

## STRUCTURAL PROPERTIES OF THE MULTIPLEX NETWORK OF SCIENTIFIC JOURNAL AUTHORS

S. V. Bredikhin, N. G. Scherbakova

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,  
630090, Novosibirsk, Russia

---

---

DOI: 10.24412/2073-0667-2025-2-5-18

EDN: YYQLGV

A multilayer network — of which multiplex network is particular case — is a network made up by multiple layers, each of which represents a certain binary relationship between network actors. An example of such a system is a social network in which actors are interconnected by several types of social relations. Bibliographic information on a set of publications of scientific journals can be a source for constructing and studying multilayer networks of various types. Examples include multiplex networks, where different layers reflect the collaboration of authors in different scientific sections of the same scientific field [1]; two-layer networks of authors who are co-authors in the first layer and cite each other in the second [2]; three-layer co-authorship/citation/keyword networks, where the third layer reflects the use of the same keywords by authors in their works [3].

This paper contains the results of the analysis of the parameters of the weighted multiplex network built on the basis of real data extracted from a long-term archive of articles of the scientific journal “Sakharnyi Diabet”. The network consists of two layers: scientific co-authorship and citation. The nodes of the network are the authors of the journal articles. The first layer is the co-authorship graph, the vertices correspond to the authors, the connection between two vertices is established if the corresponding authors have joint publications, the edge weight is equal to the number of publications. The second layer is the directed citation graph, the edge between the citing and cited is established if the reference list of the article in which the citing author participates contains a link to an article from the journal in which the cited author participates. The details of the construction and the parameters of the layers are given in the work [8].

For multilayer networks structural properties of single networks must be modified to take into account their multilayer nature and to distinguish links. In this paper we investigate the set of basic metrics that characterize the structural properties of multiplex network and are the extension of classical network metrics to the case of multiplexes [6, 7]. These include centrality measures which allow ranking nodes and node clustering which reflect the tendency of nodes to form triangles. A number of methods for modifying parameter are considered. One way is a transformation of a multilayer network into a single-layer network for which the corresponding parameters (for example, the degree  $K_i$ ) are calculated. Aggregation of the parameter values calculated separately for each layer ( $C_{\mathcal{M}}^{ly}$ ) gives an idea of the features of the node’s connections in the layers. And consideration of several layers simultaneously, as for example when determining the clustering coefficient  $C_{i,1}$ , allows us to identify the interconnectedness of the structures in which the node is involved.

The results of parameters calculating and analysis are presented. The article is a continuation of the work [8].

---

This work was carried out under state contract with ICMMG SB RAS (FWNM-2025-0005).

**Key words:** complex systems, data analysis, bibliometrics, scientific co-authorship, citation, multiplex networks, actor centrality, clustering.

## References

1. NICOSIA V., LATORA V. Measuring and modeling correlations in multiplex networks // *Physical Review E*. 2015. Vol. 92, 032805. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.032805.
2. MENICHETTI G., REMONDINI D., PANZARASA P., MONDRAGÓN R. J., BIANCONI. Weighted multiplex networks // *PLoS ONE*. 2014. Vol. 9, iss. 6. e97857. DOI: 10.1371/journal.pone.0097857.
3. TUNINETTI M., ALETA A., PAOLOTTI D., MORENO Y., STARNINI M. Prediction of scientific collaborations through multiplex interaction networks // *Phys. Rev. Research*. 2020. Vol. 2, 042029. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.042029.
4. DICKISON M. E., MAGNANI M., ROSSI L. *Multilayer social networks*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2016. ISBN 9781139941907. DOI: 10.1017/CBO9781139941907.
5. LUSSEAU D., BARRETT L., HENZI S. P. Formalizing the multidimensional nature of social networks // *Philos. Trans. of the Royal Soc. of London B*. 2012. Vol. 367, iss. 1599. P. 2108–2118. DOI: 10.1098/rstb.2012.0113.
6. BATTISTON F., NICOSIA V., LATORA V. Structural measures for multiplex networks // *Phys. Rev.* 2014. E 89, 032804. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032804.
7. BIANCONI G. *Multilayer network. Structure and function*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2018. ISBN: 9780191815676.
8. BREDIKHIN S. V., SCHERBAKOVA N. G. Vzveshennaya multipleksnaya set' avtorov nauchnogo zhrnala // *Probleme informatiki*. 2025. № 1. P. 45–59. DOI: 10.24412/2073-0667-2025-1-45-59.
9. BOCCALETTI S., BIANCONI G., CRIADO R., DEL GENIO C. I., GÓMEZ-GARDEÑES J., ROMANCE M., SENDIÑA-NADAL I., WANG Z., ZANIN M. The structure and dynamics of multilayer networks // *Phys. Rep.* 2014. V.544, iss. 1. P. 1–122. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.07.001.
10. GÓMEZ S., DIAZ-GUILERA A., GÓMEZ-GARDENES J., PÉREZ-VICENTE C. J., MORENO Y., ARENAS A. Diffusion dynamics on multiplex networks // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, 028701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.028701.
11. BREDIKHIN S. V., LYAPUNOV V. M., SCHERBAKOVA N. G. *Bibliometricheskie seti nauchnykh statey i zhurnalov*. Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2021. ISBN 978-5-901548-44-8.
12. BERLINGERIO M., COSCIA M., GIANNOTTI F., MONREALE A., PEDRESCHI D. Foundations of multidimensional network analysis // *Intern. Conf. on Adv. in Soc. Networks Analysis and Mining*. 2011. P. 485–489. DOI: 10.1109/ASONAM.2011.103.
13. BRÓDKA P., SKIBICKI K., KAZIENKO P., MUSIAL K. A degree centrality in multi-layered social network // *2011 Intern. Conf. on Comput. Aspects of Soc. Networks (CASoN)*. 2011. P. 237–242. DOI: 10.1109/CASON.2011.6085951.
14. BONACICH P. Power and centrality: A family of measures // *Amer. J. Sociol.* 1987. Vol. 92, iss. 5. P. 1170–1182. DOI: 10.4236/ajcc.2016.51001.
15. SOLÀ L., ROMANCE M., CRIADO R., FLORES J., DEL AMO A. G., BOCCALETTI S. Eigenvector centrality of nodes in multiplex networks // *Chaos*. 2013. Vol. 2, iss. 3, 033131. DOI: 10.1063/1.4818544.
16. DE DOMENICO M., SOLE-RIBALTA A., OMODEI E., GÓMEZ S., ARENAS A. Centrality in interconnected multilayer networks // *Nature Commun.* 2015. Vol. 6. 6868. DOI: 10.1038/incomms7868.
17. WATTS D. J., STROGATZ S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks // *Nature*. 1998. Vol. 393. P. 440–442. DOI: 10.1038/30918.
18. LATORA V., MARCHIORI M. Economic small-world behavior in weighted networks // *Eur. Phys. J.* 2003. B. 52. P. 249–263. DOI: 10.1140/epjb/e2003-00095-5.

19. CRIADO R., FLORES J., GARCÍA DEL AMO A., GÓMEZ-GARDEÑES J., ROMANCE M. A mathematical model for networks with structures in the mesoscale // Intern. J. of Comput. Math. 2012. Vol. 89, iss. 3. P. 291–309. DOI: 10.1080/00207160.2011.577212.

20. BOLLOBAS B., RIORDAN O. M. Mathematical results on scale-free random graphs. Handbook of graphs and networks: From genome to Internet. Weinheim (FRG): Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2002. P. 1–34. ISBN: 9783527403363.

21. COZZO E., KIVELA M., DE DOMENICO M., SOLE A., ARENAS A. GÓMEZ S., PORTER M. A., MORENO Y. Structure of triadic relations in multiplex networks // New J. of Phys. 2015. Vol. 17, No 7, 073029. DOI: 10.1088/1367-2630/17/7/07/3029.

22. BRÓDKA P., MUSIAŁ K., KAZIENKO P. A method for group extraction in complex social networks // Commun. in Comput. and Inform. Sci. Springer Berlin Heidelberg. 2010. Vol. 111. P. 238–247. DOI: 10.1007/978-3-642-16318-0\_27.

23. BRÓDKA P., KAZIENKO P., MUSIAŁ K., SKIBICKI K. Analysis of neighbourhoods in multi-layered dynamic social networks // International J. of Computational Intelligence Systems. 2012. Vol. 5, iss. 3. P. 582–596. DOI: 1.1080/18756891.2012.696922.

# СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА МУЛЬТИПЛЕКСНОЙ СЕТИ АВТОРОВ НАУЧНОГО ЖУРНАЛА

С. В. Бредихин, Н. Г. Щербакова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.177

DOI: 10.24412/2073-0667-2025-2-5-18

EDN: YYQLGV

Ряд социальных комплексных систем допускает формальное представление в виде мультиплексной сети, в которой множество однородных акторов объединены внутренними и межслойными отношениями. Каждый слой представляет свой тип бинарных отношений. В статье представлен метод моделирования реальной двухслойной взвешенной сети авторов научного журнала. Приведены формальные определения основных параметров, характеризующих топологию мультиплексной сети. Выполнен вычислительный эксперимент, иллюстрирующий метод моделирования сети авторов научного журнала, измерены значения параметров, определяющих ее структуру.

**Ключевые слова:** комплексные системы, анализ данных, библиометрия, научное соавторство, цитирование, мультиплексные сети, центральность акторов, кластеризация.

**Введение.** Многослойная сеть, состоящая из  $M$  слоев, формируется набором из  $M$  сетей, описывающих взаимодействия узлов внутри каждого слоя, и  $M(M-1)/2$  сетей, описывающих взаимодействия между узлами для каждой пары различных слоев. Мультиплексные сети являются классом многослойных сетей, представляющим комплексные системы, в которых одно и то же множество акторов взаимодействует между собой несколькими способами, при этом каждый тип взаимодействия представлен отдельным слоем.

Библиографическая информация о множестве статей, опубликованных в научных журналах, может служить источником данных для построения и исследования многослойных сетей различных типов. Например, мультиплексные сети, в которых разные слои отражают сотрудничество авторов в разных научных разделах одной научной области [1]; двухслойные сети авторов, являющихся соавторами в первом слое и цитирующих друг друга во втором [2]; трехслойные сети соавторства / цитирования / ключевых слов, где третий слой отражает использование авторами в работах одних и тех же ключевых слов [3].

Методы анализа многослойных сетей условно делятся на четыре типа [4]. Первый состоит в преобразовании многослойной сети в однослойную с последующим применением традиционных методов сетевого анализа. Второй заключается в применении существующих методов отдельно к каждому слою и слиянии или сравнении результатов. Два других метода предполагают одновременное рассмотрение всех слоев. Разница заключается в том, что в первом случае слои различаются с помощью численных характеристик, например,

---

Исследования выполнены в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (FWNM-2025-0005).

весов, но имеют сопоставимую природу, а меры, базирующиеся на таком подходе, обычно представляются в виде единых числовых значений, объединяющих вклады разных типов ребер. Например, путь между узлами может содержать ребра разных слоев. Во втором случае акцент делается на качественном различии, существующем между слоями. Предполагается, что акторы взаимодействуют в различных контекстах, представленных слоями. Ребра, относящиеся к разным слоям, не смешиваются друг с другом [5]. Это относится, например, к установлению пути между узлами.

Одно из направлений исследования — распространение на контекст многослойных сетей понятий, традиционно используемых для характеристики структурных свойств однослойной сети. Это относится к таким параметрам узла, как степень, коэффициент кластеризации, центральность. Параметры могут быть обобщены различными способами (см. обзоры [6, 7]).

Данная публикация содержит результаты анализа параметров узлов взвешенной мультиплексной сети, построенной на основе реальных данных, извлеченных из многолетнего архива статей научного журнала. Сеть состоит из двух слоев: научного соавторства и цитирования. Исследуются способы расширения на мультиплексную сеть параметров, отражающих значимость узла в структуре сети. Статья является продолжением работы [8].

**1. Определения.** Согласно [9], *многослойной* сетью называют пару  $\mathcal{M} = (G, C)$ , где  $G$  — множество  $G = \{G_\alpha, \alpha \in \{1, \dots, M\}\}$  ориентированных (либо неориентированных), взвешенных (либо невзвешенных) графов  $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ , называемых слоями, а  $C = \{E_{\alpha\beta} \subseteq V_\alpha \times V_\beta; \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}, \alpha \neq \beta\}$  — множество ребер между узлами различных слоев  $G_\alpha$  и  $G_\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Элементы  $E_\alpha$  называются *внутрислойными* ребрами, а элементы  $E_{\alpha\beta}$  — *межслойными*. *Проекцией* многослойной сети называют граф  $proj(\mathcal{M}) = (V_{\mathcal{M}}, E_{\mathcal{M}})$ , в котором множества узлов и ребер определены следующим образом:  $V_{\mathcal{M}} = \bigcup_{\alpha=1}^M V_\alpha$ ;  $E_{\mathcal{M}} = (\bigcup_{\alpha=1}^M E_\alpha) \cup (\bigcup_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M E_{\alpha\beta})$ .

*Мультиплексная* сеть  $\mathcal{M}$  является особым видом многослойной сети, в котором  $V_1 = V_2 = \dots = V_M = V$ ,  $|V| = N$  и межслойные ребра разрешены только между репликами одних и тех же физических узлов, т. е.  $\forall \alpha, \beta$  таких, что  $\alpha \neq \beta$ ,  $E_{\alpha\beta} = \{(v, v), v \in V\}$ . Другими словами, мультиплексную сеть можно рассматривать как фиксированный набор узлов, соединенных различными типами ребер. Обозначим  $A^{|\alpha|} = (a_{ij}^{|\alpha|})$  матрицу смежности слоя  $\alpha \in \{1, \dots, M\}$ . Для взвешенной мультиплексной сети  $a_{ij}^{|\alpha|}$  означает вес ребра между узлами  $i, j$  в слое  $\alpha$ .

*Проекция*  $proj(\mathcal{M})$  мультиплексной сети является однослойной сетью, элементы матрицы смежности которой определяются как

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{\alpha=1}^M a_{ij}^{|\alpha|} > 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

Пример двухслойной мультиплексной сети  $\mathcal{M}$  (узлы занумерованы) и ее проекции  $proj(\mathcal{M})$  приведен на рис. 1:  $1a$  — два слоя сети  $\mathcal{M}$ ,  $1b$  — их проекция  $proj(\mathcal{M})$ .

*Многослойной матрицей смежности* (*supra-adjacency matrix*) мультиплексной сети  $\mathcal{M}$ , согласно [10], называют блочно-диагональную матрицу, по главной диагонали которой размещены матрицы смежности слоев, остальные матрицы единичные. Например, при наличии двух слоев (в каждом по три элемента) многослойная матрица смежности выглядит

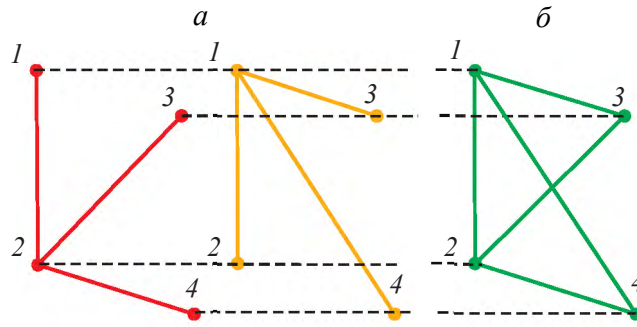


Рис. 1. Пример: мультиплексная сеть  $\mathcal{M}$  (а); проекция  $proj(\mathcal{M})$  (б)

как  $A_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} A_1 & I_3 \\ I_3 & A_2 \end{bmatrix}$ ,  $A_i$  — матрица смежности слоя  $i$ ,  $I_3$  — квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1.

**2. Центральность узлов.** При анализе комплексных сетей проблема идентификации узлов, играющих центральную роль в структуре, является одной из важных. Для однослойных сетей существует набор параметров, измеряющих структурную значимость каждого узла: степень, близость к остальным узлам, роль посредника между узлами и т. д. (см. [11]). Одна из основных целей определения центральности — ранжирование узлов для создания упорядоченного списка в соответствии со значимостью. Рассмотрим ряд способов распространения мер центральности на многослойные сети. Там, где специально не оговорено, имеются в виду неориентированные мультиплексные сети.

2.1. *Центральность по степени.* Степенью узла  $i \in V$  мультиплексной сети  $\mathcal{M}$  называют вектор, элементами которого являются степени  $i$  в слоях [12, 6]:

$$\mathbf{k}_i = \left( k_i^{|\alpha|}, \dots, k_i^{|\alpha|} \right), i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где  $k_i^{|\alpha|}$  — степень узла в рамках слоя  $\alpha$ ;  $k_i^{|\alpha|} = \sum_j a_{ij}^{|\alpha|}$  для невзвешенной мультиплексной сети и  $k_i^{|\alpha|} = \sum_j \theta(a_{ij}^{|\alpha|})$  для взвешенной мультиплексной сети ( $\theta(x) = 1$ , если  $x > 0$ , и  $\theta(x) = 0$  в противном случае).

Чтобы иметь возможность ранжировать узлы, предлагается агрегировать информацию, предоставляемую векторами (2). Агрегированная степень [7]  $K_i$  узла  $i$  определяется как степень узла в проекции мультиплекса:

$$K_i = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}. \quad (3)$$

Возможны другие способы агрегации, например, любая линейная комбинация элементов вектора.

В работе [6] определено понятие *агрегированной степени перекрытия*  $O_i$  (в монографии [7] этот параметр называется *агрегированной силой*  $S_i$  вершины  $i$ ) как суммы элементов вектора степеней:

$$O_i = \sum_{\alpha=1}^M k_i^{|\alpha|}. \quad (4)$$

Меры (3), (4) позволяют сравнивать узлы согласно *центральности по степени*. Другие варианты определения центральности по степени можно найти в работах [4, 12, 13].

2.2. *Центральность по собственному вектору* узла, определенная в работе [14] для однослойных сетей, учитывает не только число ребер узла, но и их качество. Узел имеет высокую центральность, если высокую центральность имеют его соседи. Для каждого узла  $i$  вычисляется мера центральности  $x_i$ , удовлетворяющая решению уравнения  $\lambda_1 x_i = \sum_{j=1}^N a_{ji} x_j$ , где  $\lambda_1$  — наибольшее собственное значение матрицы смежности  $A$  однослойной сети.

Одним из простейших способов расширения меры центральности на многослойные сети, представленном в работе [15], является изучение вектора центральности узлов отдельно для каждого слоя  $\mathbf{c}_{|\alpha|} = (c_1^{|\alpha|}, c_2^{|\alpha|}, \dots, c_N^{|\alpha|})$ ,  $1 \leq \alpha \leq M$ . Таким образом, каждому узлу  $i$  соответствует вектор, элементами которого являются значения меры центральности для каждого слоя:  $\mathbf{c}_i = (c_i^{[1]}, \dots, c_i^{[M]}) \in \mathbb{R}^M$ .

Не зависящая от слоя центральность сети  $M$  (подобная центральности по собственному вектору) представляется в виде матрицы:

$$C = (\mathbf{c}_{|1|}^\top | \mathbf{c}_{|2|}^\top | \dots | \mathbf{c}_{|M|}^\top) \in \mathbb{R}^{N \times M}. \quad (5)$$

Значение для узла  $i$  — это  $i$ -я строка матрицы  $C$ . Далее, также как в случае степени, требуется агрегация значений, например, в качестве *центральности узла по собственному вектору*  $C_E(i)$  вычисляется сумма по строке  $i$ , что позволяет ранжировать узлы. Основным недостатком метода является игнорирование взаимодействия между узлами слоев.

С учетом того, что центральность по собственному вектору должна быть пропорциональна центральности соседей, в работе [15] для случая равноценных слоев определена *единая мера центральности по собственному вектору* как положительный нормализованный (если существует) собственный вектор  $\tilde{\mathbf{c}}$  матрицы

$$\tilde{A} = \sum_{\alpha=1}^M (A^{|\alpha|})^\top, \quad (6)$$

где  $A^{|\alpha|}$  — матрица смежности слоя  $\alpha$ . *Центральность узла по собственному вектору*  $C'_E(i)$  — это соответствующий элемент вектора  $\tilde{\mathbf{c}}$ .

При вычислении центральности узлов отдельно для каждой сети (5) или при агрегировании информации в единую сеть (6) не учитывается взаимосвязанность структур. В работе [15] приведены определения центральности по собственному вектору при наличии влияния одного слоя на другой, а также влияния соседних узлов, находящихся в слое, отличном от текущего. В работе [16] для определения центральности по собственному вектору использован тензорный формализм.

**3. Коэффициент кластеризации.** Важной характеристикой однослойной сети является тенденция ее узлов к образованию «треугольников», т. е. простых циклов с участием трех узлов. Параметр численно определяется через коэффициент кластеризации. Для узла  $i$  сети  $G = (V, E)$  в соответствии с [17] *локальный коэффициент кластеризации*  $C_G(i)$  определен в виде дроби, числитель которой равен числу ребер между соседями узла  $i$ , а знаменатель — максимально возможному числу ребер между соседями узла  $i$ . В терминах матрицы смежности  $A$  значение параметра  $C_G(i)$  выражается в виде дроби, числитель которой равен  $\sum_{j \neq i, m \neq i} a_{ij} a_{jm} a_{mi}$ , а знаменатель —  $k_i(k_i - 1)$ . В этом случае *глобальный коэффициент кластеризации* (называемый также *локальным коэффициентом кластеризации*

сети) — это среднее значение по всем узлам:  $C_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_G(i)$ . Следует заметить, что если число ребер узла  $i$  меньше двух, то знаменатель будет равен нулю и значение не определено. В этом случае имеются два варианта: а) считать, что  $C_G(i) = 0$  и учитывать данный узел при вычислении среднего значения коэффициента; б) считать значение неопределенным и не учитывать узел.

*Транзитивность сети.* Следуя [18], параметр  $T$  определяется в виде дроби, числитель которой равен утроенному числу треугольников, а знаменатель — числу связных троек, здесь связная тройка — подграф с тремя вершинами и двумя ребрами, а треугольник — полный подграф с тремя вершинами и тремя ребрами. Транзитивность более точно представляет структуру сети, поскольку в разреженных сетях она не доминирует за счет вкладов, поступающих от узлов степени меньше двух, которые имеют локальный коэффициент кластеризации, равный нулю.

3.1. Коэффициент кластеризации мультиплексной сети можно обобщить несколькими способами. Для определения локального коэффициента узла в многослойной сети  $\mathcal{M}$ , согласно [19], введем следующие обозначения. Пусть  $N(i)$  — множество соседей узла  $i$  в проекции сети  $proj(\mathcal{M})$ , а  $N_\alpha(i) = N(i) \cap V_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Определим подграф  $\overline{S}_\alpha(i)$  в слое  $G_\alpha$ , индуцированный  $N_\alpha(i)$ , т.е.  $\overline{S}_\alpha(i) = (N_\alpha(i), \overline{E}_\alpha(i))$ , где  $\overline{E}_\alpha(i) = \{(k, j) \in E_\alpha; k, j \in N_\alpha(i)\}$ . Соответственно,  $\overline{S}(i)$  является подграфом сети  $proj(\mathcal{M})$ , индуцированным множеством  $N(i)$ .

Коэффициент кластеризации  $C_{\mathcal{M}}(i)$  узла  $i$ , согласно [19], определяется как

$$C_{\mathcal{M}}(i) = \frac{2 \sum_{\alpha=1}^M |\overline{E}_\alpha(i)|}{\sum_{\alpha=1}^M (|N_\alpha(i)|)(N_\alpha(i) - 1)} \quad (7)$$

Глобальный коэффициент кластеризации  $C_{\mathcal{M}}$  определяется как среднее значение коэффициента  $C_{\mathcal{M}}(i)$  по всем узлам:

$$C_{\mathcal{M}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{\mathcal{M}}(i). \quad (8)$$

3.2. *Послойный коэффициент кластеризации  $C_{\mathcal{M}}^{ly}$ .* Для вычисления значения этого параметра отдельно вычисляются коэффициенты кластеризации для каждого слоя  $\alpha$  и берется их среднее значение. Таким образом,

$$C_{\mathcal{M}}^{ly} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^M C_{G_\alpha} \quad (9)$$

3.3. *Глобальный коэффициент сети  $proj(\mathcal{M})$*  может рассматриваться в качестве глобального коэффициента сети  $\mathcal{M}$ :

$$C_{\mathcal{M}} = C_{proj(\mathcal{M})} \quad (10)$$

Отличие  $C_{proj(\mathcal{M})}$  от  $C_{\mathcal{M}}^{ly}$  прослеживается на рис. 1. Для обоих слоев сети  $\mathcal{M}$  параметр  $C_{G_\alpha} = 0$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , в то время как параметр  $C_{proj(\mathcal{M})}$  не равен нулю.

В работе [19] показано, что между значением локального коэффициента узла мультиплексной сети, согласно (8), и значением локального коэффициента того же узла, согласно

(10), выполняется следующее соотношение:  $\frac{1}{M-q(i)}C_{proj(\mathcal{M})}(i) \leq C_{\mathcal{M}}(i) \leq C_{proj(\mathcal{M})}(i)$ , где  $q(i)$  — число слоев, в которых узел  $i$  имеет менее двух соседей.

3.4. *Треугольники и связи.* В работе [6] определения коэффициентов кластеризации учитывают возможность принадлежности ребер треугольника (цикла длиной 3) к разным слоям. Определим *2-треугольник* как треугольник, образованный ребром, принадлежащим одному слою, и двумя ребрами, принадлежащими другому. Точно также *3-треугольник* — это треугольник, состоящий из трех ребер, лежащих в разных слоях. Кроме того, *1-триада* с центром в узле  $i$ , например  $(j - i - k)$ , — это триада, в которой оба ребра  $(j, i)$  и  $(i, k)$  находятся в одном и том же слое. Определяем *2-триаду* как триаду, два ребра которой принадлежат двум разным слоям.

*Коэффициент кластеризации*  $C_{i,1}$  узла  $i$  неориентированной мультиплексной сети определяется как соотношение числа 2-треугольников с вершиной в  $i$  и числа 1-триад с центром в  $i$ . В терминах многослойной матрицы смежности  $A_{\mathcal{M}}$  коэффициент  $C_{i,1}$  имеет вид:

$$C_{i,1} = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\alpha' \neq \alpha} \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{|\alpha|} a_{jm}^{|\alpha'|} a_{mi}^{|\alpha|})}{(M-1) \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{|\alpha|} a_{mi}^{|\alpha|})} = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\alpha' \neq \alpha} \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{|\alpha|} a_{jm}^{|\alpha'|} a_{mi}^{|\alpha|})}{(M-1) \sum_{\alpha} k_i^{|\alpha|} (k_i^{|\alpha|} - 1)}. \quad (11)$$

Чтобы получить нормализованное значение, следует разделить выражение на  $(M-1)$ , поскольку каждая 1-триада теоретически может замкнуться как 2-треугольник на каждом из  $M$  слоев мультиплекса, исключая слой, которому принадлежат ее края, чтобы иметь нормализованный коэффициент.

Коэффициент кластеризации  $C_{i,2}$  для мультиплексных сетей определяется как соотношение между числом 3-треугольников с узлом  $i$  в качестве вершины и числом 2-триад с центром в  $i$ . С точки зрения многослойной матрицы смежности имеем:

$$C_{i,2} = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\alpha' \neq \alpha} \sum_{\alpha'' \neq \alpha, \alpha'} \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{|\alpha|} a_{jm}^{|\alpha''|} a_{mi}^{|\alpha'|})}{(M-2) \sum_{\alpha} \sum_{\alpha' \neq \alpha} \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{|\alpha|} a_{mi}^{|\alpha'|})}. \quad (12)$$

В то время как  $C_{i,1}$  является подходящим определением для мультиплексов с  $M \geq 2$ ,  $C_{i,2}$  (12) можно определить только для сетей, состоящих как минимум из трех слоев. Усредняя значения по всем узлам, получим коэффициенты кластеризации сети  $C_1$  и  $C_2$ . Так,

$$C_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{i,1}. \quad (13)$$

3.5. *Транзитивность.* В работе [6] предложены две меры транзитивности  $T$  для многослойной сети. Определим  $T_1$  как отношение числа 2-треугольников к числу 1-триад, умноженному на  $(M-1)$ . Определим  $T_2$  как соотношение между числом 3-треугольников и числом 2-триад, умноженным на  $(M-2)$ .

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{i,r,s} (a_{ir}^{|\alpha|} a_{rs}^{|\beta|} a_{si}^{|\alpha|})}{(M-1) \sum_{\alpha=1}^M \sum_{i=1}^N k_i^{|\alpha|} (k_i^{|\alpha|} - 1)}, \\
T_2 &= \frac{\sum_{\alpha=1}^M \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{\beta \neq \alpha \neq \gamma} \sum_{i,r,s} (a_{ir}^{|\alpha|} a_{rs}^{|\beta|} a_{si}^{|\gamma|})}{(M-2) \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{i=1}^N k_i^{|\alpha|} k_i^{|\gamma|}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Следует отметить, что определение  $T_1$  применимо к любой многослойной сети, тогда как  $T_2$  только для случая  $M \geq 3$ .

Для демонстрации разницы между глобальным коэффициентом кластеризации  $C_1$  и транзитивностью  $T_1$  можно (подобно равенству (1.18) из [20] для однослойных сетей) привести равенство

$$T_1 = \frac{\sum_i \left( \sum_{\alpha} (k_i^{|\alpha|} (k_i^{|\alpha|} - 1)) / 2 \right) C_{i,1}}{(M-1) \sum_i \left( \sum_{\alpha} (k_i^{|\alpha|} (k_i^{|\alpha|} - 1)) / 2 \right)} \tag{15}$$

(вершины  $i$ , для которых  $k_i < 2$  не учитываются).

Обобщение коэффициентов кластеризации для мультиплексных сетей с учетом специфики моделируемых систем представлено в работе [21]. Альтернативные подходы предложены в работах [22, 23].

**4. Вычислительный эксперимент.** Взвешенная двухслойная мультиплексная сеть авторства  $\mathcal{M}^{cc}$  построена на основе данных, извлеченных из записей электронного XML-архива научного журнала «Сахарный диабет» (ISSN 2072-0378), находящегося в свободном доступе. Рассматривается множество статей  $P$ , опубликованных в журнале ( $|P| = 991$ ), и множество авторов  $A$  ( $|A| = 1694$ ), участвовавших в их создании. В свою очередь,  $P$  представлено объединением множеств  $P^m$  — статей, созданных в соавторстве, и множества  $P^s$  — индивидуальных статей ( $|P^m| = 843$ ,  $|P^s| = 148$ ). Аналогично множество авторов  $A$  представлено объединением множеств  $A = A^m \cup A^s$ , где  $A^m$  — подмножество авторов, имеющих совместные публикации,  $A^s$  — имеющих исключительно индивидуальные публикации ( $|A^m| = 1676$ ,  $|A^s| = 18$ ).

В качестве узлов сети выступают авторы статей. Первый слой представлен графом соавторства — граф соавторства  $G_1 = (V, E1)$ ,  $|V| = |A|$ , вершины которого соответствуют авторам, ребро между двумя вершинами устанавливается в случае, если соответствующие авторы имеют совместные публикации, вес ребра равен числу публикаций. Второй слой — ориентированный граф цитирования  $G_2 = (V, E2)$ , ребро между цитирующим и цитируемым устанавливается, если в списке литературы статьи, в которой участвует цитирующий автор, присутствует ссылка на статью из журнала, в которой участвует цитируемый автор. Детали построения и параметры слоев приведены в работе [8]. Для сети  $\mathcal{M}^{cc}$  вычислен ряд параметров, характеризующих ее структурные свойства.

**4.1. Агрегированная степень.** Для каждого узла  $i$  сети  $\mathcal{M}^{cc}$  вычислены агрегированная степень  $K_i$ , согласно (3), и агрегированная степень перекрытия  $O_i$ , согласно (4). При построении проекции сети, согласно (1), и при вычислении степени узлов второго слоя игнорируется ориентация ребер, т. е.  $k_i^{[2]} = \sum_j (\theta(a_{ij}^{[2]}) + \theta(a_{ji}^{[2]}))$ .

Степень  $K_i$  учитывает только наличие ребра  $i - j$  в каком-либо слое, а мера  $O_i$  учитывает и число слоев, в которых ребро  $i - j$  присутствует. Однако отмечается значительная корреляция между значениями агрегированных степеней, вычисленных двумя способами: коэффициент корреляции Пирсона  $r = 0,9954$ , коэффициент ранговой корреляции Кендалла  $\tau = 0,9603$  (коэффициент ранговой корреляции Спирмена неточен из-за наличия одинаковых значений). На основании этих мер произведено ранжирование узлов  $\mathcal{M}^{cc}$ , которое, например, показало, что 10 узлов имеют наивысшие ранги, согласно обоим мерам центральности.

4.2. *Центральность по собственному вектору.* Для узлов  $\mathcal{M}^{cc}$  вычислена не зависящая от слоя центральность по собственному вектору  $C_E$ , согласно (5), в качестве функции агрегации выступает сумма значений центральности, т. е.  $C_E(i) = c_i^{[1]} + c_i^{[2]}$ . В этом случае для обоих слоев при вычислении меры учитываются веса ребер, а для второго слоя и ориентация. При вычислении единой меры центральности  $C'_E$ , согласно (6), матрица  $A^{[1]}$  — это невзвешенная матрица смежности графа соавторства, матрица  $A^{[2]}$  — невзвешенная матрица смежности графа цитирования (направление ребер игнорируются). Проведено сравнение значений центральности по собственному вектору, вычисленных двумя способами, так коэффициент корреляции Пирсона  $r = 0,7697$ , коэффициент ранговой корреляции Кендалла  $\tau = 0,7530$ .

Исследована взаимосвязь центральности по степени  $(K, O)$  и центральности по собственному вектору  $(C_E, C'_E)$ . В табл. 1 приведены коэффициенты ранговой корреляции Кендалла значений центральности в зависимости от способа вычисления мер.

Мера центральности по собственному вектору  $C_E$  менее зависима от степени узлов в проекции, поскольку вычислена для каждого слоя отдельно с учетом весов и ориентации. В нашем случае при вычислении матрицы  $\tilde{A}$  можно в качестве первого слагаемого рассматривать матрицу смежности графа первого слоя, а граф второго слоя преобразовать во взвешенный неориентированный и рассматривать его матрицу смежности в качестве второго слагаемого.

4.3. *Коэффициенты кластеризации.* Для  $\mathcal{M}^{cc}$  вычислены четыре варианта глобального коэффициента кластеризации:  $C_M$ , согласно (7, 8),  $C_M^{ly}$ , согласно (9),  $C_{proj(\mathcal{M})}$ , согласно (10),  $C_1$ , согласно (11, 13). Коэффициент транзитивности сети  $\mathcal{M}^{cc}$  (14) равен 0,4268431. В табл. 2

приведены значения коэффициентов кластеризации; 1-я строка содержит коэффициенты, вычисленные с учетом узлов, у которых число ребер меньше двух, при подсчете среднего значения (значение коэффициента узла приравнивается нулю); 2-я строка содержит коэффициенты, вычисленные без учета таких узлов.

В табл. 3 представлены коэффициенты корреляции Пирсона между соответствующими значениями локальных коэффициентов кластеризации узлов  $\mathcal{M}^{cc}$ , участвующих в вычислении глобальных коэффициентов  $C_M$ ,  $C_{proj(\mathcal{M})}$  и  $C_1$ .

Таблица 1  
Коэффициенты корреляции Кендалла мер центральности по степени и собственному вектору

$\tau$	$K$	$O$
$C_E$	0,5995	0,6042
$C'_E$	0,7499	0,7355

Таблица 2  
Глобальные коэффициенты кластеризации  $\mathcal{M}^{cc}$ , вычисленные согласно (7–12)

$C_M$	$C_M^{ly}$	$C_{proj(\mathcal{M})}$	$C_1$
0,5515699	0,7314537	0,8232086	0,3739028
0,6860201	0,75843305	0,8562999	0,5493420

Таблица 3

Корреляции Пирсона  
локальных коэффициентов  $\mathcal{M}^{cc}$

$\rho$	$C_{\mathcal{M}(i)}$	$C_{proj(\mathcal{M})(i)}$	$C_{i,1}$
$C_{\mathcal{M}(i)}$	–	0.08313096	0.7287555
$C_{proj(\mathcal{M})(i)}$	0.0831309	–	0.03582911
$C_{i,1}$	0.7287555	0.03582911	–

Корреляция между значениями коэффициентов, учитывающих одновременное наличие двух слоев, выше, чем с коэффициентом  $C_{proj(\mathcal{M})(i)}$ , вычисленным на основе проекции. Заметим, что сеть  $proj(\mathcal{M}^{cc})$  обладает свойством «малого мира» [17], т. е.  $proj(\mathcal{M}^{cc})$  является

графом, характеристическая длина пути которого  $L$  близка к характеристической длине пути случайного графа (с тем же числом вершин  $N$  и той же средней степенью  $\langle k \rangle$ ), определяемой как  $L_{rand} = \ln(N)/\ln(\langle k \rangle)$ , а глобальный коэффициент кластеризации намного выше глобального коэффициента случайного графа, определяемого как  $C_{rand} = \langle k \rangle/N$ . В данном случае  $L_{proj(\mathcal{M})}$  2,607897,  $L_{rand}$  2,212184;  $C_{proj(\mathcal{M})}$  0,823209,  $C_{rand}$  0,017081.

Вычислительный эксперимент выполнен в среде программирования R с использованием пакета *igraph*.

**Заключение.** Работа содержит формальное описание многослойной сети и варианты переноса определений структурных параметров, используемых для однослойных сетей, на формализм многослойных.

Приведены результаты вычисления и анализа серии параметров двухслойной мультиплексной сети, построенной на основе данных, извлеченных из архива научного журнала. Анализируемая сеть состоит из двух взвешенных слоев, узлами которых являются авторы статей. Ребра между узлами первого слоя устанавливаются на основе бинарного отношения соавторства, вес равен числу соавторов, а ребра второго слоя — на бинарном отношении цитирования, вес равен числу цитирований. Мультиплексная структура позволяет одновременно рассмотреть два типа отношений между авторами журнала: соавторство и цитирование.

Рассмотрен ряд способов модификации фундаментальных структурных свойств однослойных сетей с учетом многослойной природы мультиплексов. Одним из распространенных методов является преобразование многослойной сети в однослойную путем построения проекции, для которой вычисляются соответствующие параметры (например, степень  $K_i$ ). Однако проекция отражает только суммарное участие узла в структуре сети без учета различий в каждом слое. Агрегация значений параметров, вычисленных отдельно для каждого слоя (например, коэффициент кластеризации  $C_{\mathcal{M}}^{ly}$ ), дает представление об особенностях связей узла в слоях. А рассмотрение одновременно нескольких слоев (например, коэффициент кластеризации  $C_{i,1}$ ) позволяет выявить взаимосвязанность структур, в которые вовлечен узел, а именно, насколько вероятно, что соавторы рассматриваемого автора связаны между собой через цитирование, а связанные с данным автором через цитирование соседи являются соавторами. Использование того или иного способа зависит от рассматриваемой сети и от свойств, которые необходимо выделить.

Авторы благодарят А. В. Феофанова за техническую поддержку на этапе проведения вычислительного эксперимента.

## Список литературы

1. NICOSIA V., LATORA V. Measuring and modeling correlations in multiplex networks // Physical Review E. 2015. Vol. 92, 032805. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.032805.

2. MENICETTI G., REMONDINI D., PANZARASA P., MONDRAGÓN R. J., BIANCONI. Weighted multiplex networks // PLoS ONE. 2014. Vol. 9, iss. 6. e97857. DOI: 10.1371/journal.pone.0097857.
3. TUNINETTI M., ALETA A., PAOLOTTI D., MORENO Y., STARNINI M. Prediction of scientific collaborations through multiplex interaction networks // Phys. Rev. Research. 2020. Vol. 2, 042029. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.042029.
4. DICKISON M. E., MAGNANI M., ROSSI L. Multilayer social networks. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2016. ISBN 9781139941907. DOI: 10.1017/CBO9781139941907.
5. LUSSEAU D., BARRETT L., HENZI S. P. Formalizing the multidimensional nature of social networks // Philos. Trans. of the Royal Soc. of London B. 2012. Vol. 367, iss. 1599. P. 2108–2118. DOI: 10.1098/rstb.2012.0113.
6. BATTISTON F., NICOSIA V., LATORA V. Structural measures for multiplex networks // Phys. Rev. 2014. E 89, 032804. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032804.
7. BIANCONI G. Multilayer network. Structure and function. Oxford: Oxford Univ. Press, 2018. ISBN: 9780191815676.
8. БРЕДИХИН С. В., ЩЕРБАКОВА Н. Г. Взвешенная мультиплексная сеть авторов научного журнала // Проблемы информатики. 2025. № 1. С. 45–49. DOI: 10.24412/2073-0667-2025-1-45-59.
9. BOCCALETTI S., BIANCONI G., CRIADO R., DEL GENIO C. I., GÓMEZ-GARDEÑES J., ROMANCE M., SENDIÑA-NADAL I., WANG Z., ZANIN M. The structure and dynamics of multilayer networks // Phys. Rep. 2014. V.544, iss. 1. P. 1–122. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.07.001.
10. GOMEZ S., DIAZ-GUILERA A., GOMEZ-GARDENES J., PEREZ-VICENTE C. J., MORENO Y., ARENAS A. Diffusion dynamics on multiplex networks // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, 028701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.028701.
11. БРЕДИХИН С. В., ЛЯПУНОВ В. М., ЩЕРБАКОВА Н. Г. Библиометрические сети научных статей и журналов. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2021. ISBN 978-5-901548-44-8.
12. BERLINGERIO M., COSCIA M., GIANNOTTI F., MONREALE A., PEDRESCHI D. Foundations of multidimensional network analysis // Intern. Conf. on Adv. in Soc. Networks Analysis and Mining. 2011. P. 485–489. DOI: 10.1109/ASONAM.2011.103.
13. BRÓDKA P., SKIBICKI K., KAZIENKO P., MUSIAL K. A degree centrality in multi-layered social network // 2011 Intern. Conf. on Comput. Aspects of Soc. Networks (CASoN). 2011. P. 237–242. DOI: 10.1109/CASON.2011.6085951.
14. BONACICH P. Power and centrality: A family of measures // Amer. J. Sociol. 1987. Vol. 92, iss. 5. P. 1170–1182. DOI: 10.4236/ajcc.2016.51001.
15. SOLA L., ROMANCE M., CRIADO R., FLORES J., DEL AMO A. G., BOCCALETTI S. Eigenvector centrality of nodes in multiplex networks // Chaos. 2013. Vol. 2, iss. 3, 033131. DOI: 10.1063/1.4818544.
16. DE DOMENICO M., SOLÉ-RIBALTA A., OMODEI E., GÓMEZ S., ARENAS A. Centrality in interconnected multilayer networks // Nature Commun. 2015. Vol. 6. 6868. DOI: 10.1038/incomms7868.
17. WATTS D. J., STROGATZ S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks // Nature. 1998. Vol. 393. P. 440–442. DOI: 10.1038/30918.
18. LATORA V., MARCHIORI M. Economic small-world behavior in weighted networks // Eur. Phys. J. 2003. B. 52. P. 249–263. DOI: 10.1140/epjb/e2003-00095-5.
19. CRIADO R., FLORES J., GARCÍA DEL AMO A., GÓMEZ-GARDEÑES J., ROMANCE M. A mathematical model for networks with structures in the mesoscale // Intern. J. of Comput. Math. 2012. Vol. 89, iss. 3. P. 291–309. DOI: 10.1080/00207160.2011.577212.
20. BOLLOBAS B., RIORDAN O. M. Mathematical results on scale-free random graphs. Handbook of graphs and networks: From genome to Internet. Weinheim (FRG): Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2002. P. 1–34. ISBN: 9783527403363.

21. COZZO E., KIVELA M., DE DOMENICO M., SOLÉ A., ARENAS A. GÓMEZ S., PORTER M. A., MORENO Y. Structure of triadic relations in multiplex networks // *New J. of Phys.* 2015. Vol. 17, No 7, 073029. DOI: 10.1088/1367-2630/17/7/07/3029.

22. BRÓDKA P., MUSIAŁ K., KAZIENKO P. A method for group extraction in complex social networks // *Commun. in Comput. and Inform. Sci.* Springer Berlin Heidelberg, 2010. Vol. 111. P. 238–247. DOI: 10.1007/978-3-642-16318-0\_27.

23. BRÓDKA P., KAZIENKO P., MUSIAŁ K., SKIBICKI K. Analysis of neighbourhoods in multi-layered dynamic social networks // *International J. of Computational Intelligence Systems.* 2012. Vol. 5, iss. 3. P. 582–596. DOI: 1.1080/18756891.2012.696922.



**Бредихин Сергей Всеволодович** — канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник Ин-та вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; e-mail:

bredikhin@sscc.ru.

**Сергей Бредихин** окончил механико-математический факультет Новосибирского государственного университета в 1968 г. С 1968 г. — сотрудник Института автоматизации и электрометрии СО РАН. Кандидат технических наук с 1983 г. С 1988 г. — заведующий Лабораторией прикладных систем Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Лауреат государственной премии по науке и технике 2012 г. Автор и соавтор многих научных статей, докладов и трех монографий.

**Sergey Bredikhin** graduated from Novosibirsk State University in 1968 (faculty of Mechanics and Mathematics). In 1968 he became an employee of Institute of Automation and Electrometry SB RAS. In 1983 he received PhD degree in Engineering Science. Since 1988 he is the head of Applied Systems laboratory of Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS. He was the technical manager of “Akademgorodok Internet Project”. He is the state prize winner in science and engineering (2012).



**Щербакова Наталия Григорьевна** — ст. науч. сотр. Ин-та вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; e-mail: scherbakova@sscc.ru.

**Наталия Щербакова** окончила Новосибирский государственный университет по специальности «Математическая лингвистика» в 1967 г. С 1967 г. работала в Институте математики СО РАН, затем в Институте автоматизации и электрометрии СО РАН в области создания программного обеспечения систем передачи данных. С 2000 г. — сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, где с 2002 г. занимает должность старшего научного сотрудника. Автор и соавтор более 60 работ и двух монографий.

**Natalia Shcherbakova** graduated from Novosibirsk State University in 1967 (mathematical linguistics). Since 1967 she worked at Institute of Mathematics SB RAS, then at Institute of Automation and Electrometry SB RAS in the field of software design for data transmission systems. In 2000 — the employee of Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, since 2002 works as senior researcher. She is the co-author of two monographs.

*Дата поступления* — 16.04.2025