t_2 будет обязан сработать раньше переходов, соответствующих действиям a в данных НВСП.

Теперь рассмотрим сохраняющую историю бисимуляцию, где имеет место «расширение» изоморфизмов ВПСС (ВЧУМ) при расширении временных процессов. Для произвольных НВСП \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' определим множества изоморфизмов ВПСС (ВЧУМ) их временных процессов следующим образом: $\mathcal{F}_{por}(\mathcal{TN}, \mathcal{TN}') = \{f : \eta(TN) \simeq \eta(TN') \mid (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}), (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')\}$ и $\mathcal{F}_{prc}(\mathcal{TN}, \mathcal{TN}') = \{f : TN \simeq TN' \mid (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}), (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}')\}$. Через f_0 будем обозначать функцию с пустой областью определения, в случае $f_0 \in \mathcal{F}_{por}$, и изоморфизм между ВПСС начальных процессов, в случае $f_0 \in \mathcal{F}_{prc}$.

Определение 14. Пусть $\star \in \{por, prc\}$. НВСП \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются \star -бисимуляционно эквивалентными с сохранением истории (обозначается $\mathcal{TN} \Leftrightarrow_{\star}^h \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}) \times$

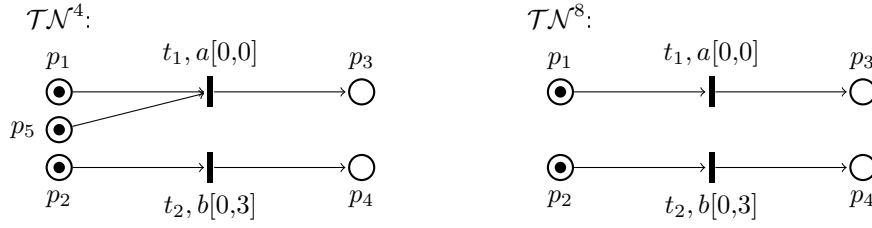


Рис. 7. $\stackrel{h}{\cong}_{por} \not\equiv_{prc}$

$PRC(\mathcal{TN}') \times \mathcal{F}_*(\mathcal{TN}, \mathcal{TN}')$ такое, что $(\pi_0, \pi'_0, f_0) \in R$ и для всех $(\pi, \pi', f) \in R$ выполняется:

- (1) – $f : \eta(\mathcal{TN}) \simeq \eta(\mathcal{TN}')$, в случае $\star = por$;
 – $f : \mathcal{TN} \simeq \mathcal{TN}'$, в случае $\star = prc$;
- (2) если $\pi \rightarrow \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in PRC(\mathcal{TN})$, тогда существует тройка $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', \tilde{f}) \in R$ такая, что $\pi' \rightarrow \tilde{\pi}'$ и $f \subseteq \tilde{f}$;
- (3) как пункт (2), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Заметим, что расширение на произвольный процесс в определениях 13 и 14 можно заменить на последовательность расширений на время и события. Следовательно, семантика интерливинга (*int*) будет совпадать с семантикой частичного порядка (*por*) в контексте приведенных выше бисимуляций.

Пример 11. На рис. 7 представлены НВСП \mathcal{TN}^4 и \mathcal{TN}^8 . Данные сети являются $\stackrel{h}{\cong}_{por}$ эквивалентными, но в контексте процессной семантики они не эквивалентны даже для языкового случая, т.е. $\mathcal{TN}^4 \not\equiv_{prc} \mathcal{TN}^8$. Действительно, ПСС всех временных процессов НВСП \mathcal{TN}^4 имеют три условия в начальных сечениях, в то время как начальные сечения ПСС для временных процессов \mathcal{TN}^8 содержат по два условия.

3.4. *Обратные-прямые эквивалентности.* Эквивалентности, рассматриваемые далее, позволяют учитывать моделирование как в прямом (обычном), так и в обратном направлениях. Обратные-прямые бисимуляционные эквивалентности позволяют естественным образом сочетать семантики интерливинга и частичного порядка. При обратном моделировании происходит следование строго по истории функционирования системы. Вследствие этого бисимуляции связывают «хронологии» выполнений, которые определяются процессом и его графиком. Определим множество *хронологий* следующим образом: $\mathcal{CHR}(\mathcal{TN}, S) = \{(\pi, \omega) \mid \pi = (TN, \varphi) \in PRC(\mathcal{TN}, S), \omega \in \mathcal{GRF}(TN)\}$, где \mathcal{TN} – НВСП и $S \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$. Пусть $\mathcal{CHR}(\mathcal{TN}) = \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}, S_0)$. Хронология (π_0, ε) называется *начальной*, где π_0 – начальный процесс, а ε – пустая последовательность.

Пусть $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$. Будем писать $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$, если $\pi \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{\pi}$ и $\tilde{\omega} = \omega \hat{\omega}$, $\omega \in \mathcal{GRF}(TN)$. В этом случае $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ – *расширение* (π, ω) на $(\hat{\pi}, \hat{\omega})$, (π, ω) – *префикс*, а $(\hat{\pi}, \hat{\omega})$ – *постфикс* $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$. Заметим, что, благодаря предложению 3, $(\pi, \omega) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$, а $(\hat{\pi}, \hat{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}, St(\pi))$. Рассмотрим частные случаи расширений хронологий.

- $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ – *расширение* (π, ω) на время θ (обозначается $(\pi, \omega) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$), если $\tilde{\pi}$ – расширение π на время θ . В этом случае $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \varepsilon)} (\tilde{\pi}, \omega)$.

- $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ — расширение (π, ω) на событие e (обозначается $(\pi, \omega) \xrightarrow{e} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ или $(\pi, \omega) \xrightarrow{\hat{l}(e)} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$), если $\tilde{\pi}$ — расширение π на событие e . В этом случае $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, e)} (\tilde{\pi}, \omega e)$.

Из определений следует, что любое расширение хронологии может быть представлено в виде последовательности расширений на время и одиночные события. Сформулируем данный факт в виде леммы.

Лемма 3. Пусть $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$. Тогда следующие пункты равносильны:

- (1) $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$, $l(\hat{\pi}, \hat{\omega}) = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$ и $n \geq 0$.
- (2) $(\pi, \omega) = (\pi^0, \omega^0) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0) \xrightarrow{a_1} (\pi^1, \omega^1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi^n, \omega^n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}^n, \omega^n) = (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$, где $\theta_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($0 \leq i \leq n$), $a_j \in Act$ ($1 \leq j \leq n$) и $n \geq 0$.

Определение 15. Пусть $\mathcal{TN}, \mathcal{TN}'$ — НВСП, помеченные над Act , $\star, * \in \{int, por, prc\}$.

- \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' являются \star -прямо бисимуляционно эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \approx_{\star} \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}')$ такое, что $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R$ и для всех $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R$ выполняется:

- (1) если $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$ и
 - $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ — расширение (π, ω) на время или событие, в случае $\star = int$,
 тогда существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R$ такая, что $(\pi', \omega') \xrightarrow{(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$ и
 - $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, в случае $\star \in \{int, por\}$;
 - $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$, в случае $\star = prc$;

(2) как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

- \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' являются $*$ -обратно \star -прямо бисимуляционно эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \approx_{*\star} \mathcal{TN}'$), если $\mathcal{TN} \approx_{\star} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией R такой, что для всех $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R$ выполняется:

- (3) если $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \xrightarrow{(\hat{\pi}, \hat{\omega})} (\pi, \omega)$ и
 - (π, ω) — расширение $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ на время или событие, в случае $*$ = int,
 тогда существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R$ такая, что $(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') \xrightarrow{(\hat{\pi}', \hat{\omega}')} (\pi', \omega')$ и
 - $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, в случае $*$ $\in \{int, por\}$;
 - $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$, в случае $*$ = prc;

(4) как пункт (3), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

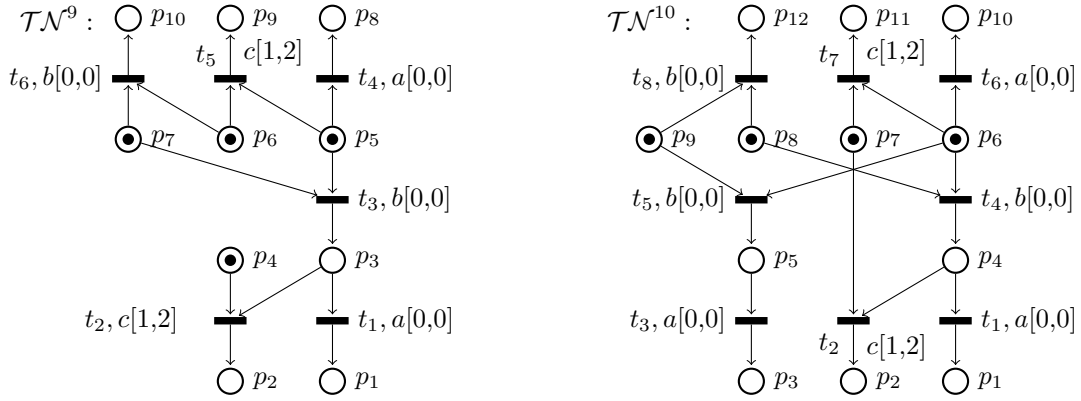


Рис. 8. $\Leftrightarrow_{prc} \not\approx_{int\ por}$

Пример 12. Рассмотрим НВСП \mathcal{TN}^9 и \mathcal{TN}^{10} на рис. 8. Покажем, что $\mathcal{TN}^9 \not\approx_{int\ por} \mathcal{TN}^{10}$. Предположим, что это не так и $\mathcal{TN}^9 \approx_{int\ por} \mathcal{TN}^{10}$, т.е. существует бисимуляция R , удовлетворяющая определению 15. Тогда $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R$.

Рассмотрим расширение π_1 временного процесса π_0 , которое соответствует срабатыванию параллельных переходов t_6 и t_4 , и соответствующий график ω_1 , определяющий последовательность действий b a . Значит, согласно определению 15, существует пара $((\pi_1, \omega_1), (\pi'_1, \omega'_1)) \in R$, где π'_1 — расширение π'_0 , которому соответствуют параллельные действия b и a . Данное расширение может соответствовать только срабатыванию переходов t_8 и t_6 НВСП \mathcal{TN}^{10} .

Далее, π_1 и π'_1 могут сделать ход назад по истории на действие a , т.е. $\pi_2 \rightarrow \pi_1$, $\pi'_2 \rightarrow \pi'_1$ и $((\pi_2, \omega_2), (\pi'_2, \omega'_2)) \in R$.

Временной процесс π'_2 после задержки в один такт времени может быть расширен действием c до процесса π'_3 , что невозможно для временного процесса π_2 . Следовательно, не существует процесса π_3 , и, как следствие, пары $((\pi_3, \omega_3), (\pi'_3, \omega'_3)) \in R$, удовлетворяющей определению 15. Таким образом, получили противоречие с данным определением. Значит, $\mathcal{TN}^9 \not\approx_{int\ por} \mathcal{TN}^{10}$.

С другой стороны, можно проверить, что для данных НВСП имеет место обычная бисимуляционная эквивалентность в процессной семантике, т.е. $\mathcal{TN}^9 \Leftrightarrow_{prc} \mathcal{TN}^{10}$.

Докажем вспомогательный факт для обратной-прямой бисимуляции.

Лемма 4. Пусть \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' — НВСП, помеченные над Act , $\star, * \in \{por, prc\}$. Если $R : \mathcal{TN} \approx_{\star} \mathcal{TN}'$ и $((\pi_0, \varepsilon), (\pi', \omega')) \in R$, то $(\pi', \omega') = (\pi'_0, \varepsilon)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\star = * = por$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Так как $(\pi'_0, \varepsilon) \xrightarrow{(\pi', \omega')} (\pi', \omega')$ и $((\pi_0, \varepsilon), (\pi', \omega')) \in R$, то существует пара $((\pi, \omega), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R$ такая, что $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\widehat{\pi}, \widehat{\omega})} (\pi_0, \varepsilon)$ и $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(TN')$, согласно определению 15(3). Поскольку π_0 не имеет событий, а единственное его сечение имеет нулевое временное значение, то $(\pi, \omega) = (\widehat{\pi}, \widehat{\omega}) = (\pi_0, \varepsilon)$, т.е. $\eta(TN_0) \simeq \eta(TN')$. Из изоморфизма следует, что в π' не было событий и хода времени. Следовательно, $(\pi', \omega') = (\pi'_0, \varepsilon)$. \square

Определим обратную-прямую бисимуляционную эквивалентность со слабым сохранением истории.

Определение 16. Пусть \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' – НВСП, помеченные над Act , $\star \in \{por, prc\}$ и $\ast \in \{por, prc\}$.

- \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' являются \star -прямо бисимуляционно эквивалентными со слабым сохранением истории (обозначается $\mathcal{TN} \approx_{\star}^{wh} \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}')$ такое, что $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R$ и для всех $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R$ выполняется:

- (1) – $\eta(\mathcal{TN}) \simeq \eta(\mathcal{TN}')$, в случае $\star = por$;
– $\mathcal{TN} \simeq \mathcal{TN}'$, в случае $\star = prc$;

- (2) если $(\pi, \omega) \rightarrow (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$, тогда существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R$ такая, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$;

- (3) как пункт (2), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

- \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' являются \ast -обратно \star -прямо бисимуляционно эквивалентными со слабым сохранением истории (обозначается $\mathcal{TN} \approx_{\ast\star}^{wh} \mathcal{TN}'$), если $\mathcal{TN} \approx_{\star}^{wh} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией R такой, что для всех $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R$ выполняется:

- (4) если $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \rightarrow (\pi, \omega)$ тогда существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R$ такая, что $(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') \rightarrow (\pi', \omega')$;

- (5) как пункт (4), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Несложно заметить, что в контексте приведенных выше бисимуляций семантика интерливинга (*int*) будет совпадать с семантикой частичного порядка (*por*) как в прямом, так и в обратном направлениях.

Пример 13. Рассмотрим НВСП \mathcal{TN}^{11} и \mathcal{TN}^{12} на рис. 9. Покажем, что $\mathcal{TN}^{11} \not\approx_{por}^{wh} \mathcal{TN}^{12}$. Предположим это не так, т.е. существует бисимуляция R , соответствующая определению 16. Тогда $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R$.

Рассмотрим хронологию (π'_1, ω'_1) (расширение (π'_0, ε)), соответствующую срабатыванию перехода t_5 НВСП \mathcal{TN}^{12} после временной задержки 2. Тогда, согласно определению 16, существует $((\pi_1, \omega_1), (\pi'_1, \omega'_1)) \in R$ такая, что $(\pi_0, \varepsilon) \rightarrow (\pi_1, \omega_1)$ и $\eta(\mathcal{TN}_1) \simeq \eta(\mathcal{TN}'_1)$. Видно, что (π_1, ω_1) в этом случае соответствует срабатыванию перехода t_2 НВСП \mathcal{TN}^{11} .

Далее, (π_1, ω_1) может быть расширен действием b до хронологии (π_2, ω_2) так, что действие a будет являться причиной для действия b . Аналогично, поскольку $(\pi_1, \omega_1) \rightarrow (\pi_2, \omega_2)$, то должна существовать пара $((\pi_2, \omega_2), (\pi'_2, \omega'_2)) \in R$ такая, что $(\pi'_1, \omega'_1) \rightarrow (\pi'_2, \omega'_2)$ и $\eta(\mathcal{TN}_2) \simeq \eta(\mathcal{TN}'_2)$, согласно определению 16. Видно, что не существует расширения для π'_1 , в котором действие b следовало бы по причине за действием a , получили противоречие. Следовательно, $\mathcal{TN}^{11} \not\approx_{por}^{wh} \mathcal{TN}^{12}$.

С другой стороны, можно заметить, что $\mathcal{TN}^{11} \approx_{int\ prc} \mathcal{TN}^{12}$.

Также отметим, что в случае сильной временной стратегии сети будут иметь схожее поведение, поскольку переход действия a с временным интервалом $[0, 1]$ будет обязан срабатывать раньше других.

3.5. Иерархия эквивалентностей. Сначала рассмотрим взаимосвязи обратных-прямых эквивалентностей и обычных бисимуляционных эквивалентностей относительно разных семантик.

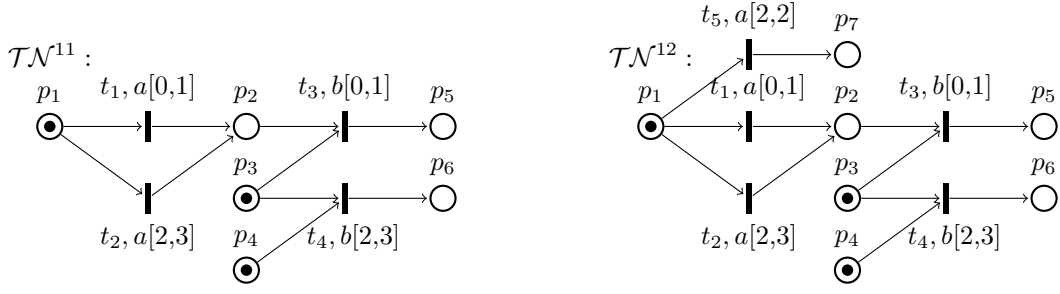


Рис. 9. $\approx_{int\ prc} \not\approx \approx_{por}^{wh}$

Теорема 3. Для НВСП \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' , $\star \in \{int, por, prc\}$ выполняется:

- (a) $\mathcal{TN} \rightleftharpoons_{\star} \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \approx_{\star} \mathcal{TN}'$;
- (б) $\mathcal{TN} \approx_{int} \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \approx_{int\ int} \mathcal{TN}'$;
- (в) $\mathcal{TN} \approx_{\star\ int} \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \approx_{\star\ \star} \mathcal{TN}'$;

Доказательство. Рассмотрим доказательство для $\star = prc$ (доказательство остальных случаев аналогично).

- (a) \Rightarrow Пусть $\mathcal{TN} \rightleftharpoons_{prc} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией R_1 . Покажем, что $\mathcal{TN} \approx_{prc} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \mid (\pi, \pi') \in R_1, \omega \in \mathcal{GRF}(\mathcal{TN}), \omega' \in \mathcal{GRF}(\mathcal{TN}')\}$. По определению 12, $(\pi_0, \pi'_0) \in R_1$. Значит, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_2$, так как $\varepsilon \in \mathcal{GRF}(\mathcal{TN}_0) \cap \mathcal{GRF}(\mathcal{TN}'_0)$.

Рассмотрим произвольную пару $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_2$. Тогда $(\pi, \pi') \in R_1$, $\omega \in \mathcal{GRF}(\mathcal{TN})$ и $\omega' \in \mathcal{GRF}(\mathcal{TN}')$.

- (1) Пусть $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\hat{\pi}, \hat{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для некоторого $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$, т.е. $\tilde{\omega} \in \mathcal{GRF}(\widehat{\mathcal{TN}})$ и $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$. Согласно определению 12 и $(\pi, \pi') \in R_1$, существует пара $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R_1$ такая, что $\pi' \xrightarrow{\hat{\pi}'} \tilde{\pi}'$ и $\widehat{\mathcal{TN}} \simeq \widehat{\mathcal{TN}'}$. Благодаря предложению 1, найдется график $\hat{\omega}' \in \mathcal{GRF}(\widehat{\mathcal{TN}'})$. Поскольку $\widehat{\mathcal{TN}'}$ — расширение \mathcal{TN}' на $\widehat{\mathcal{TN}}$, то $\omega' \hat{\omega}' \in \mathcal{GRF}(\widehat{\mathcal{TN}'})$ и $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \omega' \hat{\omega}')) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}')$. Следовательно, $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \omega' \hat{\omega}')) \in R_2$, $(\pi', \omega') \xrightarrow{(\hat{\pi}', \hat{\omega}')} (\tilde{\pi}', \omega' \hat{\omega}')$ и $\widehat{\mathcal{TN}} \simeq \widehat{\mathcal{TN}'}$.
- (2) Как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

В силу определения 15 и пунктов (1–2), $R_2 : \mathcal{TN} \approx_{prc} \mathcal{TN}'$.

\Leftarrow Пусть $R_1 : \mathcal{TN} \approx_{prc} \mathcal{TN}'$. Покажем, что $\mathcal{TN} \rightleftharpoons_{prc} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{(\pi, \pi') \mid ((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1\}$.

По определению 15, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_1$. Значит, $(\pi_0, \pi'_0) \in R_2 \neq \emptyset$.

Рассмотрим произвольную пару $(\pi, \pi') \in R_2$. Тогда существует $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1$.

- (1) Пусть $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$. В силу предложения 1, существует $\hat{\omega} \in \mathcal{GRF}(\widehat{\mathcal{TN}})$. Значит, $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\hat{\pi}, \hat{\omega})} (\tilde{\pi}, \omega \hat{\omega})$. Согласно определению 15(1), существует пара $((\tilde{\pi}, \omega \hat{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_1$ такая, что $(\pi', \omega') \xrightarrow{(\hat{\pi}', \hat{\omega}')} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$ и $\widehat{\mathcal{TN}} \simeq \widehat{\mathcal{TN}'}$. Следовательно, $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R_2$, $\pi' \xrightarrow{\hat{\pi}'} \tilde{\pi}'$ и $\widehat{\mathcal{TN}} \simeq \widehat{\mathcal{TN}'}$.

(2) Как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

В силу определения 12 и пунктов (1-2), $R_2 : \mathcal{TN} \rightleftharpoons_{prc} \mathcal{TN}'$.

(б) \Rightarrow Пусть $\mathcal{TN} \approx_{int} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией R_1 . Покажем, что $\mathcal{TN} \approx_{int int} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1 \mid l(\pi, \omega) = l(\pi', \omega') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n, n \geq 0, (\pi_0, \omega_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}_0, \omega_0) \xrightarrow{a_1} (\pi_1, \omega_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}_n, \omega_n) = (\pi, \omega), (\pi'_0, \omega'_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}'_0, \omega'_0) \xrightarrow{a_1} (\pi'_1, \omega'_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}'_n, \omega'_n) = (\pi', \omega'), ((\pi_i, \omega_i), (\pi'_i, \omega'_i)), ((\tilde{\pi}_i, \omega_i), (\tilde{\pi}'_i, \omega'_i)) \in R_1, 0 \leq i \leq n\}$.

По определению 15, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_1$. Так как $l(\pi_0, \varepsilon) = l(\pi'_0, \varepsilon) = 0$, $(\pi_0, \varepsilon) \xrightarrow{0} (\pi_0, \varepsilon)$ и $(\pi'_0, \varepsilon) \xrightarrow{0} (\pi'_0, \varepsilon)$, то $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_2$.

Рассмотрим произвольную пару $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_2$. Тогда $l(\pi, \omega) = l(\pi', \omega') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$ для некоторого $n \geq 0$. Кроме того, $(\pi_0, \omega_0) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}_0, \omega_0) \xrightarrow{a_1} (\pi_1, \omega_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}_n, \omega_n) = (\pi, \omega)$, $(\pi'_0, \omega'_0) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}'_0, \omega'_0) \xrightarrow{a_1} (\pi'_1, \omega'_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}'_n, \omega'_n) = (\pi', \omega')$ и $((\pi_i, \omega_i), (\pi'_i, \omega'_i)), ((\tilde{\pi}_i, \omega_i), (\tilde{\pi}'_i, \omega'_i)) \in R_1$ для $0 \leq i \leq n$.

(1) Предположим $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$ и $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ — расширение (π, ω) на время или событие. Тогда $(\pi, \omega) \xrightarrow{x} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$, где $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup Act$. По определению 15, существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_1$ такая, что $(\pi', \omega') \xrightarrow{(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$ и $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, т.е. $(\pi', \omega') \xrightarrow{x} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$. Кроме того, $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_2$, поскольку $l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) = l(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$.

(2) Как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

(3) Предположим $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \xrightarrow{(\pi, \omega)} (\pi, \omega)$ и (π, ω) — расширение $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ на время или событие, т.е. $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \xrightarrow{x} (\pi, \omega)$ и $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup Act$. Тогда $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) = (\tilde{\pi}_{n-1}, \omega_{n-1}) \xrightarrow{x=a_n} (\pi, \omega)$ или $(\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \xrightarrow{x} (\pi, \omega)$, поскольку $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ — префикс (π, ω) . Значит, существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_1$ такая, что $(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') \xrightarrow{x} (\pi', \omega')$, т.е. $(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') \xrightarrow{(\pi', \omega')} (\pi', \omega')$ и $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$. Кроме того, $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_2$, поскольку $l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) = l(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$.

(4) Как пункт (3), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

В силу определения 15 и пунктов (1-4), $\mathcal{TN} \approx_{int int} \mathcal{TN}'$.

\Leftarrow Следует из определения 15.

(в) \Rightarrow Пусть $R : \mathcal{TN} \approx_{prc int} \mathcal{TN}'$. Покажем, что $R : \mathcal{TN} \approx_{prc prc} \mathcal{TN}'$.

По определению 15, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R$.

Рассмотрим произвольную пару $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R$.

(1) Пусть $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$ и $l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$ для некоторого $n \geq 0$. Согласно лемме 3, существует последовательность расширений вида $(\pi, \omega) = (\pi^0, \omega^0) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0) \xrightarrow{a_1} (\pi^1, \omega^1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi^n, \omega^n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}^n, \omega^n) = (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$. Последовательно применяя пункт (1) определения 15 для int случая, получим существование пар $((\pi^i, \omega^i), (\pi'^i, \omega'^i)), ((\tilde{\pi}^i, \omega^i), (\tilde{\pi}'^i, \omega'^i)) \in R$ ($0 \leq i \leq n$) таких, что $(\pi', \omega') = (\pi^{0'}, \omega^{0'}) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'}) \xrightarrow{a_1} (\pi^{1'}, \omega^{1'}) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi^{n'}, \omega^{n'}) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}^{n'}, \omega^{n'}) = (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$. Значит, по лемме 3, $(\pi', \omega') \xrightarrow{(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$, где $l(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n = l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$.

Покажем, что $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$. Поскольку $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R$ и $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$, то существует $((\pi, \omega), (\pi^*, \omega^*)) \in R$ такая, что $(\pi^*, \omega^*) \xrightarrow{(\tilde{\pi}^*, \tilde{\omega}^*)} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$ и $\gamma : \widehat{TN} \simeq \widehat{TN}^*$, по определению 15(3). В силу изоморфизма, $|\widehat{E}^*| = |\widehat{E}|$ и $\hat{\tau}^*(\bullet \widehat{N}^*) = \hat{\tau}^*(\gamma(\bullet \widehat{N})) = \hat{\tau}(\bullet \widehat{N}) = \theta_0$. Тогда $|\widehat{\omega}^*| = |\widehat{\omega}| = |\widehat{\omega}'| = n$, поскольку в графиках каждое событие присутствует ровно один раз. Так как $\widehat{\omega}^*$ и $\widehat{\omega}'$ являются окончаниями $\tilde{\omega}'$ одинаковой длины, то $\widehat{\omega}^* = \widehat{\omega}'$. Как следствие, $\widehat{E}^* = \widehat{E}'$. Значит, \widehat{TN}^* совпадает с \widehat{TN}' , согласно конструкции расширения \widehat{TN}' и равенству временных значений граничных сечений ($\hat{\tau}^*(\bullet \widehat{N}^*) = \theta_0 = \hat{\tau}'(\bullet \widehat{N}')$). Следовательно, $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$.

(2) Как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Из $R : \mathcal{TN} \approx_{prcint} \mathcal{TN}'$ следует $R : \mathcal{TN} \approx_{prcprc} \mathcal{TN}'$, в силу определения 15 и пунктов (1–2).

⇐ Поскольку из изоморфизма ВПСС следует изоморфизм его ВЧУМ событий, то из $\mathcal{TN} \approx_{prcprc} \mathcal{TN}'$ следует $\mathcal{TN} \approx_{prcint} \mathcal{TN}'$, по определению 15. \square

Далее, сравним эквивалентности со слабым сохранением истории.

Теорема 4. Для НВСП \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' , помеченных над Act , и $\star \in \{por, prc\}$ выполняется:

$$\mathcal{TN} \stackrel{wh}{\simeq}_{\star} \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \approx_{\star}^{wh} \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \approx_{\star\star}^{wh} \mathcal{TN}'.$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство для $\star = prc$ (доказательство случая $\star = por$ аналогично).

- $\mathcal{TN} \stackrel{wh}{\simeq}_{prc} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \approx_{prc}^{wh} \mathcal{TN}'$.

Пусть $\mathcal{TN} \stackrel{wh}{\simeq}_{prc} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией R_1 . Покажем, что $\mathcal{TN} \approx_{prc}^{wh} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \mid (\pi, \pi') \in R_1, \omega \in \mathcal{GRF}(TN), \omega' \in \mathcal{GRF}(TN')\}$.

По определению 13, $(\pi_0, \pi'_0) \in R_1$. Значит, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_2$, так как $\varepsilon \in \mathcal{GRF}(TN_0) \cap \mathcal{GRF}(TN'_0)$.

Рассмотрим произвольную пару $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_2$. Тогда $(\pi, \pi') \in R_1, \omega \in \mathcal{GRF}(TN)$ и $\omega' \in \mathcal{GRF}(TN')$.

- (1) $TN \simeq TN'$, согласно определению 13(1).
- (2) Пусть $(\pi, \omega) \rightarrow (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для некоторого $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(TN)$, т.е. $\tilde{\omega} \in \mathcal{GRF}(\widehat{TN})$ и $\pi \rightarrow \tilde{\pi}$. Согласно определению 13(2) и $(\pi, \pi') \in R_1$, существует пара $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R_1$ такая, что $\pi' \xrightarrow{\tilde{\pi}'} \tilde{\pi}'$. Благодаря предложению 1, найдется график $\widehat{\omega}' \in \mathcal{GRF}(\widehat{TN}')$. Поскольку \widehat{TN}' — расширение TN' на \widehat{TN}' , то $\omega' \widehat{\omega}' \in \mathcal{GRF}(\widehat{TN}')$ и $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \omega' \widehat{\omega}')) \in \mathcal{CHR}(TN) \times \mathcal{CHR}(TN')$. Следовательно, $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \omega' \widehat{\omega}')) \in R_2$, $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}', \omega' \widehat{\omega}')$.
- (3) Как пункт (2), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

В силу определения 16 и пунктов (1–3), $R_2 : \mathcal{TN} \approx_{prc}^{wh} \mathcal{TN}'$.

- $\mathcal{TN} \approx_{prc}^{wh} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \approx_{prcprc}^{wh} \mathcal{TN}'$.

Пусть $\mathcal{TN} \approx_{prc}^{wh} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией R_1 . Покажем, что $\mathcal{TN} \approx_{prcprc}^{wh} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1 \mid l(\pi, \omega) = l(\pi', \omega') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n, n \geq 0, (\pi_0, \omega_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}_0, \omega_0) \xrightarrow{a_1} (\pi_1, \omega_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}_n, \omega_n) = (\pi, \omega), (\pi'_0, \omega'_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}'_0, \omega'_0) \xrightarrow{a_1} (\pi'_1, \omega'_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}'_n, \omega'_n) = (\pi', \omega'), ((\pi_i, \omega_i), (\pi'_i, \omega'_i)), ((\tilde{\pi}_i, \omega_i), (\tilde{\pi}'_i, \omega'_i)) \in R_1, 0 \leq i \leq n\}$.

По определению 16, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_1$. Так как $l(\pi_0, \varepsilon) = l(\pi'_0, \varepsilon) = 0$, $(\pi_0, \varepsilon) \xrightarrow{0} (\pi_0, \varepsilon)$ и $(\pi'_0, \varepsilon) \xrightarrow{0} (\pi'_0, \varepsilon)$, то $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_2$.

Рассмотрим произвольную пару $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_2$. Тогда $l(\pi, \omega) = l(\pi', \omega') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$ для некоторого $n \geq 0$. Кроме того, $(\pi_0, \omega_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}_0, \omega_0) \xrightarrow{a_1} (\pi_1, \omega_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}_n, \omega_n) = (\pi, \omega)$, $(\pi'_0, \omega'_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}'_0, \omega'_0) \xrightarrow{a_1} (\pi'_1, \omega'_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}'_n, \omega'_n) = (\pi', \omega')$ и $((\pi_i, \omega_i), (\pi'_i, \omega'_i)), ((\tilde{\pi}_i, \omega_i), (\tilde{\pi}'_i, \omega'_i)) \in R_1$ для $0 \leq i \leq n$.

- (1) Поскольку $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1$, то $TN \simeq TN'$, по определению 16.
- (2) Предположим $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$ и $l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) = \theta'_0 a'_1 \theta'_1 \dots a'_m \theta'_m$ ($m \geq 0$). Тогда, по лемме 3, существует последовательность расширений $(\pi, \omega) = (\pi^0, \omega^0) \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0) \xrightarrow{a'_1} (\pi^1, \omega^1) \xrightarrow{\theta'_1} \dots \xrightarrow{a'_m} (\pi^m, \omega^m) \xrightarrow{\theta'_m} (\tilde{\pi}^m, \omega^m) = (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$.
Покажем индукцией по $0 \leq j \leq m$, что существуют пары $((\pi^j, \omega^j), (\pi^{j'}, \omega^{j'})), ((\tilde{\pi}^j, \omega^j), (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})) \in R_2$ такие, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\pi^{j'}, \omega^{j'})$ и $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})$.

($j = 0$) Пусть $(\pi^{0'}, \omega^{0'}) = (\pi', \omega')$. Тогда, $((\pi^0, \omega^0), (\pi^{0'}, \omega^{0'})) \in R_2$ и $(\pi', \omega') \rightarrow (\pi^{0'}, \omega^{0'})$.
Поскольку $(\pi, \omega) \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0)$ и $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1$, то существует пара $((\tilde{\pi}^0, \omega^0), (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})) \in R_1$ такая, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})$ и $\widetilde{TN}^0 \simeq \widetilde{TN}^{0'}$, по определению 16. В силу изоморфизма, $(\pi', \omega') \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})$. Тогда $(\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\pi, \omega) \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0)$ и $(\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\pi', \omega') \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})$, т.е. $(\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n + \theta'_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0)$ и $(\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n + \theta'_0} (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})$. Следовательно, $l(\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'}) = l(\tilde{\pi}^0, \omega^0) = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n (\theta_n + \theta'_0)$, по лемме 3, и $((\tilde{\pi}^0, \omega^0), (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})) \in R_2$ так как $((\tilde{\pi}^0, \omega^0), (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})) \in R_1$.

($j > 0$) По предположению индукции, существует $((\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}), (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})) \in R_2$ такая, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})$. Тогда $l(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) = l(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})$ и $((\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}), (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})) \in R_1$.

Поскольку $(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^j, \omega^j)$, то существует $((\pi^j, \omega^j), (\pi^{j'}, \omega^{j'})) \in R_1$ такая, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) \rightarrow (\pi^{j'}, \omega^{j'})$ и $TN^j \simeq TN^{j'}$, по определению 16. В силу изоморфизма, $(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^{j'}, \omega^{j'})$, т.е. $l(\pi^{j'}, \omega^{j'}) = l(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) a'_j 0 = l(\pi^j, \omega^j)$. Следовательно, $((\pi^j, \omega^j), (\pi^{j'}, \omega^{j'})) \in R_2$, так как $((\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}), (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})) \in R_2$, $(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^j, \omega^j) \xrightarrow{0} (\pi^j, \omega^j)$, $(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^{j'}, \omega^{j'}) \xrightarrow{0} (\pi^{j'}, \omega^{j'})$ и $((\pi^j, \omega^j), (\pi^{j'}, \omega^{j'})) \in R_1$.

Аналогично, в силу определения 16, из $(\pi^j, \omega^j) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^j, \omega^j)$ следует существование $((\tilde{\pi}^j, \omega^j), (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})) \in R_1$ такой, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\pi^{j'}, \omega^{j'}) \rightarrow (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})$, $TN^j \simeq TN^{j'}$. В силу изоморфизма, $(\pi^{j'}, \omega^{j'}) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})$ и $l(\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'}) = l(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) a'_j \theta'_j = l(\tilde{\pi}^j, \omega^j)$. Значит, $((\tilde{\pi}^j, \omega^j), (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})) \in R_2$, так как $((\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}), (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})) \in R_2$, $(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^j, \omega^j) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^j, \omega^j)$, $(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^{j'}, \omega^{j'}) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})$ и $((\pi^j, \omega^j), (\pi^{j'}, \omega^{j'})), ((\tilde{\pi}^j, \omega^j), (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})) \in R_1$.

Следовательно, существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) = ((\tilde{\pi}^m, \omega^m), (\tilde{\pi}^{m'}, \omega^{m'})) \in R_2$ такая, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$.

- (3) Как пункт (2), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.
- (4) Предположим $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \rightarrow (\pi, \omega)$. Тогда $l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) = \theta_0 a_1 \dots \theta_{m-1} a_m \theta$ для некоторого $m \leq n$ и $\theta \leq \theta_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, так как $\tilde{\omega}$ является префиксом ω . Кроме того, $(\pi_0, \omega_0) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}_0, \omega_0) \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_m} (\pi_m, \omega_m) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega} = \omega_m) \xrightarrow{\theta_m - \theta} (\tilde{\pi}_m, \omega_m) \xrightarrow{a_{m+1}} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}_n, \omega_n) = (\pi, \omega)$, согласно лемме 3. Поскольку $(\pi_m, \omega_m) \in R_1$, то существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_1$ такая, что $(\pi'_m, \omega'_m) \rightarrow (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$ и $\widetilde{TN} \simeq \widetilde{TN}'$, по определению 16. В силу изоморфизма, $(\pi'_m, \omega'_m) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$ и, как следствие, $(\pi'_0, \omega'_0) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}'_0, \omega'_0) \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_m} (\pi'_m, \omega'_m) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}' = \omega'_m) \xrightarrow{\theta_m - \theta} (\tilde{\pi}'_m, \omega'_m) \xrightarrow{a_{m+1}} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}'_n, \omega'_n) = (\pi', \omega')$, т.е. $l(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_m \theta = l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$. Значит, $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_2$, так как $(\pi_m, \omega_m) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$, $(\pi'_m, \omega'_m) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$ и $((\pi_i, \omega_i), (\pi'_i, \omega'_i)), ((\tilde{\pi}_j, \omega_j), (\tilde{\pi}'_j, \omega'_j)), ((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_1$ для $0 \leq i \leq m$ и $0 \leq j < m$. Следовательно, существует $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_2$ такая, что $(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') \rightarrow (\pi', \omega')$.
- (5) Как пункт (4), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

В силу определения 16 и пунктов (1–5), $\mathcal{TN} \approx_{\text{prc prc}}^{\text{wh}} \mathcal{TN}'$.

- $\mathcal{TN} \approx_{\text{prc prc}}^{\text{wh}} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \Leftarrow_{\text{prc}}^{\text{wh}} \mathcal{TN}'$.

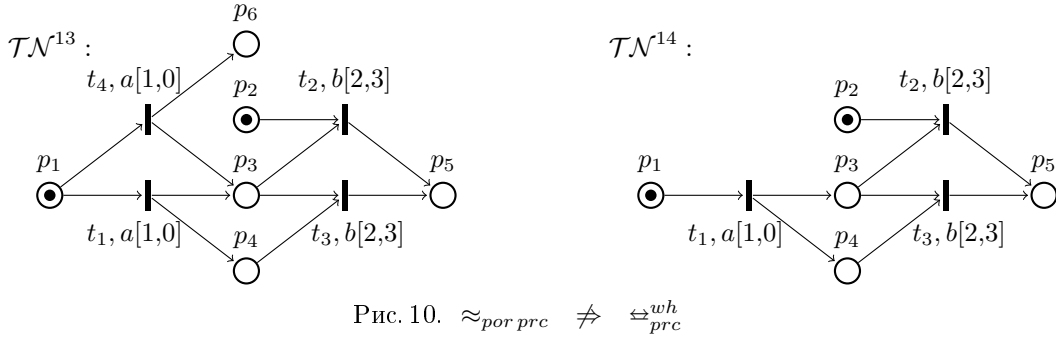
Пусть $R_1 : \mathcal{TN} \approx_{\text{prc prc}}^{\text{wh}} \mathcal{TN}'$. Покажем, что $\mathcal{TN} \Leftarrow_{\text{prc}}^{\text{wh}} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{(\pi, \pi') \mid ((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1\}$.

По определению 16, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_1$. Значит, $(\pi_0, \pi'_0) \in R_2 \neq \emptyset$.

Рассмотрим произвольную пару $(\pi, \pi') \in R_2$.

- (1) $TN \simeq TN'$, по определению 16.
- (2) Пусть $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$. Из $(\pi, \pi') \in R_2$ следует существование пары $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1$. В силу предложения 1, существует $\hat{\omega} \in \mathcal{GRF}(\widehat{TN})$. Значит, $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\hat{\pi}, \hat{\omega})} (\tilde{\pi}, \omega \hat{\omega})$. Согласно определению 16(2), существует пара $((\tilde{\pi}, \omega \hat{\omega}), (\tilde{\pi}', \omega')) \in R_1$ такая, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}', \omega')$. Следовательно, $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R_2$ и $\pi' \rightarrow \tilde{\pi}'$.
- (3) Как пункт (2), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

В силу определения 13 и пунктов (1–3), $R_2 : \mathcal{TN} \Leftarrow_{\text{prc}}^{\text{wh}} \mathcal{TN}'$. □



Пример 14. Рассмотрим НВСП \mathcal{TN}^{13} и \mathcal{TN}^{14} на рис. 10. Покажем, что $\mathcal{TN}^{13} \not\stackrel{wh}{prc} \mathcal{TN}^{14}$. Предположим обратное, т. е. существует бисимуляция R из определения 13. Тогда $(\pi_0, \pi'_0) \in R$.

Пусть π_1 — расширение π_0 , соответствующее срабатыванию перехода t_4 с единичной временной задержкой, т. е. $\pi_0 \rightarrow \pi_1$. Значит, по определению 13, существует пара $(\pi_1, \pi'_1) \in R$ такая, что $\pi'_0 \rightarrow \pi'_1$ и $TN_1 \simeq TN'_1$. В этом случае π'_1 соответствует срабатыванию перехода t_1 НВСП \mathcal{TN}^{14} .

Далее, π'_1 может быть расширено до временного процесса π'_2 в результате срабатывания перехода t_3 с временной задержкой 2. Аналогично, согласно определению 13, должна существовать пара $(\pi_2, \pi'_2) \in R$ такая, что $\pi_1 \rightarrow \pi_2$ и $TN_2 \simeq TN'_2$. Однако, такого расширения временного процесса π_1 с изоморфизмом ВПСС у \mathcal{TN}^{13} не существует, что приводит к противоречию. Следовательно, $\mathcal{TN}^{13} \not\stackrel{wh}{prc} \mathcal{TN}^{14}$.

С другой стороны, данные сети прямо обратно бисимуляционно эквивалентны, когда при движении в обратном направлении мы используем семантику ВЧУМ, т. е. $\mathcal{TN}^{13} \approx_{por/prc} \mathcal{TN}^{14}$.

Следующая теорема сравнивает обратные-прямые и сохраняющие историю эквивалентности.

Теорема 5. Для НВСП \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' , помеченных над Act , и $\star \in \{por, prc\}$ выполняется:

- (а) $\mathcal{TN} \stackrel{h}{\star} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \approx_{\star\star} \mathcal{TN}'$;
- (б) $\mathcal{TN} \approx_{por/por} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \stackrel{h}{por} \mathcal{TN}'$;
- (в) $\mathcal{TN} \approx_{prc/prc} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \stackrel{wh}{prc} \mathcal{TN}'$.

Доказательство.

- (а) Докажем для $\star = prc$, случай $\star = por$ рассматривается аналогично. Сформулируем вспомогательное утверждение, которое следует из определения изоморфизма и конструкции расширений ВПСС.

Утверждение. Если $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widehat{TN}$, $TN' \xrightarrow{\widehat{TN}'} \widehat{TN}'$ для ВПСС \widehat{TN} и \widehat{TN}' , $f : TN \simeq TN'$, $\tilde{f} : \widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$ и $f \subseteq \tilde{f}$, то $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$. \square

Пусть $R_1 : \mathcal{TN} \stackrel{h}{prc} \mathcal{TN}'$. Покажем, что $\mathcal{TN} \approx_{prc/prc} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}) \times \mathcal{CHR}(\mathcal{TN}') \mid l(\pi, \omega) = l(\pi', \omega') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n, n \geq 0\}$.

$$0, (\pi_0, \omega_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}_0, \omega_0) \xrightarrow{a_1} (\pi_1, \omega_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}_n, \omega_n) = (\pi, \omega),$$

$$(\pi'_0, \omega'_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}'_0, \omega'_0) \xrightarrow{a_1} (\pi'_1, \omega'_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}'_n, \omega'_n) = (\pi', \omega'),$$

$$(\pi_i, \pi'_i, f_i), (\tilde{\pi}_i, \tilde{\pi}'_i, f_i) \in R_1, f_i \subseteq f_j, 0 \leq i \leq j \leq n\}$$

По определению 14, $(\pi_0, \pi'_0, f_0) \in R_1$. Тогда $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_2$, поскольку $l(\pi, \omega) = l(\pi', \omega') = 0$, $(\pi_0, \varepsilon) \xrightarrow{0} (\pi_0, \varepsilon)$ и $(\pi'_0, \varepsilon) \xrightarrow{0} (\pi'_0, \varepsilon)$.

Рассмотрим произвольную пару $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_2$. Тогда $l(\pi, \omega) = l(\pi', \omega') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$, $(\pi_0, \omega_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}_0, \omega_0) \xrightarrow{a_1} (\pi_1, \omega_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}_n, \omega_n) = (\pi, \omega)$, $(\pi'_0, \omega'_0 = \varepsilon) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}'_0, \omega'_0) \xrightarrow{a_1} (\pi'_1, \omega'_1) \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}'_n, \omega'_n) = (\pi', \omega')$ для некоторого $n \geq 0$. Кроме того, найдутся тройки $(\pi_i, \pi'_i, f_i), (\tilde{\pi}_i, \tilde{\pi}'_i, f_i) \in R_1$ такие, что $f_i \subseteq f_j$ для $0 \leq i \leq j \leq n$.

- (1) Пусть $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\hat{\pi}, \hat{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$ и $l(\hat{\pi}, \hat{\omega}) = \theta'_0 a'_1 \theta'_1 \dots a'_m \theta'_m$ ($m \geq 0$). Тогда, по лемме 3, существует последовательность расширений $(\pi, \omega) = (\pi^0, \omega^0) \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0) \xrightarrow{a'_1} (\pi^1, \omega^1) \xrightarrow{\theta'_1} \dots \xrightarrow{a'_m} (\pi^m, \omega^m) \xrightarrow{\theta'_m} (\tilde{\pi}^m, \omega^m) = (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$.

Покажем индукцией по $0 \leq j \leq m$, что существуют пары $((\pi^j, \omega^j), (\pi^{j'}, \omega^{j'})), ((\tilde{\pi}^j, \omega^j), (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})) \in R_2$ такие, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\pi^{j'}, \omega^{j'})$ и $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})$.

- ($j = 0$) Пусть $(\pi^{0'}, \omega^{0'}) = (\pi', \omega')$. Тогда $((\pi^0, \omega^0), (\pi^{0'}, \omega^{0'})) \in R_2$ и $(\pi', \omega') \rightarrow (\pi^{0'}, \omega^{0'})$.

Из расширения $(\pi^0, \omega^0) \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0)$, следует $\pi^0 \xrightarrow{\theta'_0} \tilde{\pi}^0$. Поскольку $(\tilde{\pi}_n, \tilde{\pi}'_n, f_n) = (\pi^0, \pi^{0'}, f_n) \in R_1$, то существует тройка $(\tilde{\pi}^0, \tilde{\pi}^{0'}, f^0) \in R_1$ такая, что $\pi^{0'} \rightarrow \tilde{\pi}^{0'}$, $f^0 : \widetilde{TN}^0 \simeq \widetilde{TN}^{0'}$ и $f_n \subseteq f^0$, по определению 14. Благодаря изоморфизмам $TN^0 \simeq TN^{0'}$, $\widetilde{TN}^0 \simeq \widetilde{TN}^{0'}$ и $\pi^0 \xrightarrow{\theta'_0} \tilde{\pi}^0$, получаем $f^0 = f_n$ и $\pi^{0'} \xrightarrow{\theta'_0} \tilde{\pi}^{0'}$. Значит, согласно лемме 3, $l(\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'}) = l(\tilde{\pi}^0, \omega^0) = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n (\theta_n + \theta'_0)$, поскольку $(\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\pi^0, \omega^0) \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0)$ и $(\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\pi^{0'}, \omega^{0'}) \xrightarrow{\theta'_0} (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})$, т.е. $(\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n + \theta'_0} (\tilde{\pi}^0, \omega^0)$ и $(\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n + \theta'_0} (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})$. Следовательно, $((\tilde{\pi}^0, \omega^0), (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})) \in R_2$ и $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}^{0'}, \omega^{0'})$, так как $(\tilde{\pi}^0, \tilde{\pi}^{0'}, f^0) \in R_1$ и $f^0 = f_n$.

- ($j > 0$) По предположению индукции, существует $((\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}), (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})) \in R_2$ такая, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})$. Тогда $l(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) = l(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})$ и существует $(\tilde{\pi}^{j-1}, \tilde{\pi}^{j-1'}, f^{j-1}) \in R_1$, $f^{j-1} : \widetilde{TN}^{j-1} \simeq \widetilde{TN}^{j-1'}$.

Поскольку $(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^j, \omega^j)$, т.е. $\tilde{\pi}^{j-1} \xrightarrow{a'_j} \pi^j$, то существует $(\pi^j, \pi^{j'}, f^j) \in R_1$ такая, что $\pi^j \rightarrow \tilde{\pi}^{j-1'}$, $f^j : TN^j \simeq TN^{j'}$ и $f^{j-1} \subseteq f^j$, по определению 14. В силу изоморфизмов $\widetilde{TN}^{j-1} \simeq \widetilde{TN}^{j-1'}$, $TN^j \simeq TN^{j'}$ и $(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^j, \omega^j)$, получаем $(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^{j'}, \omega^{j'})$. Значит, $l(\pi^{j'}, \omega^{j'}) = l(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) a'_j 0 = l(\pi^j, \omega^j)$. Следовательно, $((\pi^j, \omega^j), (\pi^{j'}, \omega^{j'})) \in R_2$, так как $((\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}), (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})) \in R_2$, $(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^j, \omega^j) \xrightarrow{0} (\pi^j, \omega^j)$, $(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^{j'}, \omega^{j'}) \xrightarrow{0} (\pi^{j'}, \omega^{j'})$, $(\pi^j, \pi^{j'}, f^j) \in R_1$ и $f^{j-1} \subseteq f^j$. Аналогично, из $(\pi^j, \omega^j) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^j, \omega^j)$ следует $\pi^j \xrightarrow{\theta'_j} \tilde{\pi}^j$ и существование $(\tilde{\pi}^j, \tilde{\pi}^{j'}, f^j) \in R_1$ такой, что $\tilde{\pi}^j \rightarrow \pi^{j'} \rightarrow \tilde{\pi}^{j'}$, $f^j : \widetilde{TN}^j \simeq \widetilde{TN}^{j'}$,

$f^j \subseteq \tilde{f}^j$. В силу изоморфизмов $TN^j \simeq TN^{j'}$, $\widehat{TN}^j \simeq \widehat{TN}^{j'}$ и $(\pi^j, \omega^j) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^j, \omega^j)$, получаем $(\pi^{j'}, \omega^{j'}) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})$ и $\tilde{f}^j = f^j$. Значит, $l(\pi^{j'}, \omega^{j'}) = l(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) a'_j \theta'_j = l(\pi^j, \omega^j)$. Следовательно, $((\tilde{\pi}^j, \omega^j), (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})) \in R_2$, так как $((\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}), (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})) \in R_2$, $(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^j, \omega^j) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^j, \omega^j)$, $(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) \xrightarrow{a'_j} (\pi^{j'}, \omega^{j'}) \xrightarrow{\theta'_j} (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j'})$, $(\pi^j, \pi^{j'}, f^j), (\tilde{\pi}^j, \tilde{\pi}^{j'}, f^j) \in R_1$ и $f^{j-1} \subseteq f^j$.

Получаем, что существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) = ((\tilde{\pi}^m, \omega^m), (\tilde{\pi}^{m'}, \omega^{m'})) \in R_2$ такая, что $(\pi', \omega') \xrightarrow{(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$. Кроме того, $f_n = f^0 \subseteq f^m$, $f_n : TN \simeq TN'$ и $f^m : \widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$. Значит, согласно утверждению, $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$.

(2) Как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

(3) Пусть $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\pi, \omega)$. Тогда $l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) = \theta_0 a_1 \dots \theta_{m-1} a_m \theta$ для некоторого $m \leq n$ и $\theta \leq \theta_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, так как $\tilde{\omega}$ является префиксом ω . Кроме того, $(\pi_0, \omega_0) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}_0, \omega_0) \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_m} (\pi_m, \omega_m) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega} = \omega_m) \xrightarrow{\theta_m - \theta} (\tilde{\pi}_m, \omega_m) \xrightarrow{a_{m+1}} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi_n, \omega_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}_n, \omega_n) = (\pi, \omega)$, согласно лемме 3. Поскольку $(\pi_m, \pi'_m, f_m) \in R_1$ и $\pi_m \xrightarrow{\theta} \tilde{\pi}$, то существует тройка $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', \tilde{f}) \in R_1$ такая, что $\pi'_m \rightarrow \tilde{\pi}'$, $\tilde{f} : \widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$ и $f_m \subseteq \tilde{f}$, по определению 14. В силу изоморфизмов $TN_m \simeq TN'_m$, $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$ и $\pi_m \xrightarrow{\theta} \tilde{\pi}$, получаем $\pi'_m \xrightarrow{\theta} \tilde{\pi}'$, как следствие, $f_m = \tilde{f}$ и $(\pi'_m, \omega'_m) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}' = \omega'_m)$. Значит, $(\pi'_0, \omega'_0) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}'_0, \omega'_0) \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_m} (\pi'_m, \omega'_m) \xrightarrow{\theta} (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') \xrightarrow{\theta_m - \theta} (\tilde{\pi}'_m, \omega'_m) \xrightarrow{a_{m+1}} \dots \xrightarrow{a_n} (\pi'_n, \omega'_n) \xrightarrow{\theta_n} (\tilde{\pi}'_n, \omega'_n) = (\pi', \omega')$, т. е. $l(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_m \theta = l(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$. Следовательно, $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R_2$, так как $(\pi_i, \pi'_i, f_i), (\tilde{\pi}_i, \tilde{\pi}'_i, f_i), (\pi_m, \pi'_m, f_m), (\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', f_m) \in R_1$, $f_i \subseteq f_j$, $f_{m-1} \subseteq f_m$ для $0 \leq i \leq j < m$. Кроме того, $(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') \xrightarrow{(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')} (\pi', \omega')$. Так как $\widehat{TN} \xrightarrow{\widehat{TN}} TN$, $\widehat{TN}' \xrightarrow{\widehat{TN}'} TN'$, $f_m : \widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$, $f_n : TN \simeq TN'$ и $f_m \subseteq f_n$, то $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$, согласно утверждению.

(4) Как пункт (3), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

В силу пунктов (1–4) и определения 15, $R_2 : \mathcal{TN} \approx_{prc\ prc} \mathcal{TN}'$.

(6) Пусть $\mathcal{TN} \approx_{por\ por} \mathcal{TN}'$ с некоторой бисимуляцией R_1 . Покажем, что $\mathcal{TN} \stackrel{h}{\approx}_{por} \mathcal{TN}'$ с бисимуляцией $R_2 = \{(\pi, \pi', f) \mid f : \eta(TN) \simeq \eta(TN'), ((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1, \omega = e_1 \dots e_n, \omega' = e'_1 \dots e'_n, n \geq 0, f(e_i) = e'_i, 0 < i \leq n\}$.

По определению 15, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R_1$. Значит, $(\pi_0, \pi'_0, f_0) \in R_2$, так как ε не содержит событий.

Рассмотрим произвольную тройку $(\pi, \pi', f) \in R_2$. Тогда $f : \eta(TN) \simeq \eta(TN')$ и существует пара $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R_1$ такая, что $\omega = e_1 \dots e_n$, $\omega' = e'_1 \dots e'_n$ для $n \geq 0$ и $f(e_i) = e'_i$ для $0 < i \leq n$, по построению.

(1) $f : \eta(TN) \simeq \eta(TN')$, по построению.

(2) Пусть $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$. Согласно предложению 1, существует $\hat{\omega} \in \mathcal{GRF}(\widehat{TN})$ и $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\hat{\pi}, \hat{\omega})} (\tilde{\pi}, \omega \hat{\omega})$. Предположим, $l(\hat{\pi}, \hat{\omega}) = \theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_m \theta_m$ для $m \geq 0$. Тогда,

по лемме 3, существует последовательность $\pi = \pi^0 \xrightarrow{\theta_0} \tilde{\pi}^0 \xrightarrow{a_1} \pi^1 \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_m} \pi^m \xrightarrow{\theta_m} \tilde{\pi}^m = \tilde{\pi}$. Покажем, индукцией по $0 \leq j \leq m$, что существуют тройки $(\pi^j, \pi^{j'}, f^j), (\tilde{\pi}^j, \tilde{\pi}^{j'}, f^j) \in R_2$ такие, что $\pi' \rightarrow \pi^{j'}$, $\pi' \rightarrow \tilde{\pi}^{j'}$ и $f \subseteq f^j$.

($j = 0$) Пусть $\pi^{0'} = \pi'$. Тогда $(\pi^0, \pi^{0'}, f^0) \in R_2$, $\pi' \rightarrow \pi^{0'}$, где $f^0 = f$.

Так как $\pi^0 \xrightarrow{\theta_0} \tilde{\pi}^0$, то $(\pi^0, \omega) \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}^0, \omega)$, где $((\pi^0, \omega), (\pi^{0'}, \omega')) \in R_1$. Кроме того, существует пара $((\tilde{\pi}^0, \omega), (\tilde{\pi}^{0'}, \omega')) \in R_1$ такая, что $(\pi^{0'}, \omega') \xrightarrow{\theta_0} (\tilde{\pi}^{0'}, \omega')$, по определению 15. Из $f^0 : \eta(TN^0) \simeq \eta(TN^{0'})$ следует $f^0 : \eta(\widehat{TN}^0) \simeq \eta(\widehat{TN}^{0'})$. Значит, $\pi' = \pi^{0'} \rightarrow \tilde{\pi}^{0'}$ и $(\tilde{\pi}^0, \tilde{\pi}^{0'}, f^0) \in R_2$, поскольку $((\tilde{\pi}^0, \omega), (\tilde{\pi}^{0'}, \omega')) \in R_1$ и $f^0 = f$.

($j > 0$) По предположению индукции, существует $(\tilde{\pi}^{j-1}, \tilde{\pi}^{j-1'}, f^{j-1}) \in R_2$ такая, что $\pi' \rightarrow \tilde{\pi}^{j-1'}$ и $f \subseteq f^{j-1}$. Тогда $f^{j-1} : \widehat{TN}^{j-1} \simeq \widehat{TN}^{j-1'}$, существует $((\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}), (\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'})) \in R_1$, где $\omega^{j-1} = e^1 \dots e^k$, $\omega^{j-1'} = e^{1'} \dots e^{k'}$ для некоторого $k \geq 0$ и $f^{j-1}(e^i) = e^{i'}$ для $0 < i \leq k$.

Поскольку $\tilde{\pi}^{j-1} \xrightarrow{a_j} \pi^j$, то $(\tilde{\pi}^{j-1}, \omega^{j-1}) \xrightarrow{e} (\pi^j, \omega^{j-1}e)$ для некоторого события e . Благодаря определению 15, существует $((\pi^j, \omega^{j-1}e), (\pi^{j'}, \omega^{j-1'}e')) \in R_1$ такая, что $(\tilde{\pi}^{j-1'}, \omega^{j-1'}) \xrightarrow{e'} (\pi^{j'}, \omega^{j-1'}e')$, и изоморфизм $\hat{f} : \{e\} \rightarrow \{e'\}$.

Покажем, что $f^j = (f^{j-1} \cup \hat{f}) : TN^j \simeq TN^{j'}$. Имеем, $e^i \preceq^j e^l \iff f^{j-1}(e^i) \preceq^{j'} f^{j-1}(e^l) \iff f^j(e^i) \preceq^{j'} f^j(e^l) \iff e^{i'} \preceq^{j'} e^{l'}$, $\mathbf{Age}^j(e^i) = \mathbf{Age}^{j'}(f^{j-1}(e^i)) = \mathbf{Age}^{j'}(f^j(e^i))$, $l^j(e^i) = l^{j'}(f^{j-1}(e^i)) = l^{j'}(f^j(e^i))$ для $0 < i, l \leq k$. Кроме того, $\mathbf{Age}^j(e) = \mathbf{Age}^{j'}(\hat{f}(e)) = \mathbf{Age}^{j'}(f^j(e))$, $l^j(e) = l^{j'}(\hat{f}(e)) = l^{j'}(f^j(e))$ и $\mathbf{Age}^j(\text{end}^j) = \mathbf{Age}^{j'}(\text{end}^{j'})$. Предположим обратное, т. е. f^j не является изоморфизмом. Тогда существует $1 \leq l \leq k$ такой, что $(e^l \prec e) \wedge \neg(e^{l'} \prec e')$ либо $\neg(e^l \prec e) \wedge (e^{l'} \prec e')$, поскольку $\neg(e \prec e^i) \wedge \neg(e' \prec e^{i'})$ для всех $0 < i \leq k$, по определению графика. Без потери общности будем считать, что $(e^l \prec e) \wedge \neg(e^{l'} \prec e')$ и l — максимальный индекс, удовлетворяющий данному условию. Рассмотрим префикс для $(\pi^j, \omega^{j-1}e)$ вида $(\pi_{l-1}, \omega_{l-1}) \xrightarrow{(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})} (\pi^j, \omega^{j-1}e)$, где $\tilde{\omega} = e^1 \dots e^k e$. По определению 15, существует $((\pi_{l-1}, \omega_{l-1}), (\pi'_{l-1}, \omega'_{l-1})) \in R_1$ такая, что $(\pi'_{l-1}, \omega'_{l-1}) \xrightarrow{(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')} (\pi^{j'}, \omega^{j-1'}e')$ и $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, так как $((\pi^j, \omega^{j-1}e), (\pi^{j'}, \omega^{j-1'}e')) \in R_1$. Из изоморфизма следует, что множество событий \widehat{TN}' имеет вид $\widehat{E}' = \{e^{l'} \dots e^{k'} e'\}$, поскольку события \widehat{TN} представлены множеством $\widehat{E} = \{e^1 \dots e^k e\}$ и $\tilde{\omega}'$ — постфикс $\omega^{j-1'}e'$. С другой стороны, не существует биективного отображения $\hat{f} : \widehat{E} \rightarrow \widehat{E}'$ такого, что $\hat{e}_1 \preceq \hat{e}_2 \iff \hat{f}(\hat{e}_1) \preceq' \hat{f}(\hat{e}_2)$, так как $|\preceq'| < |\preceq|$. Получили противоречие с тем, что $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$. Значит, $f^j : TN^j \simeq TN^{j'}$. Тогда $((\pi^j, \omega^{j-1}e), (\pi^{j'}, \omega^{j-1'}e')) \in R_1$, $\omega^{j-1}e = e^1 \dots e^k e$, $\omega^{j-1'}e' = e^{1'} \dots e^{k'} e'$, $f^j(e^i) = e^{i'}$ для $0 < i \leq k$ и $f^j(e) = e'$. Следовательно $(\pi^j, \pi^{j'}, f^j) \in R_2$, $\pi' \rightarrow \pi^{j'}$ и $f \subseteq f^{j-1} \subseteq f^j$.

Так как $\pi^j \xrightarrow{\theta_j} \tilde{\pi}^j$, то $(\pi^j, \omega^{j-1}e) \xrightarrow{\theta_j} (\tilde{\pi}^j, \omega^{j-1}e)$, где $((\pi^j, \omega^{j-1}e), (\pi^{j'}, \omega^{j-1'}e')) \in R_1$. Кроме того, существует пара $((\tilde{\pi}^j, \omega^{j-1}e), (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j-1'}e')) \in R_1$ такая, что $(\pi^{j'}, \omega^{j-1'}e') \xrightarrow{\theta_j} (\tilde{\pi}^{j'}, \omega^{j-1'}e')$, по определению 15. Из $f^j : \eta(TN^j) \simeq \eta(TN^{j'})$ следует $f^j : \eta(\widehat{TN}^j) \simeq \eta(\widehat{TN}^{j'})$. Значит, $\pi' \rightarrow \tilde{\pi}^{j'}$ и $(\tilde{\pi}^j, \tilde{\pi}^{j'}, f^j) \in R_2$.

Следовательно, существует тройка $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', \tilde{f}) = (\tilde{\pi}^m, \tilde{\pi}^{m'}, f^m) \in R_2$ такая, что $\pi' \rightarrow \tilde{\pi}'$ и $f \subseteq \tilde{f}$.

(3) Как пункт (2), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Согласно пунктам (1–3) и определению 14, $\mathcal{TN} \stackrel{h}{\underset{por}{\rightleftharpoons}} \mathcal{TN}'$.

(в) $\mathcal{TN} \approx_{prcprc} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \approx_{prc}^{wh} \mathcal{TN}'$.

Пусть $R : \mathcal{TN} \approx_{prcprc} \mathcal{TN}'$. Покажем, что $R : \mathcal{TN} \approx_{prc}^{wh} \mathcal{TN}'$.

Согласно определению 15, $((\pi_0, \varepsilon), (\pi'_0, \varepsilon)) \in R$.

Рассмотрим произвольную пару $((\pi, \omega), (\pi', \omega')) \in R$.

- (1) Так как $(\pi_0, \varepsilon) \xrightarrow{(\pi, \omega)} (\pi, \omega)$ то, существует пара $((\pi_0, \varepsilon), (\bar{\pi}', \bar{\omega}')) \in R$ такая, что $(\bar{\pi}', \bar{\omega}') \xrightarrow{(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')} (\pi', \omega')$ и $TN \simeq \widehat{\overline{TN}}'$, по определению 15(3). Благодаря лемме 4, $(\bar{\pi}', \bar{\omega}') = (\pi'_0, \varepsilon)$. Значит, $(\tilde{\pi}', \tilde{\omega}') = (\pi', \omega')$ и $TN \simeq TN'$.
- (2) Если $(\pi, \omega) \rightarrow (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ для $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{CHR}(\mathcal{TN})$, тогда существует пара $((\tilde{\pi}, \tilde{\omega}), (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')) \in R$ такая, что $(\pi', \omega') \rightarrow (\tilde{\pi}', \tilde{\omega}')$, согласно определению 15(1).
- (3) Как пункт (2), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Следовательно, $R : \mathcal{TN} \approx_{prc}^{wh} \mathcal{TN}'$, согласно пунктам (1–3) и определению 16.

Пример 15. Рассмотрим НВСП \mathcal{TN}^{15} и \mathcal{TN}^{16} . Покажем, что $\mathcal{TN}^{15} \not\stackrel{h}{\underset{prc}{\rightleftharpoons}} \mathcal{TN}^{16}$. Предположим это не так, т.е. существует некоторая бисимуляция R , которая удовлетворяет определению 14. Тогда $(\pi_0, \pi'_0, f_0) \in R$. Рассмотрим π_1 — расширение временного процесса π_0 на действие a . Согласно определению 14, существует тройка $(\pi_1, \pi'_1, f_1) \in R$, где π'_1 является расширением π'_0 на действие a и $f_1 : TN_1 \simeq TN'_1$.

Пусть b_i — условие в π_1 , соответствующее месту p_i НВСП \mathcal{TN}^{15} , а b'_i — условие в π'_1 , соответствующее месту p_i НВСП \mathcal{TN}^{16} , для $1 \leq i \leq 5$. Тогда либо $f_1(b_4) = b'_5$, либо $f_1(b_4) = b'_3$.

- (1) Предположим $f_1(b_4) = b'_5$. Временной процесс π_1 имеет расширение π_2 на действие c после задержки в 2 единицы времени. При этом условие b_4 будет входным для соответствующего события. Согласно определению 14, в этом случае, должна существовать тройка $(\pi_2, \pi'_2, f_2) \in R$, где π'_2 — расширение на действие c , $f_1 \subseteq f_2$ и $f_2 : TN_2 \simeq TN'_2$. Значит, $f_2(b_4) = f_1(b_4) = b'_5$ и условие b'_5 также должно быть входным для события действия c . Как можно заметить, требуемого расширения π'_2 не существует, получили противоречие.
- (2) Предположим $f_1(b_4) = b'_3$. Временной процесс π_1 имеет расширение π_2 на действие b . При этом условие b_4 будет входным для соответствующего события. Согласно определению 14, в этом случае, должна существовать тройка $(\pi_2, \pi'_2, f_2) \in R$, где π'_2 — расширение на действие b , $f_1 \subseteq f_2$ и $f_2 : TN_2 \simeq TN'_2$. Значит, $f_2(b_4) = f_1(b_4) = b'_3$ и условие b'_3 также должно быть входным для события действия b . Как можно заметить, требуемого расширения π'_2 не существует, получили противоречие.

Оба варианта привели к противоречию. Следовательно, бисимуляции R не существует и $\mathcal{TN}^{15} \not\stackrel{h}{\underset{prc}{\rightleftharpoons}} \mathcal{TN}^{16}$. С другой стороны, можно проверить, что $\mathcal{TN}^{15} \approx_{prcprc} \mathcal{TN}^{16}$.

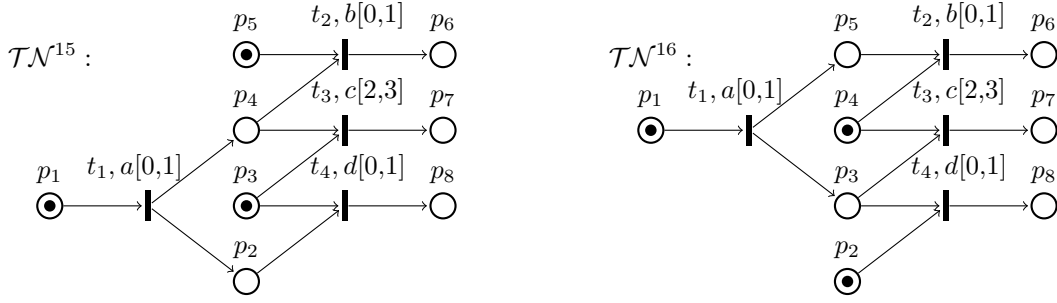


Рис. 11. \mathcal{TN}^{15} и \mathcal{TN}^{16}

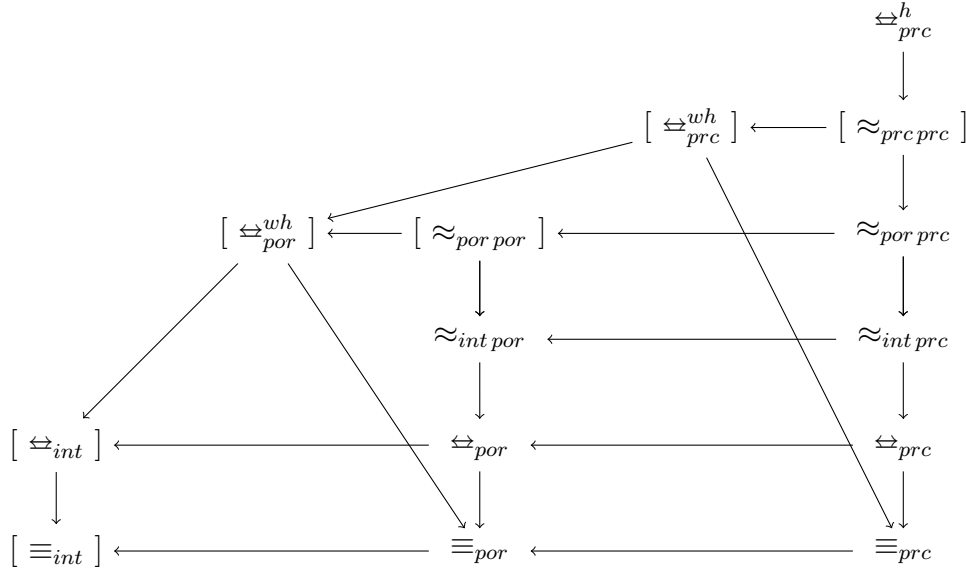


Рис. 12. Иерархия эквивалентностей

Сформулируем следствие, которое определяет иерархию определенных в работе эквивалентностей. Данное утверждение следует из определений, примеров и теорем, рассмотренных ранее.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{TN}, \mathcal{TN}'$ — НВСП, помеченные над Act . Для эквивалентностей R и \tilde{R} из определений 9–16 верно, что

$$(\mathcal{TN})R(\mathcal{TN}') \Rightarrow (\mathcal{TN})\tilde{R}(\mathcal{TN}')$$

тогда и только тогда, когда в графе на рисунке существует путь от R к \tilde{R} , где $[\cong_{int}^wh] = \{ \cong, \equiv_{int} \}$, $[\cong_{int}^wh] = \{ \sim, \cong_{int}, \approx_{int}^wh \}$, $[\cong_{por}^wh] = \{ \cong_{por}^wh, \approx_{por}^wh, \approx_{por}^wh \}$, $[\cong_{prc}^wh] = \{ \cong_{prc}^wh, \approx_{prc}^wh, \approx_{prc}^wh, \approx_{por}^wh, \approx_{prc}^wh \}$, $[\approx_{por}^wh] = \{ \cong_{por}^h, \approx_{por}^wh, \approx_{por}^wh \}$, $[\approx_{prc}^wh] = \{ \approx_{prc}^wh, \approx_{prc}^wh, \approx_{prc}^wh \}$ — множества совпадающих эквивалентностей.

Заключение. В данной работе было показано, что ряд эквивалентностей в спектрах «линейное — ветвящееся время» и «интерливинг — частичный порядок» могут быть обобщены на модель непрерывно-временных сетей Петри со слабой стратегией хода времени и устойчиво атомарным способом сброса часов. В частности, были разработаны и изучены

языковые эквивалентности, обычные бисимуляционные эквивалентности с сохранением и слабым сохранением истории, прямые-обратные бисимуляционные эквивалентности. В ходе исследований были использованы следующие представления выполнений: пробеги (последовательности срабатываний переходов и хода времени), определяющие интерливинговую семантику, и временные процессы, лежащие в основе истинно-параллельных семантик. Были установлены взаимосвязи между пробегами и временными процессами. Показано, что интерливинговые эквивалентности слабее, чем эквивалентности, основанные на ВЧУМ и ВПСС временных процессов. Было установлено, что языковые эквивалентности слабее бисимуляционных. Исследовано влияние учета двух направлений моделирования (прямого и обратного) и истории функционирования системы на бисимуляционные эквивалентности. Основным результатом работы является построение иерархии разработанных эквивалентностей.

В качестве дальнейшей работы планируется обобщить полученные результаты для шаговой семантики, исследовать другие эквивалентности в спектре «линейное — ветвящееся время», изучить взаимосвязи между эквивалентностями НВСП с сильной и слабой семантиками.

Список литературы

1. Bérard B., Cassez F., Haddad S., Lime D., Roux O. H. Comparison of different semantics for time Petri nets // International Symposium on Automated Technology for Verification and Analysis. 2005. P. 293–307.
2. Reynier P. A., Sangnier A. Weak time Petri nets strike back! // International Conference on Concurrency Theory. 2009. P. 557–571.
3. Boyer M., Roux O. H. Comparison of the expressiveness of arc, place and transition time Petri nets // International Conference on Application and Theory of Petri Nets. 2007. P. 63–82.
4. Тарасюк И. В. Эквивалентности для поведенческого анализа параллельных и распределенных вычислительных систем. Академическое издательство Гео, 2007.
5. Virbitskaite I., Bushin D., Best E. True concurrent equivalences in time Petri nets // Fundamenta Informaticae, 149(4), 2016. P. 401–418
6. Вирбицкайте И. Б., Зубарев А. Ю. «Истинно параллельная» семантика непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной и устойчиво атомарной пространственной стратегиями // Программирование, 2021, № 5. С. 60–74.
7. Зубарев А. Ю. Сравнение языковых и бисимуляционных эквивалентностей непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией // Проблемы информатики. 2022. № 4. С. 5–27.



Алексей Юрьевич Зубарев — младш. науч. сотр. Института систем информатики им. А. П. Ершова (Новосибирск). E-mail: a Zubarev@gmail.com. Магистр по направлению «Математика и компьютерные науки» Новосибирского государственного университета. Область научных интересов: теория параллельных процессов; спецификация

и верификация параллельных систем реального времени.

Alexey Yurievich Zubarev — junior research fellow A.P. Ershov Institute of Informatics Systems (Novosibirsk, Russia). E-mail: a Zubarev@gmail.com. Educational degrees: Master's degree in computer science, Novosibirsk State University. Research interests: theory of parallel processes, specification and verification of parallel real-time systems.

Дата поступления — 14.11.2023